

Centrale PSI Physique - Chimie 2001**Partie I – Hydroxydes et oxydes en présence d'eau****I.A – Dissolution des hydroxydes en milieu tamponné**

I.A.1) $[\text{Fe}^{3+}] = 10^{-2} \text{ M}$ $[\text{OH}^-] = (10^{-38}/[\text{Fe}^{3+}])^{1/3} = 10^{-12} \text{ M}$

$\text{Fe}(\text{OH})_3$ précipite lorsque $\text{pH} = 2$.

I.A.2) 99,9 % des ions Fe^{3+} ont précipités.

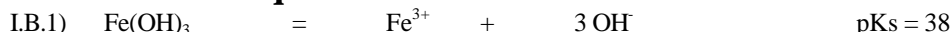
Alors $[\text{Fe}^{3+}] = 10^{-5} \text{ M}$ $[\text{OH}^-] = (\text{Ke}/[\text{Fe}^{3+}])^{1/3} = 10^{-11} \text{ M}$ $\text{pH} = 3$

I.A.3) $[\text{Fe}^{2+}] = 10^{-2} \text{ M}$ $[\text{OH}^-] = (10^{-16}/[\text{Fe}^{2+}])^{1/2} = 10^{-7} \text{ M}$

$\text{Fe}(\text{OH})_2$ précipite lorsque $\text{pH} = 7$.

I.A.4) On ne peut à priori rien prévoir. En effet, $\text{pKs}(\text{Fe}(\text{OH})_3) > \text{pKs}(\text{Fe}(\text{OH})_2)$, $\text{Fe}(\text{OH})_2$ serait plus soluble, cependant il libère moins d'ions OH^- .

Pour des nombres de mol dissous égaux, il faut comparer les valeurs du rapport $\text{pKs}/\text{nb d'ions OH}^-$. N'est-ce pas déjà entreprendre un calcul numérique ?

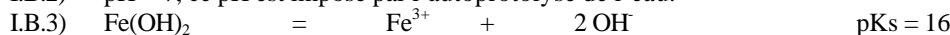
I.B – Solution aqueuse saturée

On peut supposer que l'autoprotolyse de l'eau est la réaction prépondérante. Dans ce cas,

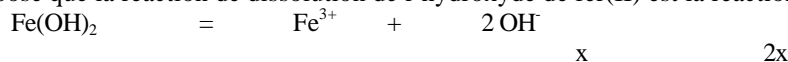
$[\text{OH}^-] = 10^{-7} \text{ M} = [\text{H}^+]$ $[\text{Fe}^{3+}] = 10^{-38}/[\text{OH}^-]^3 = 10^{-17} \text{ M}$

On vérifie que l'avancement de la réaction de dissolution de l'hydroxyde de fer(III) (10^{-17} M) est très inférieur à celui de la réaction d'autoprotolyse de l'eau (10^{-7} M).

I.B.2) $\text{pH} = 7$, ce pH est imposé par l'autoprotolyse de l'eau.



On suppose que la réaction de dissolution de l'hydroxyde de fer(II) est la réaction prépondérante. Dans ce cas,



$\text{Ks} = 4x^3$ $[\text{Fe}^{2+}] = x = (\text{Ks}/4)^{1/3} = 2,92 \cdot 10^{-6} \text{ M}$ $[\text{OH}^-] = 2x$

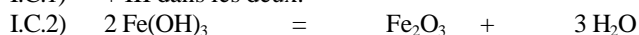
$x \gg 10^{-7}$, donc la dissolution est bien prépondérante.

$[\text{Fe}^{2+}] = 2,92 \cdot 10^{-6} \text{ M}$ $[\text{OH}^-] = 5,85 \cdot 10^{-6} \text{ M}$ $[\text{H}^+] = 1,71 \cdot 10^{-9} \text{ M}$

I.B.4) $\text{pH} = 8,8$, l'hydroxyde de fer(II) est plus soluble (basique) que l'hydroxyde de fer(III).

I.C – Stabilité de l'hydroxyde de fer(III)

I.C.1) + III dans les deux.



I.C.3) Il faut sans doute lire "en présence" là où l'énoncé mentionne "en équilibre".

L'activité des deux solides et celle du solvant valent 1.

$A = A^\circ = 2 \mu^\circ(\text{Fe}(\text{OH})_3) - \mu^\circ(\text{Fe}_2\text{O}_3) - 3 \mu^\circ(\text{H}_2\text{O}) = 59 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

I.C.4) Le système est instable ($A < 0$) et évolue dans le sens de la formation de Fe_2O_3 ($A > 0$).

I.C.5) Il y a d'abord formation d'hydroxyde de fer(III) sous contrôle cinétique, hydroxyde qui se transforme peu à peu en oxyde (contrôle thermodynamique).

Partie II – Matériau magnétique conducteur à basse fréquence

II.A – Équation du champ magnétique

II.A.1) $\|\epsilon_0 \vec{E} / t\| / \|\gamma \vec{E}\| \ll \epsilon_0 \omega / \gamma = \epsilon_0 2\pi f / \gamma$

fréquence f	1 kHz	1 MHz	1 GHz	1 THz	
alliage	4.10^{13}	4.10^{10}	4.10^7		4.10^4
ferrite	2.10^7	2.10^4	20	0,02	

II.A.2) Pour avoir $\|\epsilon_0 \vec{E} / t\| / \|\gamma \vec{E}\| \ll 1$, il faut choisir $f < 1$ GHz.

II.A.3)

a) $\Delta \vec{B} = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = -\text{rot}(\gamma \mu \vec{E}) = \gamma \mu \vec{B}$

b) $\Delta c = D \frac{\partial c}{\partial t}$ équation de la diffusion de particules

ou $\Delta T = \frac{\rho c \partial T}{\lambda \partial t}$ équation de la diffusion de la chaleur

ou $\Delta \vec{v} = \frac{\rho \partial \vec{v}}{\eta \partial t}$ pour un écoulement incompressible laminaire.

c) Cette équation n'est pas invariante par la transformation $t \rightarrow -t$ (renversement du temps).

Ici, il y a dissipation d'énergie par effet Joule dans le milieu magnétique.

Dans les exemples, il y a diffusion irréversible du plus dense vers le moins dense, du plus chaud vers le plus froid ou dissipation d'énergie pas frottement visqueux.

d) Une équation de propagation de d'Alembert : $c^2 \cdot \nabla^2 X = \nabla^2 X / t^2$.

II.A.4) L'équation du II.A.3) a) montre que $[\delta] = [\Delta B / B]^{1/2} = L$.

δ	50 Hz	1 kHz
alliage	0,5 mm	0,1 mm
ferrite	2 m	0,5 m

L'alliage est imperméable au champ magnétique, le champ reste localisé en surface.

II.B – Tracé du cycle d'hystérésis

I.B.1)

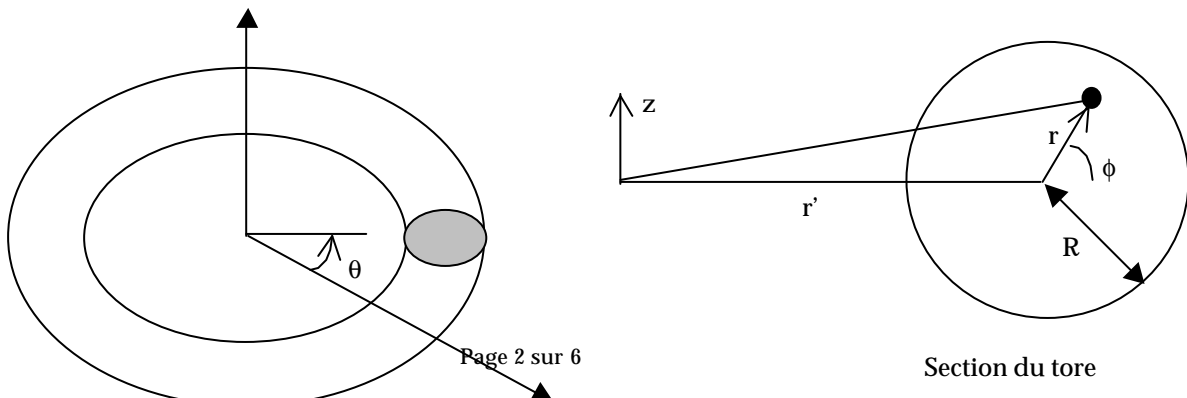


H_c : excitation coercitive (# 1 à 10^6 A/m) B_r : champ rémanent (# 10^{-3} à 1 T)
 matériau linéaire matériau ferromagnétique

I.B.2)

a) Tout plan contenant l'axe de révolution de tore est plan de symétrie pour la distribution de courant : \vec{H} est donc orthogonal à la section du tore. Le milieu est linéaire et isotrope, donc \vec{B} est colinéaire à \vec{H} .

Le système est invariant par rotation autour de l'axe du tore. Les champs ne dépendent pas de la coordonnée θ d'un système de coordonnées cylindriques défini par rapport à l'axe du tore. Ils dépendent de r' et de z (et du temps t).



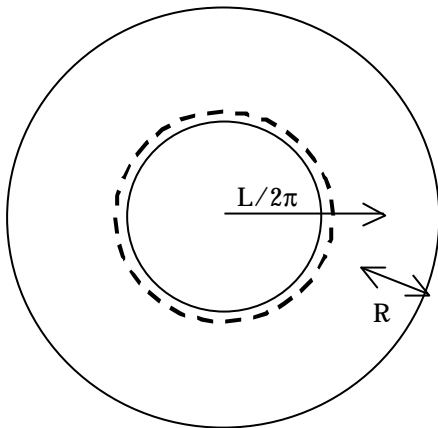
Dans le plan d'une section du tore, la position d'un point peut être repérée par les coordonnées r' et z ou bien par r et ϕ .

L'hypothèse $L \gg R$ permet de considérer localement le tore comme un cylindre infiniment long et donc d'affirmer que \vec{B} et \vec{H} sont indépendants de ϕ . On a donc $\vec{B}(r, t)$ et $\vec{H}(r, t)$: la distribution de champ magnétique est à symétrie cylindrique.

Les courants induits \vec{j}_i dans le milieu de conductivité γ , sont $\vec{j}_i = \gamma \vec{E}$, avec $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Tout plan contenant l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de champ magnétique, d'où $\vec{j}_i = j_i(r, t) \vec{u}_\phi$: les courants s'enroulent autour de \vec{B} . Les lignes de courants sont donc des cercles concentriques.

b)

dans
juste
 $L/2\pi -$
Ce



Appliquons le théorème d'Ampère à un contour fermé circulaire situé un plan orthogonal à l'axe du tore et centré sur cet axe, de rayon tout supérieur à

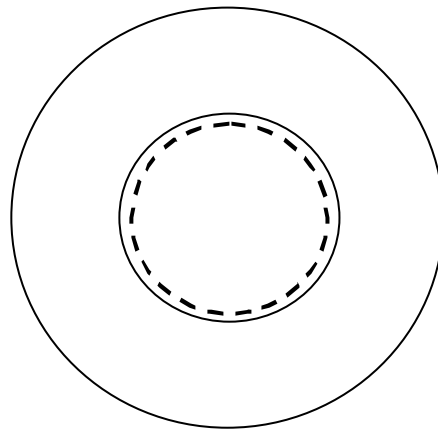
R (contour représenté en pointillé).

Le contour n'enlace aucun courant induit, seulement le courant $i(t)$ parcourant les N spires de l'enroulement.

$$\oint \vec{H}(R, t) \cdot d\vec{l} = Ni(t) = H(R, t) \cdot (L - 2\pi R).$$

Comme $L \gg R$, $H(R, t) = (N/L) i(t)$.

procédant comme au b), mais avec un contour situé dans un plan orthogonal à l'axe du tore et sur cet axe, de rayon tout juste inférieur à $L/2\pi$ (représenté en pointillé), on obtient – à condition que les spires soient réellement à la surface du tore – \vec{B}_{ext} nuls.



c) En

circulaire
centré

R
que les
 \vec{H}_{ext} et

Considérons pour cette question B uniforme

$$B_0 = \mu N I_0 / L \quad \text{et} \quad \phi_0 = \pi R^2 N B_0 =$$

dans le tore. Les spires sont $\pi R^2 N \mu N I_0 / L$.

A.N. :

B_0

alliage
1 T

ferrite
0,1 T

ϕ_0

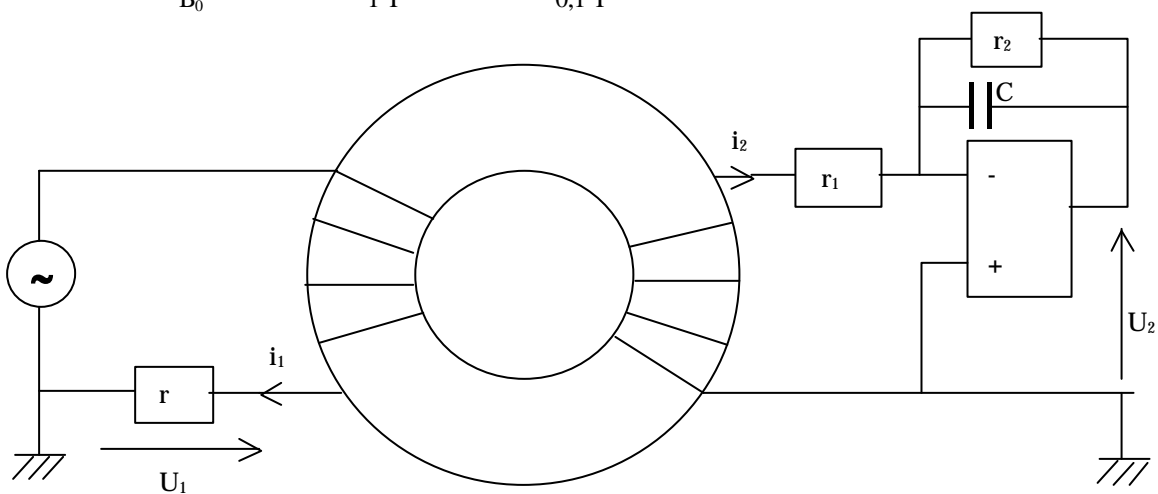
$4 \cdot 10^{-2}$
Wb

$4 \cdot 10^{-3}$
Wb

Ces valeurs sont usuelles.

II.B.3)

a)



- b) On suppose que H et B sont uniformes. D'après le théorème d'Ampère, $HL = N_1 i_1 + N_2 i_2$, où N_1 et N_2 sont les nombres de spires au primaire et au secondaire. On se place dans une situation telle que $i_1 = i_2 = i$ ($r_1 = r_2 = r$).

Au primaire, on a $U_1 = r i_1$, ce qui donne $H = \frac{N_1 U_1}{Lr}$.

Pour obtenir B , il est nécessaire d'avoir recours à un intégrateur : $U_2 = -\frac{N_2 \pi R^2 \dot{B}}{r_2 C}$ lorsque le montage à AO

fonctionne en intégrateur, c'est-à-dire pour $r_2 C 2\pi f \gg 1$.

- c) U_1 et U_2 sont de l'ordre de quelques centaines de mV, N_1 et N_2 de l'ordre de 100, i_1 de l'ordre de 0,1 A.

Il faut donc choisir $r \neq 1 \Omega$.

$r_1 C$ est de l'ordre de 10 ms pour la ferrite et de 100 ms pour l'alliage.

On peut choisir $C \neq 1 \mu F$ et $r_1 \neq 10 k\Omega$ ou $100 k\Omega$.

La condition $r_2 C 2\pi f \gg 1$ impose à 50 Hz de choisir $r_2 > 50 k\Omega$.

II.B.4)

- a) En posant $r = \delta y / \alpha$, dans $\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} = \mu \gamma \frac{\partial B}{\partial t}$, il vient $\frac{\alpha^2}{\delta^2} \left(\frac{d^2 B}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dB}{dy} \right) = \mu \gamma i \omega B$ puis

$\alpha^2 = -2i$ d'où $\alpha = \pm (1 - i)$.

- b) En multipliant l'équation satisfaite par B par y , on obtient $y \frac{d^2 B}{dy^2} + \frac{dB}{dy} + y B = 0$ qui donnerait $\frac{dB(0)}{dt} = 0$,

si l'on était sûr que $|d^2 B(0)/dt^2|$ reste borné.

- c) Voir II.A.4).

II.B.5)

- a) On constate que :

- pour $R/\delta < 3$, $|B(r/\delta)| \approx |B(0)|$, $|B|$ reste sensiblement uniforme à l'intérieur du tore

- pour $R/\delta > 8$, $|B(r/\delta)| \approx |B(0)| \exp(r/\delta - 6)$.

- b) Pour la ferrite, $R/\delta \approx 4 \cdot 10^{-3} \ll 1$. Le flux de B est donc proportionnel à B . On peut tracer le cycle d'hystérésis avec un tel dispositif.

Pour l'alliage, $R/\delta \approx 20 > 3$. Le flux mesuré n'est pas proportionnel à B . On peut imaginer d'augmenter δ en diminuant la fréquence (les valeurs des composants de l'intégrateur vont alors poser problème) ou en diminuant R (en feuilletant le matériau).

II.B.6)

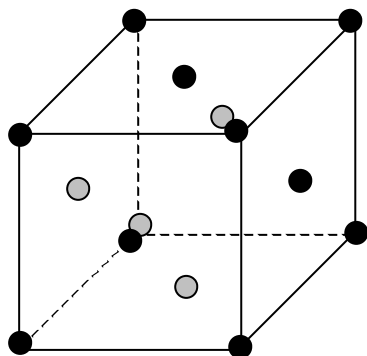
- a) $\Phi(t) = N \pi R^2 h(R/\delta) B(R, t)$

- b) $h(R/\delta)$ vaut d'après les courbes environ $0,07 \exp(-i\pi/4)$. Le flux de B est alors déphasé d'un huitième de période par rapport au champ B . Ceci déforme le cycle qui s'en trouve arrondi.

- c) A moins d'interposer un déphaseur au secondaire, il est impossible d'observer le cycle réel.

Partie III – Étude structurale d'une ferrite

III.A –



III.B – 4

III.C – $r_1 = r_{O_2} \cdot ((3/2)^{1/2} - 1) = 31 \text{ pm}$

III.D – $r_o = r_{O_2} \cdot (2 - 1) = 58 \text{ pm}$

III.E – $r_{Fe^{2+}}$ et $r_{Fe^{3+}}$ sont supérieurs à r_i et à r_o , il est donc impossible de placer les ions fer dans les sites interstitiels sans déformation de l'empilement des ions oxydes.

III.F – Il y a deux ions Fe^{3+} et un ion Fe^{2+} par maille.

Les 8 sites tétraédriques sont occupés par la moitié des ions Fe^{2+} , soit un taux d'occupation de $(1/2)/8$ c'est-à-dire 6,25 %.

Les 4 sites octaédriques sont occupés par tous les ions Fe^{3+} et par la moitié des ions Fe^{2+} , soit un taux d'occupation de $2/4 + (1/2)/4$ c'est-à-dire 62,5 %.

(L'énoncé commet ici une imprécision, en réalité, les ions Fe^{2+} se placent dans des sites octaédriques et les ions Fe^{3+} occupent pour moitié des sites octaédriques et pour moitié des sites tétraédriques. Dans ce cas, 50 % des sites octaédriques et 12,5 % des sites tétraédriques sont occupés.)

III.G – Ce sont les ions Fe^{2+} placés dans les sites tétraédriques qui déforment le plus la maille.

Si on suppose que celle-ci reste cubique, son arête vaut $4(r_{O_2} + r_{Fe^{2+}}) / \sqrt{3} = 499 \text{ pm}$.

(Si on tient compte de l'erreur de l'énoncé, on trouve 471 pm.)

Partie VI –

IV.A – Utilisation d'une ferrite dans un hacheur "dévolteur"

IV.A.1) $\Gamma = \phi i$ et $E' = \phi \omega$

$\Gamma \cdot \omega = E' \cdot i$ traduit la conversion électromécanique de puissance.

IV.A.2) $\Gamma = Ei/\omega = 6,4 \text{ N.m}$

IV.A.3) On conserve le couple, donc le courant i . La vitesse est divisée par 2, donc $E' = E/2 = 50 \text{ V}$.

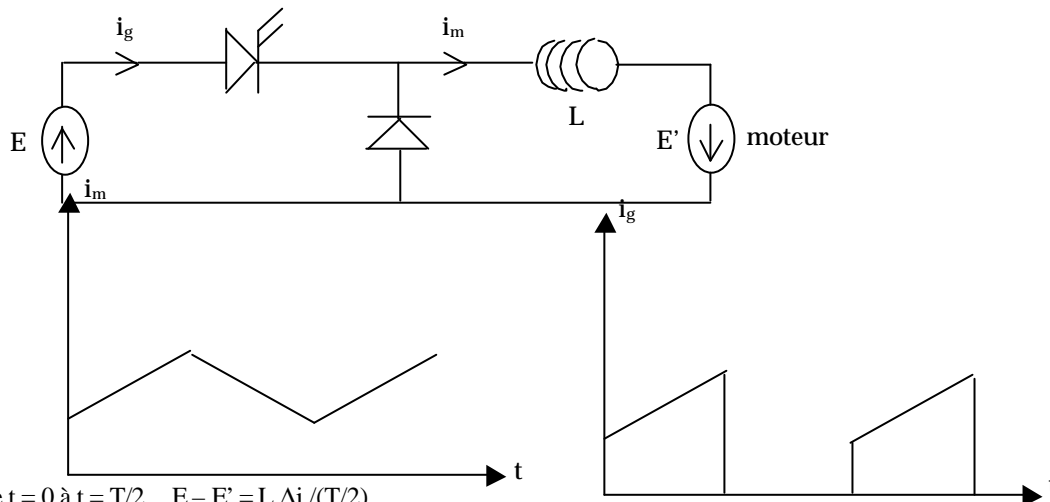
La résistance à placer en série avec le moteur vaut $R = E/2i = 5 \Omega$. La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance vaut $Ri^2 = 500 \text{ W}$, ce qui est énorme (rendement 50 %).

IV.A.4)

a) Il a un rendement de 100 %.

b) $E' = \alpha E$ où α est le rapport cyclique. Il vaut donc 1/2.

c)



IV.A.5) De $t = 0$ à $t = T/2$, $E - E' = L \Delta i / (T/2)$

D'où $L = (E - E')T/2\Delta i$ A.N. : $L = 50 \text{ mH}$

Il faut ajouter à L une bobine d'autoinductance au moins égale à 40 mH en série avec le moteur.

IV.A.6) Question assez vague, il faudrait que l'énoncé précise une contrainte supplémentaire.

On peut choisir par exemple d'imposer un fonctionnement quasi-linéaire. On lit alors sur la courbe, $\mu = B/H$ $2 \cdot 10^{-3}$ pour $H = 200 \text{ A.m}^{-1}$.

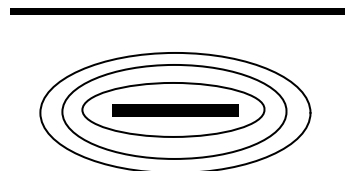
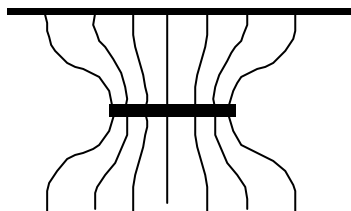
En notant l la longueur de la bobine, l'autoinductance est $L = BS^2/\mu l$.

Avec $N = 100$ et $l = 25 \text{ cm}$ on obtient un volume $V = S \cdot l \approx 100 \text{ cm}^3$.

IV.B – Utilisation d'une ferrite à haute fréquence dans une ligne triplaque – Étude locale des champs

IV.B.1) a) $\Delta \vec{B}_0 = \vec{0}$ $\Delta \vec{E}_0 = \vec{0}$

IV.B.1) b)



$$\text{IV.B.2) } \Delta \vec{E} = \mu \left(\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) \quad \vec{B} \text{ satisfait à la même équation.}$$

$$\text{IV.B.3) a) } \Delta (E_{0x}(x,y).f(z,t)) = E_{0x} \frac{\partial^2 f(z,t)}{\partial z^2} = E_{0x} \mu \left(\gamma \frac{\partial f(z,t)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 f(z,t)}{\partial t^2} \right) \text{ d'où}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \mu \left(\gamma \frac{\partial f}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)$$

b) Dans le cas de tels champs, on peut choisir un potentiel vecteur $\vec{A} = A(x,y,z,t)\vec{u}_z$

La circulation dans un plan perpendiculaire à l'axe des z depuis un point d'une plaque à un point du ruban de même coordonnée z vaut

$$\int_{\text{plan conducteur}}^{\text{ruban conducteur}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l} = f(z,t) \int_{\text{plan conducteur}}^{\text{ruban conducteur}} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}.$$

On peut donc écrire la différence de potentiel entre le ruban conducteur et le plan conducteur sous la forme $v(z,t) = V_0.f(z,t)$.

IV.C – Étude de modèle de la ligne à “ constantes réparties ”

$$\text{IV.C.1) a) } \frac{\partial v}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -\sigma \frac{\partial v}{\partial t} - gv$$

$$\text{IV.C.1) b) } \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \lambda \left(g \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)$$

C'est rigoureusement la même équation qu'au IV.B car $\lambda\sigma = \mu\varepsilon$ et $\lambda g = \gamma\mu$.

$$\text{IV.C.2) } k^2 = \lambda\sigma\omega^2 - ig\lambda\omega$$

k étant complexe, le milieu est absorbant, les ondes qui s'y propagent ont une amplitude qui décroît.

IV.C.3)

a) A l'aide des équations du IV.C.1) a), on détermine $Z_c = \lambda\omega/k$. Alors, $Z_c^2 = \lambda/(\sigma - ig/\omega)$.

$$\text{b) } P_{\text{ferrite}} = \text{Re}(1/Z_c) \cdot V_1^2/2$$

$$\text{c) } P_{\text{ferrite}} = (\sigma/\lambda)^{1/2} \cdot V_1^2/2$$

$$P_{\text{ferrite}}/P_{\text{vide}} = (\varepsilon_r/\mu_r)^{1/2} \quad 40 \%$$

Pour une même amplitude de l'onde, la puissance nécessaire est plus faible.

IV.C.4)

$$\text{a) } k = k' - ik'' \text{ avec } k^2 = \lambda\sigma 4\pi^2 f^2 - ig\lambda 2\pi f = k'^2 - k''^2 - 2ik'k''$$

En supposant $k'^2 \gg k''^2$, on obtient $k'' = (g/2)$. $(\lambda/\sigma) = (\gamma\mu_0 c/2)$. (μ_r/ε_r) .

On détermine la distance caractéristique d'atténuation $\delta = 1/k'' = 20 \text{ m}$.

(On a bien $k' = \omega$. $(\lambda\sigma) = (\omega/c)$. $(\mu_r/\varepsilon_r) = 8 \text{ m}^{-1} \gg k''$.)

$$\text{b) } Z_c = l\omega/k' = (\lambda/\sigma) = (\mu_r/\varepsilon_r)/c\sigma = 10 \text{ k}\Omega$$

$$\text{c) } P_{\text{ferrite}} = (\sigma/\lambda)^{1/2} \cdot V_1^2/2 = V_1^2/2Z_c = 0,4 \text{ W}$$