-22- Dans le vide, pour une OPPH, $\vec{B} = \dfrac{\vec{u_i} \wedge \vec{E}}{c} = \dfrac{\vec{k_i} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$$\vec{B}_i = \begin{vmatrix} \frac{k}{\omega}\cos\theta \\ \frac{k}{\omega}\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{0i}\, e^{j(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{OM})} \end{vmatrix} = \boxed{\begin{vmatrix} \frac{E_{0i}}{c}\sin\theta\, \exp j(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{OM}) \\ -\frac{E_{0i}}{c}\cos\theta\, \exp j(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{OM}) \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{B_i}}$$

$$\frac{k}{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda\omega} = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{c}$$

-23- Dans le métal : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ or, $\gamma \to \infty$! Comme $\vec{j}$ est fini, $\vec{E_m} = \vec{0}$

Par ailleurs : $\underset{m \to v}{\Delta\vec{E}} = \vec{E}_{vide} - \cancel{\vec{E_m}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\vec{e_x})$

Soit : $\underset{x=0}{\vec{E_i}} + \underset{x=0}{\vec{E_r}} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_x}$

on projette sur y et z :
$$\begin{cases} E_{0i}\, e^{j(\omega t - k\sin\theta\cdot y)} + E_{0rz}\, e^{j(\omega_r t - k_{ry} y - k_{rz} z)} = 0 \\ E_{0ry}\, e^{j(\omega_r t - k_{ry}\cdot y - k_{rz} z)} = 0 \end{cases}$$

Doit être vrai $\forall t$, $\forall y$ et $\forall z$

On en déduit : $\underline{\omega = \omega_r}$; $\underline{k_{ry} = k\sin\theta}$; $\underline{k_{rz} = 0}$; $E_{0ry} = 0$; $E_{0rz} = -E_{0i}$

Par ailleurs, dans le vide : $\|\vec{k_r}\| \underset{\omega=\omega_r}{=} \|\vec{k_i}\| = \dfrac{\omega}{c} = \sqrt{k_{rx}^2 + k_{ry}^2 + \cancel{k_{rz}^2}}$

soit : $\dfrac{\omega^2}{c^2} = k^2\sin^2\theta + k_{rx}^2 \Rightarrow k_{rx}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}(1 - \sin^2\theta) = \dfrac{\omega^2}{c^2}\cos^2\theta$

Il est clair que l'onde réfléchie se propage selon les $x \searrow$ $\Rightarrow$ $\underline{k_{rx} = -\dfrac{\omega}{c}\cos\theta}$

$$\underline{\vec{k_r} = \frac{\omega}{c}\left(-\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}\right)}$$ On retrouve les Lois de Descartes ($\theta_r = -\theta$).

-24- On a vu en (-23-) que : $\underline{E_{0ry} = 0}$ et $\underline{E_{0rz} = -E_{0i}} = -E_0$

Par ailleurs, dans le vide : $\operatorname{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\dfrac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\dfrac{\partial E_z}{\partial z}} = 0$

avec $\vec{E} = \vec{E_i} + \vec{E_r}$ $\quad (E_y = E_{iy} + E_{ry} = 0)$

$k_z = k_{rz} = 0 \Rightarrow \vec{E}$ ind de z

$$E_x = \cancel{E_{ix}} + E_{rx} = E_{0rx}\, e^{j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{OM})}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = +j\,k\cos\theta\, E_{0rx}\, e^{j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{OM})} = 0 \quad \forall (x \leq 0, y, z, t)$$

$$\Rightarrow \underline{E_{0rx} = 0}$$

finalement : $\boxed{\vec{E_{0r}} = -E_0\,\vec{e_z}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{E_r} = -E_0\, e^{j(k\cos\theta x - k\sin\theta y + \omega t)}\,\vec{e_z}}$

Comme $\vec{B_r} = -\dfrac{\vec{k_r} \wedge \vec{E_r}}{\omega}$ $\quad$ $\underline{\vec{B_r} = \dfrac{-E_0}{c}\, e^{j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{OM})}\left[\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}\right]}$

-25- $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 \exp^{j(\omega t - k\sin\theta y)} \Big[\underbrace{e^{-jk\cos\theta x} - e^{jk\cos\theta x}}_{-2j\sin(k\cos\theta x)} \Big] \vec{e}_z$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \exp^{j(\omega t - k\sin\theta y)} \begin{bmatrix} \sin\theta \left(e^{-jk\cos\theta x} - e^{+jk\cos\theta x}\right)\vec{e}_x \\ \cos\theta \left(e^{-jk\cos\theta x} + e^{jk\cos\theta x}\right)\vec{e}_y \end{bmatrix}$$

Soit : $\vec{B} = \frac{2E_0}{c} e^{j(\omega t - k\sin\theta y)} \Big[-j\sin\theta \sin(k\cos\theta x)\vec{e}_x - \cos\theta\cos(k\cos\theta x)\vec{e}_y \Big]$

En réel :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= 2E_0 \sin(k\cos\theta x)\sin(\omega t - k\sin\theta . y)\,\vec{e}_z \\ \vec{B} &= \frac{2E_0}{c}\begin{bmatrix} \sin\theta \sin(k\cos\theta x)\sin(\omega t - k\sin\theta y)\,\vec{e}_x \\ -\cos\theta . \cos(k\cos\theta x)\cos(\omega t - k\sin\theta y)\,\vec{e}_y \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

-26- $\langle u \rangle = \left\langle \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = 2\varepsilon E_0^2 \left(\frac{\sin^2(k\cos\theta x)}{2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2(k\cos\theta x) + \cos^2\theta\cos^2(k\cos\theta x)}{} \right)$ moy. temporelle

car $\langle \sin^2(\omega t - k\sin\theta y)\rangle = \langle \cos^2(\omega t - k\sin\theta y)\rangle = 1/2$

Sur tout l'espace $x<0$: $\langle\langle \sin^2(k\cos\theta x)\rangle\rangle = \langle\langle \cos^2(k\cos\theta x)\rangle\rangle = \frac{1}{2}$
(moyenne spatiale)

Ainsi : $\boxed{u = \varepsilon E_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{2} \right) = \varepsilon E_0^2}$ indep de θ

-27- $\underset{\sigma \to m}{\Delta \vec{B}} = -\vec{B}(x=0^-,t) = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{u}_x \Rightarrow \vec{j_s} = \frac{\vec{B}(x=0^-,t)\wedge\vec{u}_x}{\mu_0}$

$\vec{B}_m = \vec{0}$ (+) $\vec{u}_x N(1)$

Soit : $\boxed{\vec{j_s} = \frac{2E_0}{c}\frac{\cos\theta}{\mu_0}\cos(\omega t - k\sin\theta y)\,\vec{e}_z}$

-28- Cette force est la force de Laplace : Action de $\vec{B}''$ (champ créé par la surface du métal $\ominus\, dS$) sur le courant $\vec{j_s}.dS$ $\vec{B} = \vec{B}'' + \vec{B}'$ champ créé par le courant $\vec{j_s}.dS$

On montre que $\vec{B}' = \frac{\vec{B}}{2}$ (champ créé par une nappe plane ∞)
$\Rightarrow \vec{B}'' = \frac{\vec{B}}{2}$ Ainsi : $d\vec{F} = \vec{j_s}\, dS \wedge \vec{B}'' = \frac{1}{2}\vec{j_s}\wedge\vec{B}.\, dS$.

$\vec{B}(x=0,t) = -\frac{2E_0}{c}\cos\theta \underbrace{\cancel{\cos(k\cos\theta x)}}_{=1}\cos(\omega t - k\sin\theta y)\,\vec{e}_y$

$d\vec{F} = \frac{1}{2}\vec{j_s}\wedge dS\,\vec{B} = +\frac{2E_0^2}{c^2}\frac{\cos^2\theta}{\mu_0}\cos^2(\omega t - k\sin\theta y)\,dS\,\vec{e}_x \Rightarrow \Pi_\theta = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2\theta\cos^2(\omega t - k\sin\theta y)$

Ainsi : $\underline{p_\theta = \langle \Pi_\theta \rangle = \varepsilon E_0^2 \cos^2\theta}$ (car : $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ et $\langle\cos^2(\omega t - k\sin\theta y)\rangle = 1/2$)

-29- $\cos\theta = \frac{k_x}{k}$ $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

$\rightarrow 1 = \frac{k_x^2}{k^2} + \frac{k_y^2}{k^2} + \frac{k_z^2}{k^2}$

Toutes les directions étant équiprobables : $\langle\langle \frac{k_x^2}{k^2} \rangle\rangle = \langle\langle \frac{k_y^2}{k^2} \rangle\rangle = \langle\langle \frac{k_z^2}{k^2} \rangle\rangle$ ($\langle\langle\ \rangle\rangle$: moy. spatiale). $\Big\}\ 3\langle\langle \frac{k_x^2}{k^2} \rangle\rangle = 1$

$\Updownarrow$

$3\langle\langle \cos^2\theta \rangle\rangle = 1$

On a donc $\langle\langle \cos^2\theta \rangle\rangle = 1/3$

$\boxed{p = \langle\langle p_\theta \rangle\rangle = \frac{1}{3}\varepsilon E_0^2} \underset{-26-}{\Longrightarrow} \boxed{p = \frac{u}{3}}$

-30- u est indep. de ω ! u ne dépend que de E_0^2 (carré de l'amplitude).
Ainsi : le résultat reste valable en superposant ttes les pulsations !
(les moyennes temporelles éliminent l'influence de ω !)