

I. 1. 1.  $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z-d) - d \frac{dz}{dt} + f_0 \cos \omega t$

I. 1. 2.  $[w_0] = \frac{[k]^{1/2}}{[m]^{1/2}} = \left[ \frac{[F]}{L} \times \frac{1}{M} \right]^{1/2} = \left[ \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{M \cdot L} \right]^{1/2} = T^{-1}$

$[Q] = \frac{M [w_0]}{[d]} = \frac{M [w_0]}{[F]/L T^{-1}} = \frac{M \cdot T^{-1}}{M L T^{-2}} \times \frac{L T^{-1}}{1} = 1$ ; Q est sans dimension

$[a_m] = \frac{[Q] [f_0]}{[m] [w_0]^2} = \frac{1 \cdot M L T^{-2}}{M \cdot T^{-2}} = L$ ;  $a_m$  a la dimension d'une longueur

$[u] = \frac{[w]}{[w_0]} = \left[ \frac{2\pi}{T} \right] \times \frac{1}{[w_0]} = \frac{1}{T \cdot T^{-1}}$ ; u est sans dimension

I. 1. 3. Avec les notations proposées:  $\frac{d^2}{dt^2}(z-d) + \frac{w_0}{Q} \frac{d}{dt}(z-d) + w_0^2(z-d) = \frac{w_0^2}{Q} a_m \cos \omega t$

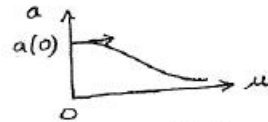
On utilise la notation complexe:  $\cos \omega t = \text{Re}(e^{i\omega t})$ ;  $z-d = \text{Re}(a e^{i\varphi} e^{i\omega t})$

$a e^{i\varphi} \left[ w_0^2 - \omega^2 + \frac{i w_0 \omega}{Q} \right] = \frac{w_0^2}{Q} a_m$ ;  $a e^{i\varphi} [Q(1-u^2) + i u] = a_m$

D'où  $a = \left| \frac{a_m}{Q(1-u^2) + i u} \right|$ ;  $a = \frac{a_m}{\sqrt{Q^2(1-u^2)^2 + u^2}}$

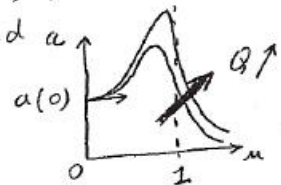
Étude du graphe  $a(u)$ :  $a(0) = \frac{a_m}{Q} (= \frac{f_0}{k})$ ;  $\lim_{u \rightarrow 0} a = 0$ ;  $\frac{da}{du} \Big|_{u=0} = 0$

• Si  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $a(u)$  est monotone décroissante



• Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , a passe par un maximum pour  $u = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < 1$  (donc pour  $\omega < \omega_0$ ) d'autant plus proche de  $u=1$  (donc de  $\omega = \omega_0$ ) que Q est grand.

$a_{\max} = \frac{a_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{Q a(0)}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$  d'autant plus grand que Q est grand



Phénomène de résonance d'autant plus aigüe que Q est grand.

I. 1. 4  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 100 \text{ kHz}$

I. 2. 1. Développement de Taylor au voisinage de  $z=d$  et poussé à l'ordre 3:

$F(z) = F(d) + (z-d) \frac{dF}{dz} \Big|_d + \frac{(z-d)^2}{2} \frac{d^2 F}{dz^2} \Big|_d + \frac{(z-d)^3}{3!} \frac{d^3 F}{dz^3} \Big|_d$

$A = F(d) = -\frac{K}{d^2}$ ;  $B = \frac{dF}{dz} \Big|_d = \frac{2K}{d^3}$ ;  $C = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dz^2} \Big|_d = -\frac{3K}{d^4}$ ;  $D = \frac{1}{3!} \frac{d^3 F}{dz^3} \Big|_d = -\frac{4K}{d^5}$

(Rem: le coefficient de  $(z-d)^m$  est  $(-1)^{m+1} \times \frac{(m+1)K}{d^{m+2}}$ )

I. 2. 2.  $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z-d) - d \frac{dz}{dt} + f_0 \cos \omega t + F(z)$

$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{dz}{dt} + w_0^2(z-d) = \frac{w_0^2}{Q} a_m \cos \omega t + \frac{A}{m} + \frac{B}{m}(z-d)$

On peut écrire:  $\frac{d^2}{dt^2}(z-d) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d(z-d)}{dt} + (\omega_0^2 - \frac{B}{m})(z-d) = \frac{A}{m} + \frac{\omega_0^2}{Q} a_m \cos \omega t$

ou  $\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + (\omega_0^2 - \frac{B}{m})z = \frac{A}{m} + \frac{\omega_0^2}{Q} a_m \cos \omega t$

I. 2.3 La présence de A modifie la position d'équilibre, donc la position autour de laquelle se font les oscillations forcées.

$z_{eq} = \frac{A/m}{\frac{K}{m} - \frac{B}{m}} = \frac{-K/d^2}{K - \frac{2K}{d^3}} = \frac{Kd}{2K - Kd^3} \underset{\substack{\uparrow \\ AN: Kd^3 \gg K}}{=} \frac{1}{2} \frac{K}{Kd^2} = -1,1 \cdot 10^{-13} = -1,1 \cdot 10^{-4} \text{ nm}$

I. 2.4 B modifie la pulsation propre qui devient  $\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \frac{B}{m} = \frac{1}{m} (K - \frac{2K}{d^3})$   
Cet effet est très faible:  $\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{B}{m\omega_0^2}} \approx \omega_0 (1 - \frac{B}{2m\omega_0^2})$

D'où la variation relative de  $\omega_0$ :  $\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0' - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{B}{2m\omega_0^2} = -\frac{2K}{Kd^3} = -1,5 \cdot 10^{-5}$

L'influence de B est donc tout à fait négligeable pour les oscillations de faible amplitude (Rem: Q est aussi modifiée de façon négligeable:  $Q' = Q \frac{\omega_0}{\omega_0'}$ )

I. 2.5

$C(z-d)^2 = C a^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{C a^2}{2} (1 + \cos 2(\omega t + \varphi))$ : apparition de l'harmonique de fréquence double ( $2 \times \frac{\omega}{2\pi}$ ).

$D(z-d)^3 = D a^3 \cos^3(\omega t + \varphi) = \frac{D a^3}{4} (\cos 3(\omega t + \varphi) + 3 \cos(\omega t + \varphi))$ : apparition de l'harmonique de fréquence triple ( $\frac{3\omega}{2\pi}$ ).

I. 3. 1.  $\frac{d^2}{dt^2}(z-d) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d(z-d)}{dt} + \omega_0^2(z-d) = \frac{-K}{m d^2} + \frac{a m \omega_0^2}{Q} \cos \omega t$

I. 3. 2.  $F_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{K \cdot \cos \theta}{(d + a \cos \theta)^2} \cdot d\theta = -\frac{K}{d^2} \times 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos \theta \cdot d\theta}{(1 + \frac{a}{d} \cos \theta)^2} = -\frac{K}{d^2} \times 2 \times \left( -\frac{a/d}{(1 - (a/d)^2)^{3/2}} \right)$

$F_1 = \frac{2Ka}{(d^2 - a^2)^{3/2}}$  donc  $F(z) \approx \frac{2Ka}{(d^2 - a^2)^{3/2}} \cos(\omega t + \varphi)$  et on remplace dans I. 3. 1.

I. 3. 3. L'équation différentielle devient, en régime forcé et en notation complexe:

$[\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}] a e^{i\varphi} = \frac{2Ka e^{i\varphi}}{m(d^2 - a^2)^{3/2}} + \frac{a m \omega_0^2}{Q}$

$[Q(1 - u^2) + i u - \frac{2KQ}{m\omega_0^2(d^2 - a^2)^{3/2}}] a e^{i\varphi} = a_m$ ; on passe aux modules au carré:

$a^2 \left\{ Q^2 \left( 1 - u^2 - \frac{2K}{m\omega_0^2(d^2 - a^2)^{3/2}} \right)^2 + u^2 \right\} = a_m^2$  Posons  $\frac{2K}{m\omega_0^2} \left( \frac{2K}{K} \right) = \beta a_m^3$

$a^2 \left\{ Q^2 \left( 1 - u^2 - \frac{\beta a_m^3}{(d^2 - a^2)^{3/2}} \right)^2 + u^2 \right\} = a_m^2$  On introduit  $\tilde{a} = \frac{a}{a_m}$  et  $\tilde{d} = \frac{d}{a_m}$ ;

alors:  $\frac{a_m}{(d^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{1}{(\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2}}$ ; on reporte; on isole le carré...

$$\left\{ Q(1-u^2) - \frac{Q\beta}{(\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2}} \right\}^2 = \frac{1}{\tilde{a}^2} - u^2 = \left\{ \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - u^2} \right\}^2$$

D'où  $Q(1-u^2) - \frac{Q\beta}{(\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2}} = -\sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - u^2}$

$$\frac{Q\beta}{(\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2}} = Q(1-u^2) \pm \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - u^2} = \mathcal{A}; \quad (\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2} = \frac{Q\beta}{\mathcal{A}}; \quad \tilde{d}^2 - \tilde{a}^2 = \left(\frac{Q\beta}{\mathcal{A}}\right)^{2/3}$$

et enfin:  $\tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \left[ \frac{\beta Q}{Q(1-u^2) \pm \sqrt{1/\tilde{a}^2 - u^2}} \right]^{2/3}$  ouf...

I.3.5 (on se repose...)  $\beta Q = \frac{2 \times 5 \cdot 10^{-28} \times 100}{20 \times (13,5)^3 \times 10^{-27}} = 8,13 \cdot 10^{-3}$

On trouve  $(\beta Q)^{2/3} = 0,0404 \neq 0,04$

On se place ensuite dans le cas  $u = 1$ :  $\tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \frac{0,04}{(1/\tilde{a}^2 - 1)^{1/3}}$

I.3.6  $\frac{1}{\tilde{a}^2}$  est une fonction décroissante de  $\tilde{a}$ , ainsi que  $(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1)$  et  $(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1)^{1/3}$ .

$\frac{0,04}{(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1)^{1/3}}$  est donc croissante, ainsi que  $\tilde{a}^2$ . Donc  $\tilde{d}^2$  est croissante et  $\tilde{d}$  aussi.

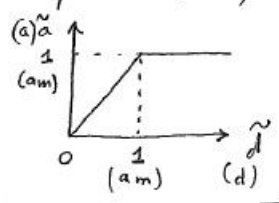
Si  $\tilde{a} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{\tilde{a}^2} \rightarrow \infty$ , donc  $\frac{0,04}{(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1)^{1/3}} \rightarrow 0$ : pour  $\tilde{a} = 0$ ,  $\tilde{d} = 0$

Si  $\tilde{a} \rightarrow 1$ ,  $\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1 \rightarrow 0$  donc  $\frac{0,04}{(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1)^{1/3}} \rightarrow \infty$ : pour  $\tilde{a} = 1$ ,  $\tilde{d} \rightarrow \infty$

I.3.7: Pour  $\tilde{a} = 0,95$ ,  $\tilde{d} = \left[ (0,95)^2 + \frac{0,04}{\left[ \frac{1}{(0,95)^2} - 1 \right]^{1/3}} \right]^{1/2} = 0,9932$ ;  $\tilde{d} - \tilde{a} = 0,0432$

I.3.8: A 0,04 près (donc  $\tilde{a}$  1% près),  $\tilde{d} = \tilde{a}$  pour  $0,2 < \tilde{d} < 0,99$ . Dans cet intervalle, on peut modéliser le graphe  $\tilde{a}(\tilde{d})$  pour la droite  $\tilde{a} = \tilde{d}$  (pente 1).

Pour  $\tilde{d} = 0,993$ ,  $\tilde{a}$  a atteint sa valeur asymptotique ( $\tilde{a} = 1$ ) à 0,05 près (donc 5%), pour  $\tilde{d} > 1$ , on peut modéliser le graphe  $\tilde{a}(\tilde{d})$  par son asymptote  $\tilde{a} = 1$ .



On reconnaît l'allure de la courbe expérimentale en portant  $a (= \tilde{a} \cdot a_m)$  en fonction de  $d (= \tilde{d} \cdot a_m)$ ; l'expérience proposée correspond à  $a_m = 17,5$  nm (pourquoi pas 13,5 nm? mystère...)

I.3.9:  $u = \sqrt{1 - \frac{0,9}{9}} \neq 1 - \frac{0,9}{2 \cdot 9} = 1 - 1,1 \cdot 10^{-3} (= 0,9989)$

I.3.10:  $\tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \frac{0,04}{(0,9 \pm \sqrt{1/\tilde{a}^2 - 1})^{2/3}}$

Les deux branches se rejoignent pour  $d_{\oplus} = d_{\ominus}$  donc  $\sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1} = 0$ , donc  $\tilde{a} = 1$ ;

$\tilde{d}$  vaut alors  $\tilde{d} = \sqrt{1 + \frac{0,04}{(0,9)^{2/3}}} = 1,02$

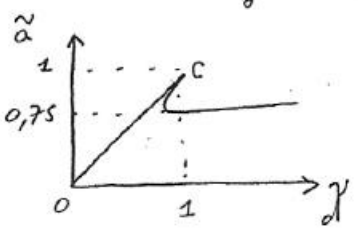


I.3.11. On reprend le raisonnement fait en I.3.6:  $\frac{1}{\tilde{a}^2}$  est une fonction décroissante,  $(0,9 + \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1})^{2/3}$  aussi; donc  $\frac{0,04}{(0,9 + \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1})^{2/3}}$  est croissante ainsi que  $\tilde{a}^2$ ;  $\tilde{d}^2$  est donc croissante et  $\tilde{d}$  aussi.

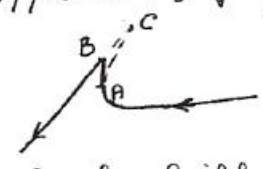
Comme à la question I.3.8, la courbe  $\tilde{a}(\tilde{d})$ , passe par le point (0;0), par le point (1; 1,02), donc pratiquement par le point (1;1), elle est croissante; on peut la modéliser par le même segment de droite de pente 1.

I.3.12.  $\tilde{d} \rightarrow \infty$  pour  $0,9 - \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1} = 0$  donc  $\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{1+(0,9)^2}} = 0,74$

Pour  $\tilde{a} = 0,75$ ,  $\tilde{d} = d_1 = 1,07$ .  $\tilde{a}$  varie de 0,75 à 0,74 (donc de 1%) lorsque  $\tilde{d}$  varie de  $d_1$  à l'infini; on peut considérer que la courbe se confond avec une droite horizontale  $\tilde{a} = \text{cte} = 0,75$ .

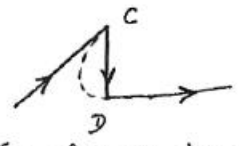


Approche:  $\tilde{d} \downarrow$ ; le point représentatif sur la branche  $\ominus$  (la seule  $\tilde{a}$  à atteindre les valeurs élevées de  $\tilde{d}$ ) se déplace vers la gauche jusqu'en A qui correspond à la plus faible valeur de  $\tilde{d}$  sur la branche  $\ominus$ .



continuant à diminuer, le point représentatif saute sur la branche  $\oplus$ , en B, puis continue sur la branche  $\oplus$  (droite de pente 1).

Retrait:  $\tilde{d} \uparrow$ ; le point représentatif sur la branche  $\oplus$  se déplace vers la droite jusqu'en C, saute sur la branche  $\ominus$  en D, puis continue sur la branche  $\ominus$  quasi-horizontale.



On observe donc le résultat expérimental de la figure 3 et un hystérésis tel qu'il est décrit dans l'introduction: lors de l'approche,  $\tilde{a}$  (donc  $a = \tilde{a} \cdot a_m$ !) subit une discontinuité ( $\tilde{a}_B - \tilde{a}_A$ ) pour une distance  $\tilde{d}_A$  différente de la discontinuité ( $\tilde{a}_C - \tilde{a}_D = 1 - 0,75$ ) pour la distance  $\tilde{d}_C = 1$  lors du retrait.  $\Delta \tilde{a}_{\text{retrait}} > \Delta \tilde{a}_{\text{approche}}$ ;  $\tilde{d}_{\text{retrait}} > \tilde{d}_{\text{approche}}$ ; petit pic étroit à l'approche, grand pic large au retrait.