

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

2006 Mines-Ponts Filère PC SECONDE EPREUVE DE PHYSIQUE

LA MÉTÉOROLOGIE RADAR

PARTIE I: Principe de la télémétrie radar

I.1 Directivité de l'antenne et du faisceau émis

□ 1 - La dimension de l'ouverture est très grande selon Oy , donc la diffraction est négligeable selon Oy : en dehors de l'axe Oy , il n'y a pas de démission. On se place donc dans le plan $y = 0$ (plan Oxy) dans lequel l'onde est émise.

□ 2 - Le déphasage en M entre les ondes provenant de P et O est:

$$\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \text{ avec } \delta = (PM) - (OM) = -(HM) = -x \sin\alpha.$$

L'intensité dans la direction α est alors: $I(\alpha) = I(0)(1 + \cos\varphi)$ d'où:

$$I(\alpha) = I(0) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin\alpha\right) \right).$$

La première annulation est pour $\frac{2\pi}{\lambda} x \sin\alpha_x = \pi$ donc: $\sin\alpha_x = \frac{\lambda}{2x}$ ou α

$$\alpha_x = \text{Arcsin}\left(\frac{\lambda}{2x}\right).$$

La première annulation lorsque les deux sources sont en $P_1(a/2, 0, 0)$ et $P_2(0, 0, 0)$ est donc pour:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{a} \text{ ou } \alpha_1 = \text{Arcsin}\left(\frac{\lambda}{a}\right).$$

La première annulation lorsque les deux sources sont en $P_1(X, 0, 0)$ et $P_2(X-a/2, 0, 0)$ est aussi pour:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{a} \text{ ou } \alpha_1 = \text{Arcsin}\left(\frac{\lambda}{a}\right).$$

D'après le principe de Huygens-Fresnel, l'onde en M est la somme des ondes issues des différents points P de la source. La source est ici la superposition de paires $P_1(X, 0, 0)$ et $P_2(X-a/2, 0, 0)$ avec $X \in [0, a/2[$. La superposition des ondes nulles données par chaque paire donne une onde nulle dans la direction α_1 .

□ 3 - Pour chaque demi antenne de largeur $a/2$, le premier minimum est pour $\sin\alpha_2 = \frac{\lambda}{(a/2)} = \frac{2\lambda}{a}$ ou α_2

$$\alpha_2 = \text{Arcsin}\left(\frac{2\lambda}{a}\right). \text{ La superposition des ondes dues aux deux demi antennes est donc nulle pour } \alpha_2.$$

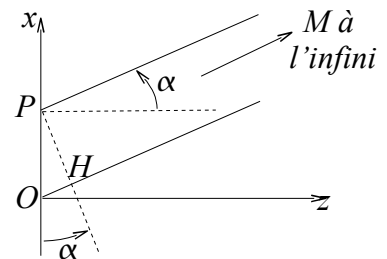
Comme $a \gg \lambda$, $\alpha_1 = \frac{\lambda}{a}$ et $\alpha_2 = \frac{2\lambda}{a}$ correspondent aux zéros de l'intensité. Comme ils sont proches, le

maximum entre les deux est pratiquement le milieu, donc pour $\beta_1 = \frac{3\lambda}{2a} = \text{Arcsin}\left(\frac{3\lambda}{2a}\right)$.

L'antenne (virtuelle) qui donnerait une première annulation pour β_1 aurait pour largeur a' telle que: $\beta_1 = \frac{\lambda}{a'}$,

donc $a' = \frac{2}{3} a$. On décompose alors l'antenne de largeur a en deux antennes: l'une de largeur $a' = \frac{2}{3} a$

donnant une contribution nulle dans la direction β_1 et une de largeur $\frac{1}{3} a$ donnant l'intensité totale dans la direction β_1 .



Cette antenne de largeur $\frac{1}{3} a$ émet dans un lobe de largeur angulaire $2 \alpha'_1 = 2 \frac{\lambda}{a/3} = \frac{6\lambda}{a} \gg \beta_1$. Donc dans la direction β_1 l'amplitude est pratiquement maximale et est proportionnelle à la largeur de l'antenne (principe de Huygens-Fresnel), l'intensité est alors proportionnelle au carré de la largeur: $I(\beta_1) = \left(\frac{a/3}{a}\right)^2 I(0)$, donc:

$$I(\beta_1) = \frac{1}{9} I(0).$$

□ 4 - Les indices proposés ne sont pas cohérents avec le début du texte: pour deux antennes ($2m = 2$ donc $m = 1$), le minimum est noté α_2 . Je propose de découper en m antennes.

On découpe l'antenne de largeur a en m sous-antennes chacune de largeur $\frac{a}{m}$. Chaque sous-antenne (donc aussi l'antenne entière) donne un minimum nul dans la direction $\alpha_m = m \frac{\lambda}{a}$.

Entre les deux zéros $\alpha_m = m \frac{\lambda}{a}$ et $\alpha_{m+1} = (m+1) \frac{\lambda}{a}$ existe un maximum approximativement au milieu donc en $\beta_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{a}$.

Une antenne (virtuelle) de dimension a_m découpée en m sous-antennes chacune de dimension $\frac{a_m}{m}$ donne un m -ième minimum nul dans la direction β_m si $m \frac{\lambda}{a_m} = \beta_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{a}$, donc $a_m = \frac{m}{m + \frac{1}{2}} a$. L'antenne de

dimension a peut donc se décomposer en m sous-antennes chacune de dimension $\frac{a_m}{m} = \frac{a}{m + \frac{1}{2}}$ donnant une

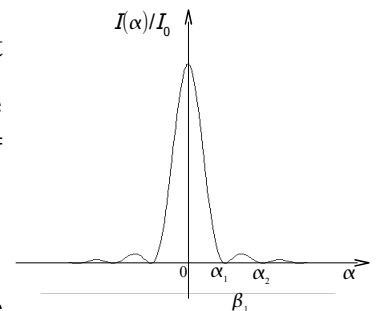
contribution nulle dans la direction β_m et d'une antenne de dimension $a - a_m = \frac{a}{2m+1}$ donnant l'intensité totale

dans la direction β_m . Cette antenne de largeur $\frac{a}{2m+1}$ émet dans un lobe de largeur angulaire

$2 \frac{\lambda}{a/(2m+1)} = \frac{2(2m+1)\lambda}{a} \gg \beta_m$. Donc dans la direction β_m l'amplitude est pratiquement maximale et est proportionnelle à la largeur de l'antenne (principe de Huygens-Fresnel), l'intensité est alors proportionnelle au carré de la largeur: $I(\beta_1) = \left(\frac{a/(2m+1)}{a}\right)^2 I(0)$, donc: $I(\beta_m) = \frac{1}{(2m+1)^2} I(0)$.

L'allure est donnée ci-contre:

La formule donnée par les radaristes (qu'on trouve en calculant l'amplitude



complexe avec le principe de Huygens-Fresnel: $A(\alpha) = A(0) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(j\varphi(\alpha))$ puis $I(\alpha) = KA(\alpha)$

$A^*(\alpha)$ donne les zéros pour les mêmes valeurs α_m , donc des maximums pour les mêmes β_m . Mais les valeurs de $I(\alpha)$ sont différentes pour les β_m : on trouve un coefficient $(1/\pi)^2$ en plus.

Comme les énergies émises dans les lobes secondaires, tertiaires,... sont petites, on peut les négliger et supposer que l'énergie est émise seulement dans le lobe principal. On cherche α' tel que $I(\alpha') \leq I(0)/2$, ce qui donne avec

la formule des radaristes: $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \alpha'}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}$. En résolvant à la calculatrice, on trouve $\alpha' \approx 1,4$, ce qui donne

l'ouverture angulaire $\Delta\alpha \approx 2 \alpha' = 2 \frac{1,4 \lambda}{\pi a}$ d'où: $\Delta\alpha \approx \frac{\lambda}{a}$.

□ 5- Pour $\lambda = 3$ cm et $a = 4$ m, on obtient $\Delta\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3}$ rad. Les points illuminés à la distance $R = 10$ km sont

donc dans un cercle de rayon $r = R \Delta\alpha = 23$ m: ils sont définis par $\sqrt{x^2 + y^2} \leq r$.

I.2 Puissance reçue

$$\square 6 - S = 2 \pi R^2 (1 - \cos(\Delta\alpha)) \approx \pi R^2 (\Delta\alpha)^2 = \pi R^2 \left(0,61 \frac{\lambda}{a}\right)^2.$$

$\square 7 - P_{\text{emis}}$ est certainement la puissance totale rayonnée par l'antenne (pas seulement à un mètre).

La puissance reçue par la cible d'aire s est: $P_{\text{reçue}} = P_{\text{emis}} \frac{s}{S(R)}$.

$$\text{Donc: } \frac{P_{\text{reçue}}}{P_{\text{emis}}} = \frac{s}{\pi R^2 \left(0,61 \frac{\lambda}{a}\right)^2} = \frac{100}{\pi \cdot 10^8 \cdot \left(0,61 \frac{3 \cdot 10^{-2}}{4}\right)^2} = 1,5 \cdot 10^{-2} = 1,5 \%$$

La puissance reçue par l'antenne est alors: $P' = P_{\text{reçue}} \frac{\pi a^2 / 4}{2 \pi R^2 (1 - \cos \pi)} = P_{\text{emis}} \frac{s a^4}{16 \pi (0,61)^2 R^4 \lambda^2}$

$\square 8 - P'$ se met sous la forme souhaitée avec $K = \frac{1}{16 \pi (0,61)^2} = 5,35 \cdot 10^{-2}$.

$$P' > P'_{\text{min}} \text{ donne } R < R_{\text{max}} \text{ avec } R_{\text{max}} = a \left(\frac{s K P_{\text{emis}}}{\lambda^2 P'_{\text{min}}} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

$$\text{A.N.: } R_{\text{max}} = 4 \left(\frac{100 \cdot 5,35 \cdot 10^{-2} \cdot 50 \cdot 10^3}{0,03^2 \cdot 10^{-9}} \right)^{\frac{1}{4}} = 9,3 \cdot 10^4 \text{ m} = 93 \text{ km}.$$

On peut augmenter la portée c'est-à-dire R_{max} en augmentant a , éventuellement en diminuant la longueur d'onde ou en augmentant P_{emis} mais c'est moins efficace car ils interviennent à la puissance $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$.

En pratique, la portée est plus faible à cause de l'absorption du milieu traversé (atmosphère). (autres raisons ?)

I.3 Étude des échos

$\square 9 -$ L'onde met $\Delta t = 2 R / c$ pour faire l'aller-retour, on voit donc l'onde de retour (écho) avec ce décalage temporel.

Si $T_R < \Delta t$, on ne mesure plus Δt mais $\Delta t - n T_R$ avec n un entier inconnu.

Pour avoir l'aller et le retour dans la même période, il faut donc $T_R > 2 R / c$ et donc $f_R < c / (2R)$. En prenant $R = R_{\text{max}} = 93$ km, on trouve $f_R < 3,2$ kHz, cohérent avec 1 kHz donné par l'énoncé: cette valeur est donc judicieusement choisie pour mesurer correctement Δt .

$\square 10 -$ Les deux échos ont un décalage temporel $2 \Delta R / c$. Ils ne se superposent pas si $\tau < 2 \Delta R / c$, donc si $\Delta R > (\Delta R)_{\text{min}}$ avec $(\Delta R)_{\text{min}} = c \tau / 2$.

Dans la suite on note ΔR cette valeur.

$\square 11 -$ La largeur angulaire du faisceau est $\Delta\alpha$ (Cf. 4). Les échos sont séparés si $\psi > \Delta\alpha$, donc $\psi_{\text{min}} = \Delta\alpha$. Dans la suite, on note ψ cette valeur.

$\square 12 -$ Le volume dans lequel les deux cibles ne sont pas séparables a pour dimensions ΔR dans l'axe, $R \psi = R \Delta\alpha$ dans les deux directions perpendiculaires (azimutales), d'où un volume $V = R^2 (\Delta\alpha)^2 \Delta R$.

Avec $\Delta R = c \tau / 2$ et $\Delta\alpha = 0,61 \lambda / a$, on obtient: pour $R = 1$ km: $V = 1,9 \cdot 10^6 \text{ m}^3 = 1,9 \text{ (hm)}^3$
pour $R = 10$ km: $V = 1,9 \cdot 10^8 \text{ m}^3 = 0,19 \text{ (km)}^3$.

La résolution radiale est $\Delta R = c \tau / 2 = (3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6}) / 2 = 300$ m dans les deux cas.

La résolution azimutale est $R \Delta\alpha = 460$ m pour $R = 1$ km et 4,6 km pour $R = 10$ km.

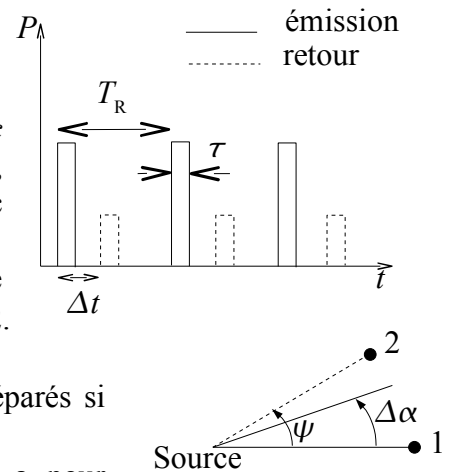
Conclusion: La résolution radiale est indépendante de R , mais la résolution azimutale est proportionnelle à R .

Pour $R = 1$ km, le système semble adapté à l'étude de nuages (de dimensions supérieures à 460 m tout de même), pour $R = 10$ km, le système ne semble pas adapté.

I.4 Cible mobile et effet Doppler

$\square 13 -$ Première étape: fréquence reçue par C .

O (l'émetteur) envoie le premier maximum à $t = 0$ lorsque C (la cible) est en $x_0 = d$. C le reçoit à la date t_1 et se trouve alors en $x_1 = d + v t_1$. x_1 est aussi la distance parcourue par l'onde pendant t_1 : $c t_1 = x_1 = d + v t_1$, donc:



$$t_1 = \frac{d}{c-v}.$$

O envoie le deuxième maximum à $t = T_0 = \frac{1}{f_0}$. C le reçoit à la date t_2 et se trouve alors en $x_2 = d + v t_2$. x_2 est

aussi la distance parcourue par l'onde pendant $t_2 - T_0$: $c(T_0 - t_2) = x_2 = d + v t_2$, donc: $t_2 = \frac{d}{c-v} + \frac{cT_0}{c-v}$.

La période vue par C est donc: $T_0' = t_2 - t_1 = \frac{T_0}{1 - \frac{v}{c}}$, donc une fréquence $f_0' = \frac{1}{T_0'} = f_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$.

Deuxième étape: C envoie une onde de fréquence f_0' , O la reçoit à la fréquence f_r .

C envoie un premier maximum à la date $t' = 0$ lorsqu'il est en $x = d'$. O le reçoit à la date t_1' telle que $c t_1' = d'$.

C envoie un deuxième maximum à la date $t' = T_0'$ lorsqu'il est en $x = d' + v T_0'$. O le reçoit à la date t_2' telle que $c(t_2' - T_0') = d' + v T_0'$.

La période vue par O est donc $T_r = t_2' - t_1' = T_0' \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ et donc une fréquence $f_r = \frac{f_0'}{1 + \frac{v}{c}} = f_0 \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}$.

Au premier ordre en $\frac{v}{c}$, on obtient bien: $f_r = f_0 \left(1 - 2\frac{v}{c}\right)$.

A.N.: $f_D = f_0 - f_r = f_0 \cdot 2 \cdot \frac{v}{c} = 1,3 \text{ kHz}$.

On peut facilement mesurer f_D . En multipliant le signal émis à f_0 par le signal reçu à f_r , on obtient deux composantes, l'une à f_D (battement), l'autre à $2f_0 - f_D \gg f_D$. Un filtre passe-bas permet de récupérer seulement le premier et de déduire ensuite v .

PARTIE II: Trajet du faisceau électromagnétique

□ 14 - La première loi de Snell-Descartes (le rayon réfracté est dans le plan d'incidence) montre que le rayon reste dans le plan OYZ . La deuxième loi de Descartes donne: $c \sin \theta = n_q \sin(\pi/2 - \theta_q) = n_q \cos(\theta_q) = n_1 \cos(\theta)$.

Remarquons que sur la figure 5, les indices devraient être décalés vers le bas, de façon que le rayon de départ soit dans un milieu d'indice n_1 .

□ 15 - $n(H) \cos \theta_H = n(0) \cos \theta$, donc: $\cos \theta_H = \frac{n(0)}{n(H)} \cos \theta = \frac{1}{1 + 0,289 \cdot 10^{-3} \exp(-0,136 \cdot 10)} \cos(10^\circ) = 0,9847$, et donc $\theta_H = 10,034^\circ$.

θ_Y est donné par deux relations: $\tan \theta_Y = \frac{dY}{dZ}$ et $n(Y) \cos \theta_Y = \cos \theta$.

Donc $Z = \int_0^H \frac{dY}{\tan \theta_Y} = \int_0^H \sqrt{\frac{n(Y)^2}{\cos^2 \theta} - 1} dY$.

□ 16 - Dans le schéma ci-contre, nous avons: $OH = OI_q \sin i_q = OI_{q+1} \sin \alpha$.

La loi de Snell-Descartes donne $n_q \sin \alpha = n_{q+1} \sin i_{q+1}$.

Ces deux relations conduisent à la loi de Bouguer: $n_q r_q \sin i_q = n_{q+1} r_{q+1} \sin i_{q+1}$.

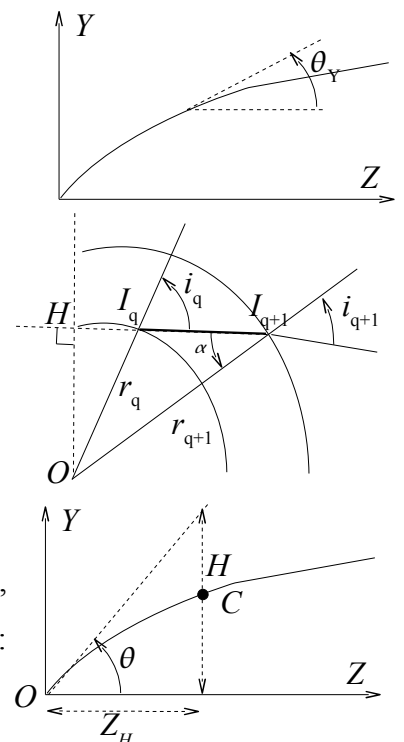
En appliquant cette loi entre l'antenne et l'altitude H , on obtient:

$$\cos \theta'_H = \frac{R_T}{R_T + H} \frac{n(0)}{n(H)} \cos \theta = \frac{6400}{6410} \frac{1}{1 + 0,289 \cdot 10^{-3} \exp(-0,136 \cdot 10)} \cos(10^\circ)$$

$\cos \theta'_H = 0,9831$, et donc $\theta'_H = 10,517^\circ$. La rotondité de la Terre a fait augmenter l'angle θ_H d'environ 5 %.

Dans la formule donnée, résultant d'un calcul plus poussé:

- le terme $\frac{n(H) - n(0)}{n(H)}$ rend compte de la variation d'indice avec l'altitude. Ici, ce terme est positif, donc Z_H est plus petit que pour l'atmosphère uniforme: dans ce cas, le radar peut éclairer des objets plus éloignés.
- le terme $\frac{H}{R_T}$ rend compte de la rotondité de la Terre (si $R_T \rightarrow \infty$, ce terme



tend vers 0). Ce terme augmente si R_T diminue, donc Z_H est plus petit pour un rayon plus petit: dans ce cas aussi, le radar peut éclairer des objets plus éloignés.

- Si $\frac{n(H)-n(0)}{n(H)} + \frac{H}{R_T} = 0$, les deux effets se compensent et $Z_H = \frac{H}{\tan \theta}$, comme si l'indice était uniforme et la Terre plate.

On parle de « radar transhorizon » car il peut éclairer des objets plus loin que son horizon: c'est un effet de mirage.

PARTIE III: Détection de formations pluvieuses

III.1 Précipitation pluvieuse

□ 17 - Le nombre de Reynolds étant inférieur à 1, l'écoulement est laminaire et la force de traînée est donnée par la formule de Stokes: $\mathbf{F} = -6 \pi b \eta \mathbf{v}$ (un correctif a été donné en même temps que le sujet).

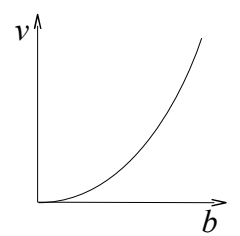
Le principe fondamental de la dynamique s'écrit: $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{g} - 6 \pi b \eta \mathbf{v} + \boldsymbol{\pi}_A$ où $\boldsymbol{\pi}_A$ est la poussée d'Archimède avec $\boldsymbol{\pi}_A = -\rho_a \frac{4}{3} \pi b^3 \mathbf{g}$, $m = \rho_0 \frac{4}{3} \pi b^3$. Le rapport des modules de la poussée d'Archimède et du poids vaut $\rho_a / \rho_0 \ll 1$. dans la suite, on néglige $\boldsymbol{\pi}_A$ devant le poids.

Pour la limite ($t \rightarrow \infty$), $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow 0$, donc: $m \mathbf{g} - 6 \pi b \eta \mathbf{v}_{\text{lim}} = \mathbf{0}$, d'où: $\mathbf{v}_{\text{lim}} = \rho_0 \frac{2}{9} \frac{b^2}{\eta} \mathbf{g}$.

A.N.: $v_{\text{lim}} = 10^3 \cdot \frac{2}{9} \frac{(40 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot 9,81 = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$.

Le nombre de Reynolds a pour ordre de grandeur: $R_e = \rho_a \frac{v_{\text{lim}} \cdot 2b}{\eta} = 1,293$.

$\frac{1,7 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-4}} = 9 \cdot 10^{-3} < 1$, l'hypothèse de l'écoulement laminaire est bien justifiée.



La vitesse est proportionnelle au carré du rayon de la goutte.

□ 18 - En $\Delta t = 1 \text{ h}$, les gouttes qui tombent dans la surface S sont celles contenues dans le cylindre de base S et de hauteur $v \Delta t$. Leur nombre est donc: $N S v \Delta t$ et le volume d'eau correspondant est $N S v \Delta t \frac{4}{3} \pi b^3$. Sur la

Terre, ce volume est aussi $Q S$, donc: $Q = N v \Delta t \frac{4}{3} \pi b^3$ (ici, dans le système international, Q est en mètres).

En prenant $v = v_{\text{lim}}$, on obtient: $Q = N \rho_0 \frac{8}{27} \frac{b^5}{\eta} \pi g \Delta t$ (ici, dans le système international, Q est en mètres).

III.2 Absorption et diffusion de la pluie

□ 19 - Le champ est uniforme sur la goutte si la longueur d'onde $\lambda = c/f_0$ est très grande devant le rayon b , d'où: $f_0 \ll c/b$. Ici $f_0 = 10 \text{ Ghz} = 10^{10} \text{ Hz}$ et $c/b > 3 \cdot 10^8 / 40 \cdot 10^{-6} = 7,5 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$. L'hypothèse est vérifiée.

Remarque: la représentation complexe utilisée ici associée à $\cos(\omega t)$ le complexe $\exp(-i \omega t)$, mais on ne le comprend (?) qu'en trouvant le signe de la puissance P cédée aux gouttes d'eau. Le texte aurait dû le préciser.

On suppose de plus que les grandeurs sont complexes avec $\langle f \cdot g \rangle = (\frac{1}{2}) \text{Re}(f \cdot g^*)$ où g^* est le complexe conjugué de g .

La puissance reçue par un dipôle est $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, donc par unité de volume: $N \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = N \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = -i N \omega \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$.

La moyenne temporelle est alors: $\mathbf{P} = -N \omega (\frac{1}{2}) \text{Re}(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^*) = -(\frac{1}{2}) N \omega 4 \pi \epsilon_0 b^3 E_0^2 \text{Re} \left(i \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)$, ce qui

donne: $\mathbf{P} = (\frac{1}{2}) N \omega 4 \pi \epsilon_0 b^3 E_0^2 \frac{\epsilon''}{(\epsilon' + 2)^2 + \epsilon''^2}$ avec $\omega = 2 \pi f_0$.

On trouve donc $\mathbf{P} \propto N b^3 f_0$ b est à la puissance 3 au lieu du 6 annoncé dans le texte (il faut attendre la question 22 pour avoir b^6).

En multipliant par le volume d'un goutte $\frac{4}{3} \pi b^3$, la puissance absorbée par une goutte est bien de la forme $N b^6 f_0$.

□ **20** - Le vecteur de Poynting est $\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$.

En admettant que l'onde se comporte comme une onde plane progressive dans le vide, on trouve $\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{c \mu_0} E^2 \mathbf{u}$. La puissance électromagnétique est le flux du vecteur de Poynting à travers une surface d'aire S , sa moyenne temporelle est donc: $P_0 = \frac{1}{2 c \mu_0} S E_0^2 = (\frac{1}{2}) \epsilon_0 c S E_0^2$.

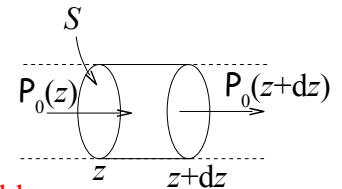
Le texte définit σ_a par $P_0 = P$ pour $S = \sigma_a$: ce n'est pas très cohérent car P_0 est une puissance et P une puissance par unité de volume).

Pour avoir des grandeurs cohérentes, nous allons définir σ_a (pour une seule goutte) par: la puissance électromagnétique traversant σ_a est égale à la puissance absorbée par une goutte, donc: $(\frac{1}{2}) \epsilon_0 c \sigma_a E_0^2 = (\frac{1}{2}) \omega 4 \pi \epsilon_0 b^3 E_0^2 \frac{\epsilon''}{(\epsilon' + 2)^2 + \epsilon''^2}$. Ceci donne: $\sigma_a = \frac{\omega}{c} 4 \pi b^3 \frac{\epsilon''}{(\epsilon' + 2)^2 + \epsilon''^2}$.

La surface d'une goutte est $S_{\text{gouttes}} = 4 \pi b^2$. On a donc: $\frac{\sigma_a}{S_{\text{gouttes}}} = \frac{2 \pi f_0}{c} b \frac{\epsilon''}{(\epsilon' + 2)^2 + \epsilon''^2}$.

Ce rapport augmente si b augmente. En effet σ_a est proportionnel à b^3 alors que S_{gouttes} est proportionnel à b^2 . Pour l'ordre de grandeur, on peut prendre les valeurs numériques données dans les questions suivantes:

$$\frac{\sigma_a}{S_{\text{gouttes}}} = \frac{2 \pi 10^{10}}{3 \cdot 10^8} 40 \cdot 10^{-6} \frac{58}{(29 + 2)^2 + 58^2} \approx 10^{-4} \ll 1 \text{ dans ce cas.}$$



□ **21** - En régime stationnaire, le bilan de puissance entre z et $z + dz$ pour une surface d'aire S est: $P_0(z) = P_0(z+dz) + P_{\text{absorbée}}$.

Avec les notations précédentes, la surface S intervient dans $P_0(z)$. **Il semble préférable d'utiliser la puissance surfacique** (que nous appellerons intensité électromagnétique):

$$I(z) = P_0(z) / S = (\frac{1}{2}) \epsilon_0 c E_0(z)^2.$$

La puissance absorbée entre z et $z + dz$ (contenant $N S dz$ sphères) est $P_{\text{absorbée}} = I(z) \sigma_a N S dz$

Le bilan devient: $I(z) S = I(z+dz) S + I(z) \sigma_a N S dz$, d'où $-\frac{dI}{dz} = N \sigma_a I(z)$ qui s'intègre en

$$\ln \left(\frac{I(z)}{I(0)} \right) = - \sigma_a N z, \text{ ou: } I(z) = I(0) \exp(- \sigma_a N z).$$

Cette relation est bien analogue à la loi de Beer-Lambert, κ (concentration) est remplacé par N (densité volumique de gouttes) et γ par σ_a .

□ **22** - L'onde rayonnée par le dipôle n'est ni plane ni sphérique (à cause du $\sin\theta$). Mais, localement, lorsque r et $\sin\theta$ ne varient pas trop, l'onde se comporte comme une onde plane. Dans ce cas: $\mathbf{B}_d = \frac{1}{c} \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{E}_d$, d'où:

$$\mathbf{B}_d = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4 \pi R c} (2 \pi f_0)^2 p \left(t - \frac{R}{c} \right) \mathbf{u}_\varphi. \text{ Le vecteur de Poynting } \boldsymbol{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_d \wedge \mathbf{B}_d \text{ s'écrit:}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{\sin \theta}{4 \pi R} \right)^2 (2 \pi f_0)^4 p^2 \left(t - \frac{R}{c} \right) \mathbf{u}_r.$$

La puissance traversant une sphère de rayon R est: $P(R) = \iint \boldsymbol{\pi} \cdot d\mathbf{S} \mathbf{u}_r$ avec $dS = R d\theta R \sin\theta d\varphi$, θ variant de 0 à π et φ de 0 à 2π . On obtient: $P(R) = \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{1}{4 \pi} \right)^2 (2 \pi f_0)^4 p^2 \left(t - \frac{R}{c} \right) \frac{8}{3} \pi$ soit:

$$P(R) = \frac{\mu_0}{12 \pi c} (2 \pi f_0)^4 2 p^2 \left(t - \frac{R}{c} \right) \text{ qui est bien sûr indépendant de } R \text{ à cause de la conservation de la puissance.}$$

La moyenne temporelle (**non précisé dans l'énoncé**) $\langle P \rangle = \frac{\mu_0}{12 \pi c} (2 \pi f_0)^4 |p_s|^2$. Ici, c'est le **module de p_s** au lieu de p_s donné dans l'énoncé.

On définit la section efficace de diffusion σ_d (pour une goutte) par: la puissance électromagnétique traversant σ_d est égale à la puissance diffusée par une goutte, donc: $(1/2) \epsilon_0 c \sigma_d E_0^2 = \frac{\mu_0}{12\pi c} (2\pi f_0)^4 |p_s|^2$, ce qui donne:

$$\sigma_d = \frac{2\mu_0}{12\pi c^2 \epsilon_0} (2\pi f_0)^4 |p_s|^2 \text{ puis: } \sigma_d = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 b^6 \frac{(\epsilon' - 2)^2 + \epsilon''^2}{(\epsilon' + 2)^2 + \epsilon''^2}.$$

On voit que σ_d est proportionnel à b^6 .

□ 23 - On obtient $\frac{\sigma_a}{\sigma_d} = \frac{3}{2} \left(\frac{c}{2\pi b f_0}\right)^3 \frac{\epsilon''}{(\epsilon' + 2)^2 + \epsilon''^2}$.

Pour $b_1 = 30 \mu\text{m}$ $\frac{\sigma_a}{\sigma_d} = \frac{3}{2} \left(\frac{3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot 10^9}\right)^3 \frac{58}{(29+2)^2 + 58^2} = 8,1 \cdot 10^7$.

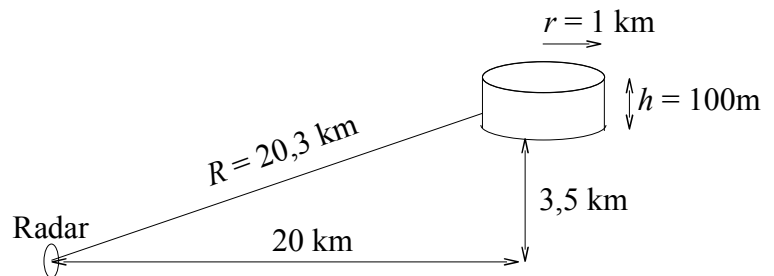
Pour $b_2 = 3 \mu\text{m}$ $\frac{\sigma_a}{\sigma_d} = \frac{3}{2} \left(\frac{3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^9}\right)^3 \frac{58}{(29+2)^2 + 58^2} = 8,1 \cdot 10^4$.

Dans les deux cas, la diffusion est beaucoup plus faible que l'absorption.

Comme $\frac{\sigma_a}{\sigma_d}$ est proportionnel à b^{-3} , lorsque la taille des gouttes augmente, la diffusion augmente plus que l'absorption.

□ 24 - L'énoncé n'est pas encore très clair: pourquoi ce volume unité ?

L'onde envoyée par le radar (supposée uniforme dans tout l'espace, ce qui n'est pas le cas) rencontre le nuage sur une surface $h \ 2r$. La proportion interceptée est donc: $\frac{h \ 2r}{4\pi R^2}$, donc $4 \cdot 10^{-5}$.



La proportion diffusée est (?) $\frac{\sigma_d}{\pi b^2}$.

La proportion rétrodiffusée vers l'antenne de rayon a est $\frac{\pi a^2/4}{4\pi R^2} = 2,4 \cdot 10^{-9}$.

La largeur temporelle de l'impulsion reçue dépendra de la largeur r du nuage (elle vaut $2r/c$). La proportion de la puissance qui revient à l'antenne dépend de R , de σ_d dépendant lui-même de b .

Plus il y a de gouttes, plus la puissance diffusée augmente.

On obtient donc des indications sur Q , b , N , r , R , mais elles sont liées.

PARTIE IV: Détermination de la vitesse de la cible

□ 25 - Les résultats de la question 13 ne font pas intervenir l'angle θ . On a mesuré la vitesse radiale, qui est ici $v \sin\theta$. On remplace donc v par $v \sin\theta$. Au premier ordre en v/c , on obtient: $f_r = f_0 \left(1 - 2 \frac{v}{c} \sin\theta\right)$.

A.N.: $f_D = f_0 - f_r = f_0 \cdot 2 \cdot \frac{v}{c} \sin\theta = 10^{10} \cdot 2 \cdot \frac{0,1}{3 \cdot 10^8} \sin(10^\circ) = 1,2 \text{ Hz}$.

□ 26 - On veut 20 % d'erreur, donc: $\delta = 0,2 \cdot 1,2 = 0,24 \text{ Hz}$.

$v = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donne $f_r - f_0 = \frac{4}{3 \cdot 10^8} \sin(10^\circ) = 23 \text{ Hz}$.

Chaque filtre doit avoir une largeur de 0,24 Hz et l'ensemble doit explorer entre 0 et 23 Hz, il faut donc environ 100 filtres ($23/0,24=96$), ce qui semble beaucoup.

PARTIE V: Radarmétéorologie

□ 27 - La question 26 permet de trouver v . Dans la 24, on a pu mesurer le rayon r du nuage et déterminer des liens entre Q , N , b .

Pour suivre l'évolution, il faut faire tourner le radar dans toutes les directions (horizontalement et verticalement), relever les valeurs, les stocker, les traiter,...