PARTIE I – ONDES ACOUTIQUES DANS UN TUYAU ELASTIQUE

I-1- Ondes acoustiques dans un tuyau rigide

1°) Au premier ordre (Euler linéarisée) (cours) : $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-\partial p}{\partial x}$

2°) Au premier ordre, l'équation de conservation de la masse s'écrit (cours) : $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$

3°) Au premier ordre : $d\rho_1 = \chi_S \rho_0\, dp$ donc 2°) devient : $\frac{\partial u}{\partial x} + \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = 0$; Il suffit de combiner à 1°) en appliquant la relation de Schwartz, pour trouver que p (ou u) vérifie l'équation de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$.

AN pour l'eau de mer : $c = 1{,}35\ 10^3\ m.s^{-1}$.

4°) Pour x<0, en notation complexe : $p = p_e + p_r = p_{oe}\, e^{j\omega t}\,[e^{-jKx} + r\, e^{jKx}]$

On calcule facilement : $|p|^2 = |p_{oe}|^2\,[1 + r^2 + 2r\cos(2Kx)]$

Donc pour r>0 les ventres de p sont situés en x tel que cos(2Kx)=1 donc en $\boxed{x = n\lambda/2}$ [n=0,-1,-2..]

Et pour r<0 les ventres de p sont situés en x tel que cos(2Kx)=-1 donc en $\boxed{x = -\lambda/4 + n\lambda/2}$ [n=0,-1,-2..]

I-2- Ondes acoustiques dans un tuyau élastique

5°) Bilan de masse pendant dt : (masse entrant en x) – (masse sortant en x+dx) = variation de masse dans la section A.dx : $dt\,[\Phi_m(x,t) - \Phi_m(x+dx,t)] = dx.\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}.dt$ donc $\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A u)}{\partial x} = 0$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, il reste : $\rho_0 \frac{\partial A}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 A_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Et : $\frac{\partial A}{\partial t} = D_S A_0 \frac{\partial p}{\partial t}$ d'où : $\frac{\partial u}{\partial x} + (D_S + \chi_S)\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

6°) Il suffit comme au I de combiner (Schwartz) avec $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-\partial p}{\partial x}$ pour obtenir l'équation de d'Alembert pour p (ou u) avec cette fois ci : $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 (D_S + \chi_S)}}}$

La distensibilité diminue la valeur de la célérité de propagation ; pour un fluide incompressible (χ_S nul, ou tout au moins négligeable devant D_S) on obtient $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 D_S}}$.

7°) Il suffit de remplacer D_S par l'expression de l'énoncé pour obtenir (avec χ_S nul, ou tout au moins négligeable devant D_S) : $c^2 = \frac{Eh}{a_0 \rho_0}$.

8°) <u>Acier</u> : $D_S = 5\ 10^{-11}\ Pa^{-1}$ et $c = 1{,}29\ 10^3\ m.s^{-1}$ la distensibilité compte 10 fois moins que la compressibilité
<u>Caoutchouc</u> : $D_S = 5\ 10^{-6}\ Pa^{-1}$ et $c = 13{,}8\ m.s^{-1}$ la compressibilité est négligeable (formule M-K valide)

9°) Au premier ordre le débit volumique vaut $J = A_0.u$. L'équation de couplage du 5°) $\frac{\partial u}{\partial x} + (D_S + \chi_S)\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ s'écrit, en posant $\alpha = t - x/c$: $-1/c\ \frac{dJ}{d\alpha} + A_0(D_S + \chi_S)\frac{dp}{d\alpha} = 0$ qui s'intègre en $-1/c\ J + A_0(D_S + \chi_S)p = 0$ (au repos J=0 quand p=0). D'où : $J = A_0.c.(\frac{1}{c^2 \rho_0})p$. On obtient bien : $\boxed{J(t - x/c) = Y.p(t - x/c)}$ avec $\boxed{Y = \frac{A_0}{c \rho_0}}$

<u>Remarque</u> : pour une onde circulant dans l'autre sens : $\boxed{J(t + x/c) = -Y.p(t + x/c)}$

AN acier : $Y = 2{,}31\ 10^{-10}$ uSI AN caoutchouc : $Y = 2{,}17\ 10^{-8}$ uSI

I-3- Analyse quantitative d'un changement de tuyau

11°) Continuité de p en x=0 f(t)+g(t)=h(t) Continuité de J en x=0 : $Y_1.f(t) + (-Y_1).g(t) = Y_2.h(t)$

On en tire aisément : $\boxed{r = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}}$ Il n'y a pas d'onde réfléchie si $Y_2 = Y_1$.

12°) $P = A.(p.u) = p.(A.u) = p.J = Y.p^2$. Donc : $R = \frac{Y_1.p_r^2}{Y_1.p_i^2} = r^2$ $\boxed{R = r^2}$

AN : pour acier/caoutchouc (ou caoutchouc/acier) on obtient $\boxed{R=0{,}96}$. La puissance est presque totalement réfléchie : il faut donc « tenir ferme » le tuyau d'arrosage.
13°) Le texte indique que (2) et (3) ont même section et même célérité : donc $Y_3=Y_2$; et de plus le texte indique que $J_3=J_2$: donc $p_3=p_2$.
Continuité de p en x=0 : $f(t)+g(t)=h_2(t)=h_3(t)$
Continuité de J en x=0 : $Y_1.f(t) + (-Y_1).g(t)= Y_2.h_2(t)+Y_2.h_3(t)=2Y_2.h_2(t)$.
On en tire facilement : $\boxed{r=\frac{Y_1-2Y_2}{Y_1+2Y_2}}$ et $\frac{h_2}{f}=\frac{h_3}{f}=1+r=\frac{2Y_1}{Y_1+2Y_2}$

I-4- Application à la circulation sanguine

14°) $A=\pi.a^2$ donc $\frac{\delta a}{a}=\frac{\delta A}{2A}=\frac{a_0.\delta P}{2E.h}$ AN : $\frac{\delta a}{a}=1{,}25\ 10^{-2}$ variation relative du rayon de l'artère.

15°) $r=\frac{1-\eta}{1+\eta}$ avec d'après la question 13) $\eta=\frac{2Y_{il}}{Y_{ao}}=(\frac{2A_{il}}{\rho_0 c_{il}})(\frac{\rho_0 c_{ao}}{A_{ao}})$: c'est bien la réponse de l'énoncé.

On peut espérer que dans notre corps $\eta=1$….
16°) Artère saine : $D_{S1}=5\ 10^{-6}\ Pa^{-1}$ et $c_1=13{,}8\ m.s^{-1}$
Artère avec plaque : $D_{S2}=5\ 10^{-8}\ Pa^{-1}$ et $c_2=137\ m.s^{-1}$ $\frac{\delta a}{a}=1{,}25\ 10^{-4}$: l'artère avec plaques est beaucoup moins souple ;
Le rapport Y_2/Y_1 se réduit à c_1/c_2 , de valeur 0,10 ; d'où r=0,82 : il y a malheureusement une forte réflexion, d'où dans le domaine x<0 une onde de pression avec des nœuds et des ventres pour $|p|(x)$; puisque r>0 les ventres de pression sont situés en $x=n.\lambda/2$ (cf 4°). AN : $(\lambda/2)=1{,}38$ m à la fréquence de 5 Hz.
Le graphe de r(x) a même allure que celui de $|p|(x)$.
Cette allure est simple: $|p|(x)$ oscille entre $|p_{oe}|(1+r)$ et $|p_{oe}|(1-r)$: cf 4°).
17°) Pour x>0 on a maintenant : $a_{02}=5$ mm et donc $h_2=2+5=7$ mm. Alors $D_{S2}=7{,}14\ 10^{-9}\ Pa^{-1}$ et $c_2=353\ m.s^{-1}$.
Le rapport Y_2/Y_1 vaut alors $(c_1/4c_2)=9{,}8\ 10^{-3}$ et r=0,98
L'allure du graphe est identique à celui de la question 16°).
18°) Toujours le même travail…$D_{S2}=10^{-8}\ Pa^{-1}$ $c_2=301\ m.s^{-1}$ Le rapport Y_2/Y_1 vaut alors $(4c_1/c_2)=0{,}183$ et r=0,69.

PARTIE II – ONDES DE GRANDES LONGUEURS D'ONDE A LA SURFACE DE L'EAU

19°) On projette sur Oz l'équation d'Euler : $0=\frac{-\partial P}{\partial z}-\rho g$ comme en hydrostatique.

On intègre en notant P_0 la valeur à la surface : $\boxed{P=P_0+\rho g(\varsigma(x,t)-z)}$. En l'absence d'onde : $P_{rep}=P_0-\rho gz$.
Donc : $P=P_{rep}+\rho g\varsigma(x,t)$: on obtient bien une surpression uniforme pour une cote x fixée.

L'accroissement relatif de section est : $\frac{\delta A}{A}=\frac{b.\varsigma}{b.h}=\frac{\varsigma}{h}$ correspondant à un accroissement de pression $\delta P=\rho g\varsigma$

Ce qui en remplaçant dans D_S donne bien : $\boxed{D_S=\frac{1}{\rho gh}}$.

20°) Le fluide étant incompressible, on effectue un bilan de volumes : (comme au 5°) :

$dt\ [(Au)(x,t)-(Au)(x+dx,t)] = d(A.dx) = dx\ (\frac{\partial A}{\partial t})\ dt$ donc : $\frac{\partial (Au)}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}=0$ En négligeant le terme du deuxième ordre, et en remplaçant $\frac{\partial A}{\partial t}$ par $A.D_S.\frac{\partial p}{\partial t}$, il vient $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+D_S\frac{\partial p}{\partial t}=0}$

Projetons aussi Euler sur Ox, en utilisant l'expression encadrée de P(x,z,t) : $\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial \varsigma}{\partial x}=0$, ce qui avec $p=\rho g\varsigma$

Donne enfin : $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0}$

On applique la relation de Sch. Aux 2 dernières équations encadrées, ce qui donne pour p (ou u) une équation de d'Alembert avec une célérité c telle que : $\boxed{c^2=gh}$

De l'équation de couplage : $\frac{\partial u}{\partial x}+D_S\frac{\partial p}{\partial t}=0$, et en posant α=t-x/c : $\frac{dp}{d\alpha}-\frac{1}{cD_S}\ \frac{du}{d\alpha}=0$ qui s'intègre en p=u/(cD_S) (au repos u=0 quand p=0). D'où : J=A_0.u=A_0 cD_S p=A_0c/(ρc^2) p=A_0/(ρc) p.

On obtient bien : $\boxed{J(t-x/c)=Y.p(t-x/c)}$ avec $\boxed{Y=\frac{A_0}{c\rho}}$

21°) De u=cD_Sp et p=ρgς on tire ζ=(h/c) u et donc $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$=(h/c)$\frac{\partial u}{\partial t}$, ce qui pour une onde harmonique donne en amplitude (h/c) ω|u|. On compare alors les ordres de grandeur de la composante verticale et de la composante horizontale de la vitesse : le quotient de $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ par u a pour ordre de grandeur 2πh/λ. L(hypothèse de travail $\boxed{\text{nécessite donc d'avoir } h<<\lambda.}$

22°) Le flux (moyen) d'énergie est Φ=<Au.p>=<J.p>=Y<p^2> et $p^2=(\rho g)^2\zeta^2$=Cte. ζ^2 donc : Φ=Cte.$\frac{A}{\rho c}$.Z^2

donc Φ=Cte.$\frac{b.h}{\sqrt{g.h}}$ Z^2=Cte.b.$h^{1/2}$.Z^2 $\boxed{\text{ce flux est donc constant si Z varie en } b^{-1/2}.h^{-1/4}}$

23°) $\frac{Z'}{Z}=(\frac{h}{h'})^{1/4}$ en supposant l'onde de tsunami plane ! ce qui donne Z'=4,47.Z=13,4 m. Le modèle simpliste proposé ne peut refléter un phénomène aussi complexe, tant au niveau de la déformation source, qu au niveau de la propagation (conditions sur le fond de la mer). Il permet toutefois de comprendre l'augmentation de Z lorsque h diminue.
Le tableau de valeurs fourni correspond bien au domaine h<<λ.
Le tracé de la « longueur d'onde » λ fournie en fonction de la vitesse v fournie donne une bonne loi linéaire (on peut d'ailleurs voir que les valeurs de v sont des AN de la formule $\sqrt{gh}$ avec g=9,8 m.s^{-1}.. sauf pour la dernière qui s'en écarte un peu).
Toutefois que signifie la notion de longueur d'onde ??? On ne précise pas la fréquence, le tsunami est-il une onde harmonique ???
24°) Des données fournies : potentiel Φ des vitesses, condition à la surface,..qui ne servent à rien !
L'expression de la vitesse de phase $v_\varphi=\omega/K$ donnée dans l'énoncé s'obtient aisément.
L'expression de la vitesse de groupe $v_g=d\omega/dK$ donnée dans l'énoncé demande des calculs, sans difficulté, mais assez longs. L'expression donnée est exacte.
25°) Pour Kh<<1 tanh(Kh)=Kh donc $\omega=\sqrt{gh}$ K : <u>le milieu est non dispersif, de vitesse de phase $\sqrt{gh}$.</u>
La vitesse de groupe est identique à la vitesse de phase. Ce domaine correspond à celui du tableau de valeurs (h<<λ)

26°) Pour Kh>>1 tanh(Kh)=1 la relation de dispersion s'écrit : ω^2=gK Le milieu est dispersif avec $v_\varphi=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ et v_g= v_φ/2. Ce calcul du 26°) ne correspond pas au cas du tsunami.

Les écarts entre le modèle simpliste et la réalité ont des causes multiples : source de l'onde complexe, effet du fond variable, réflexion de l'onde sur le fond, sur les côtes, forme des côtes et du fond..etc..
