ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures ; l'usage de la calculatrice est autorisé)

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
Physique I – Filière PC

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 7 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il ne faudra pas hésiter à formuler tout commentaire qui vous semblera pertinent. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : Les vecteurs sont notés en gras : **A** ; vecteur unitaire $\rightarrow$ **â**. Norme de **A** : $\|\mathbf{A}\|$

QUELQUES ASPECTS DE PHÉNOMÈNES INTERVENANT DANS LE FONCTIONNEMENT DU CORPS HUMAIN

Le fonctionnement des organismes vivants met en jeu des phénomènes physiques et biochimiques complexes. L'étude de ces phénomènes a donné naissance à la biophysique. On aborde dans ce problème une modélisation simplifiée de certains phénomènes physiques mis en jeu dans la dynamique du corps humain et dans certaines techniques exploratoires.
Le problème comporte deux parties indépendantes.

Partie I : quelques aspects de la circulation sanguine

Le sang joue un rôle moteur dans le transport de l'oxygène et des nutriments vers les organes du corps et le transport des déchets produits par ces organes vers des organes spécialisés dans le traitement des déchets. Le cœur joue le rôle d'une pompe faisant circuler le sang vers les organes. Le sang arrive en contact avec les organes en passant par des artères, puis des artérioles et finalement des capillaires. Il revient au cœur en partant des capillaires, transitant par les veinules pour aboutir aux veines.

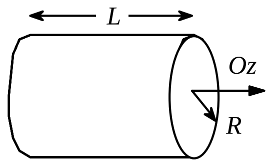
Le sang est un fluide visqueux, considéré comme incompressible. Les notations étant standard (la masse volumique est notée ρ et le coefficient de viscosité dynamique est noté η), l'équation de Navier-Stokes, donnée ci-dessous, est une forme du théorème de la résultante dynamique, appliqué à une particule de fluide :

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\rho(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}=-\mathbf{grad}(p)+\rho\mathbf{g}+\eta\Delta\mathbf{v}\ .$$

Toujours avec les notations standard, voici des relations utiles d'analyse vectorielle, pour des phénomènes à symétrie cylindrique $\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}=0\right)$:

$$\mathbf{grad}(f)=\frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}}\,,\qquad \mathrm{div}(\mathbf{A})=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\,,\qquad \Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

θ **1** – Quelle est votre estimation du volume sanguin d'un adulte ? Définir les termes suivants : particule fluide, fluide incompressible, écoulement incompressible, écoulement laminaire, écoulement turbulent, nombre de Reynolds R_e ; préciser la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent) selon la valeur de R_e, comparée au nombre de Reynolds critique $R_{ec}=2000$.



θ **2** – On modélise l'écoulement (supposé stationnaire) du sang dans un tuyau cylindrique d'axe Oz par un champ de vitesses de la forme $\mathbf{v}=v_z(r,\theta,z)\hat{\mathbf{z}}$. Montrer que le champ des vitesses ne dépend que de la variable r.

θ **3** – On néglige l'effet de la pesanteur. Montrer, à partir de l'équation de Navier-Stokes, que la pression p ne dépend que de z, puis que les équations différentielles vérifiées par les champs de pression et de vitesse sont, respectivement, $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=k$ et $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}v_z(r)}{\mathrm{d}r}\right)=\dfrac{k}{\eta}$, où k est une constante.

θ **4** – Le tuyau cylindrique est rigide, horizontal, de longueur L et de rayon R. Les pressions moyennes aux sections d'entrée et de sortie sont notées $p(0)=p_e$ et $p(L)=p_s$. Exprimer k en fonction de ces données. Déterminer $v_z(r)$ satisfaisant la condition à la limite $v_z(R)=0$.

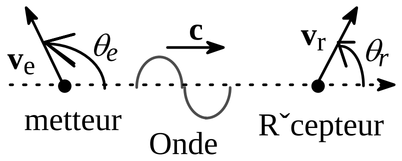
θ **5** – Exprimer le débit volumique Q en fonction de $\Delta p=p_e-p_s$, R, L et η ; en déduire la *loi de Hagen-Poiseuille*, $Q=\dfrac{\Delta p}{R_h}$, en exprimant la résistance hydraulique R_h en fonction de R, L et η. Déterminer par analyse dimensionnelle la dimension de R_h en fonction des symboles $\mathrm{M},\mathrm{L},\mathrm{T}$ ayant respectivement les dimensions d'une masse, d'une longueur et d'un temps.

θ **6** – L'expérience donne la relation $Q=A(p_e-p_s)^n$ où n est un exposant dépendant de l'organe irrigué et A une constante dépendant de facteurs géométriques. Au vu de l'expérience, quelles sont les hypothèses du modèle qui vous semblent les plus critiquables ?

θ **7** – En utilisant la loi de Hagen-Poiseuille, déterminer $\langle v_z\rangle$, vitesse moyenne de l'écoulement du sang dans un capillaire où $\eta=4{,}5.10^{-3}\,\mathrm{Pl}$, $R=10^{-5}\,\mathrm{m}$, $L=10^{-3}\,\mathrm{m}$ et $p_e-p_s=10^3\,\mathrm{Pa}$. La masse volumique du sang étant $\rho=1{,}05.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, déterminer la nature, laminaire ou turbulente, de l'écoulement dans ce capillaire.

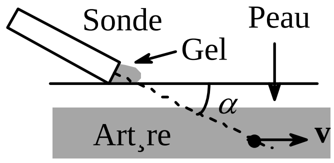
θ **8** – La vitesse moyenne du sang dans une artère où $R=2\,\mathrm{mm}$ et $L=10\mathrm{cm}$ est $v_m=2{,}6\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Calculer le débit volumique et le gradient de pression régnant dans l'artère. Déterminer la nature, laminaire ou turbulente, de l'écoulement dans cette artère.

θ **9** – La connaissance de la vitesse du sang est une aide au diagnostic. La mesure peut se réaliser par vélocimétrie Doppler ultrasonore. Une sonde émet une onde périodique ultraso-



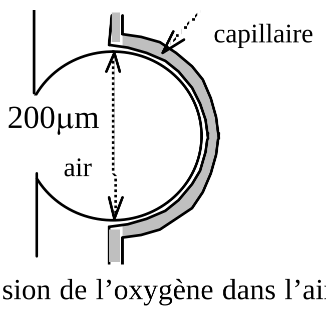
nore de célérité $c \approx 1500\,\mathrm{m.s^{-1}}$ dans le corps et de fréquence $f = 4\mathrm{MHz}$. Un globule rouge, assimilé à une sphère de rayon $r = 10\mu\mathrm{m}$, rétrodiffuse une partie de l'onde qu'il reçoit. Doit-on tenir compte de la diffraction de l'onde ultrasonore par le globule rouge ?

θ **10** – L'effet Doppler consiste en ce que la fréquence f' d'une onde, perçue par un récepteur de vitesse $\mathbf{v}_r$, est différente de la fréquence f de cette onde, émise par un émetteur de vitesse $\mathbf{v}_e$. Admettant la formule $f' = \left[\dfrac{1-\beta_r\cos(\theta_r)}{1-\beta_e\cos(\theta_e)}\right] f$ où $\beta_r = \dfrac{\|\mathbf{v}_r\|}{c}$ et $\beta_e = \dfrac{\|\mathbf{v}_e\|}{c}$ sont constants, calculer la fréquence f' reçue par le globule rouge (la sonde est fixe). La sonde émettrice peut aussi fonctionner en récepteur. Elle réceptionne alors, en provenance du globule rouge (en mouvement), un signal de fréquence f'' ; on mesure $\Delta f = f - f''$. Compte tenu de l'inégalité $\|\mathbf{v}\| << c$, exprimer la vitesse $v = \|\mathbf{v}\|$ du globule rouge en fonction de $\dfrac{\Delta f}{f}$, c et α. Calculer v pour $\Delta f = 3$ kHz et $\alpha = 30°$.



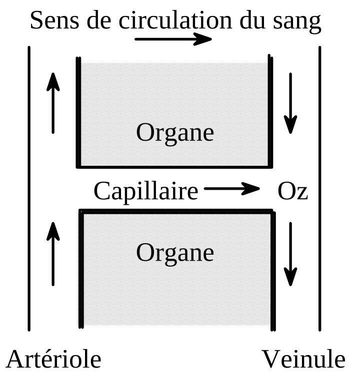
θ **11** –L'écoulement est laminaire, le profil des vitesses est le profil parabolique déterminé à la question 4 et l'on a $0 \le v \le v_{\max}$; préciser les bornes du spectre en fréquence des signaux reçus par la sonde. Pour estimer l'allure de ce spectre, on considère le modèle suivant : l'intensité du signal réémis par un globule rouge est indépendante de la fréquence, et on la note I_0 ; dans une section de cote z, le nombre de globules compris entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ est $\mathrm{d}n = \dfrac{n_0}{\pi R^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r$, où n_0 est une constante. Exprimer alors $\mathrm{d}n$ en fonction de $\mathrm{d}f''$ et en déduire l'allure du spectre.

θ **12** – Les organes ont un besoin régulier en oxygène. Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans un milieu aqueux est $D_{eau} \approx 10^{-9}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. Montrer, par une estimation numérique qualitative, que le transport de l'oxygène vers un organe ne saurait se faire par le seul phénomène de diffusion à travers la peau (on trouvera que la durée de diffusion se mesure, dans ce cas, en années). Par quel mécanisme dominant le sang transporte-t-il l'oxygène ?

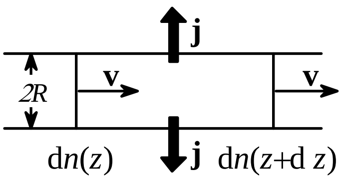


θ **13** – Le sang se charge en oxygène par diffusion de l'oxygène contenu dans les alvéoles du poumon vers le capillaire périphérique de l'alvéole. Les alvéoles sont supposées sphériques (Fig. ci-contre), de rayon $R_{alv} \approx 10^{-4}$ m. Le sang circule dans le capillaire à la vitesse moyenne $v \approx 10^{-3}\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Calculer le temps de contact, δt_s, du sang avec l'alvéole. Le rayon du capillaire est $R_{cap} \approx 10^{-5}$ m. Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans l'air est $D_{air} \approx 1{,}8 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. Estimer le temps de diffusion d'une molécule d'oxygène par ce mécanisme, en convenant que c'est la somme du temps de diffusion dans l'air (alvéole) et du temps de diffusion en milieu aqueux (capillaire). Montrer que l'échange d'air entre l'alvéole et le sang a maintenant le temps de s'établir.

θ **14** – L'alimentation d'un organe en un nutriment transporté par le sang s'effectue par échange entre le sang et l'organe, à travers les parois des capillaires. Ces capillaires sont des



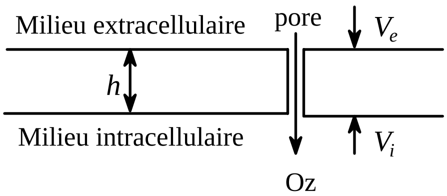
tubes cylindriques de rayon R et de longueur L, joignant une artériole à une veinule. On note $C_c(z)$ la concentration molaire ($\mathrm{mol.m^{-3}}$) d'un nutriment dans le capillaire et $C_{org}(z)$ celle du nutriment dans l'organe à proximité de la surface du capillaire. Le capillaire cède à l'organe le nutriment avec une densité de courant molaire (flux surfacique) $j = \gamma\left(C_c(z) - C_{org}(z)\right)$ où γ est un paramètre constant. Déterminer la dimension de γ. On considère le régime stationnaire ; effectuer le bilan de matière en nutriment, exprimant l'équilibre dynamique des flux entrant et sortant entre les tranches de cotes z et $z + \mathrm{d}z$ et en déduire l'équation vérifiée par $C_c(z)$, en supposant que le sang a une vitesse d'écoulement constante, v_S. Cette équation fait intervenir la fonction $C_{org}(z)$.



θ **15** – On admet ici que $C_{org}(z) = K$, une constante ; déterminer alors $C_c(z)$ en fonction de K, $C_c(0)$ et de la longueur caractéristique $L_0 = \dfrac{Rv}{2\gamma}$. On considère que l'organe est correctement alimenté si $\left|\dfrac{C_c(L) - K}{C_c(0) - K}\right| \geq 30\%$.

Sachant que $v_S = 2{,}8 \times 10^{-3}\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $R = 10^{-5}\,\mathrm{m}$ et $L = 1\,\mathrm{mm}$, déterminer la valeur maximale du coefficient γ pour que la relation précédente soit satisfaite.

Partie II : Quelques aspects des échanges transmembranaires.



La membrane séparant le milieu intracellulaire du milieu extracellulaire d'une cellule présente une épaisseur h de l'ordre de 100 μm. Les milieux intra et extra cellulaires contiennent essentiellement les ions $\mathrm{Na^+}$, $\mathrm{K^+}$ et $\mathrm{Cl^-}$. Au repos, la membrane cellulaire est polarisée ; une valeur représentative du *potentiel de membrane en régime stationnaire* est $V_i - V_e \approx -70\,\mathrm{mV}$. La dépolarisation de la membrane, initiée par un capteur biologique, se propage jusqu'à sa réception par un organe décideur. La propagation de cette dépolarisation est obtenue par une modification de la perméabilité de la membrane à certains ions. Cette perméabilité est due à l'existence de pores, passifs ou actifs, qui sont des canaux sélectifs permettant les échanges d'ions entre la cellule et le milieu extracellulaire.
Les questions 16 à 21 concernent les échanges d'ions à travers la membrane. Les questions 22 à 29 présentent différents modèles rendant compte de l'existence et de la stationnarité du potentiel de membrane.

DIFFUSION SEULE

θ **16** – On modélise la dynamique d'un soluté dans un milieu liquide par les hypothèses suivantes :

- Chaque particule de soluté ne peut avoir que deux vitesses $\mathbf{v}^{\pm} = \pm v\hat{\mathbf{z}}$; la concentration molaire du soluté de vitesse $+v$ est notée $C^{+} = \dfrac{n^{+}}{\Omega}$ (Ω est un volume) ; de la même manière, $C^{-} = \dfrac{n^{-}}{\Omega}$. On note $C = C^{+} + C^{-}$.
- Les concentrations $C^{\pm}$ dépendent du temps t et d'une variable cartésienne de position, z.
- Les molécules de soluté ne sont soumises à aucune interaction extérieure, excepté lors des chocs avec d'autres molécules.
- La probabilité qu'une particule de soluté change d'orientation $(\pm v \to \mp v)$ au cours d'un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ est uniforme, et donnée par $P = \dfrac{\mathrm{d}t}{\tau}$ où τ est la durée moyenne entre deux chocs. Cette probabilité est ici identifiée au quotient du nombre de moles d'une espèce donnée, impliquées par le changement d'orientation par le nombre de telles molécules, avant changement ; de la sorte, si $\mathrm{d}n^{+}$ est le nombre de molécules impliquées par le changement d'orientation $+v \to -v$, alors $P^{+} = \dfrac{\mathrm{d}n^{+}}{n^{+}} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\tau} = P^{-} = \dfrac{\mathrm{d}n^{-}}{n^{-}}$.

En considérant un système ouvert compris entre z et $z + \mathrm{d}z$ et de section constante, établir

$$\frac{\partial C^{+}}{\partial t} = -v\frac{\partial C^{+}}{\partial z} - \frac{C^{+} - C^{-}}{\tau} \quad \text{et} \quad \frac{\partial C^{-}}{\partial t} = v\frac{\partial C^{-}}{\partial z} + \frac{C^{+} - C^{-}}{\tau}.$$

En déduire que l'équation vérifiée par la densité de courant molaire j est $\dfrac{\partial j}{\partial t} = -\left(\dfrac{j - j_F}{\tau'}\right)$, où $j_F = -D\dfrac{\partial C}{\partial z}$. Donner les expressions de D et de τ' en fonction de τ et de v.

θ **17** – L'expérience donne $\tau \approx 10^{-10}\,\mathrm{s}$. Le temps caractéristique d'évolution du courant de diffusion j_F est de l'ordre de la milliseconde ou de la microseconde. Montrer que, l'on est pratiquement en régime quasi permanent, c'est-à-dire que $j \approx -D\dfrac{\partial C}{\partial z}$. Sous quel nom connaissez-vous la loi $j \approx -D\dfrac{\partial C}{\partial z}$?

CONVECTION SEULE

θ **18** – On étudie à présent le mouvement (dans un repère galiléen) des particules chargées, de masse m, de charge q et de concentration molaire C du soluté dans les conditions suivantes : ces molécules sont soumises d'une part à l'action d'un champ électrostatique $\mathbf{E}$, d'autre part à l'action du milieu liquide environnant ; cette dernière est modélisée par la force $\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v}$ où β est un paramètre positif constant. Donner la dimension de β. Déterminer l'équation du mouvement d'une particule chargée dont on négligera le poids.

θ **19** – On observe le mouvement de ces particules sur une échelle de temps très grande devant $\dfrac{m}{\beta}$; montrer que l'on peut définir un vecteur de courant molaire de convection $\mathbf{j} = C\mathbf{v}_\infty$, où $\mathbf{v}_\infty$ est un paramètre dont on donnera une interprétation physique.

DIFFUSION ET CONVECTION

θ **20** – Un milieu liquide initialement homogène, de température T, est formé de molécules d'eau et de particules chargées (de diverses natures) soumises à l'action d'un champ électrostatique $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$, dérivant du potentiel électrostatique V. On raisonnera sur un type donné de particules chargées. Montrer qu'apparaît un flux de particules dont le vecteur densité de courant s'écrit (relation de Nernst) :

$$\mathbf{j} = \left(-D\frac{\partial C}{\partial z} - \frac{q}{\beta}C\frac{dV}{dz}\right)\hat{\mathbf{z}}.$$

Quel est le sens physique de la relation qui s'exprime ici par $\dfrac{\partial j}{\partial z} + \dfrac{\partial C}{\partial t} = 0$?

θ **21** – En utilisant la relation d'Einstein $D = \dfrac{kT}{\beta}$ (k est la constante de Boltzmann), montrer qu'en régime stationnaire la quantité $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z} + C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{qV}{kT}\right)$ est constante.

θ **22** – Le modèle de Boyle-Conway se fonde sur les hypothèses suivantes :

- La membrane est imperméable aux ions sodium.
- Les flux totaux à travers la membrane des ions chlorure et potassium sont nuls en régime stationnaire.
- On néglige les autres ions. Seuls donc sont actifs les ions Na^+, K^+ et Cl^-.
- Chaque espèce d'ions suit, séparément, les lois établies dans les questions 16 à 21.

	Na^+	K^+	Cl^-
extra	150	5,5	125
intra	15	150	9

Le tableau ci-contre donne, pour un régime stationnaire, les concentrations en mol.m^{-3} des ions actifs. Indiquer sur un schéma le sens des flux diffusif et convectif pour les ions K^+ et Cl^- (rappel : $V_i - V_e \approx -70\,\mathrm{mV}$). Déterminer la relation liant les concentrations intracellulaires C_i et extracellulaires C_e pour un ion de charge algébrique q dont le flux total à travers la membrane est nul.

θ **23** – Déterminer la relation liant les quatre grandeurs $C_i(\mathrm{Cl}^-)$, $C_i(\mathrm{K}^+)$, $C_e(\mathrm{Cl}^-)$ et $C_e(\mathrm{K}^+)$ Cette relation est-elle satisfaite par les données expérimentales ? Pour $T = 310K$, et avec $k = 1{,}38\times10^{-23}\,\mathrm{J.K^{-1}}$ et $q = 1{,}6\times10^{-19}C$, calculer le potentiel de membrane $V_i - V_e$, d'abord en utilisant les concentrations de l'ion Cl^-, ensuite en utilisant celles de l'ion K^+.
Remarque : la mesure de $V_i - V_e$ en fonction de $C_e(\mathrm{K}^+)$ montre qu'aux faibles concentrations la relation $V_i - V_e = f\left\{\ln\left[C_i(\mathrm{K}^+)\right] - \ln\left[C_e(\mathrm{K}^+)\right]\right\}$ n'est pas linéaire.

θ **24** – Hodgkin a réalisé l'expérience suivante : on plonge des cellules dans une solution contenant des ions sodium radioactif. Quelques heures après on retire les cellules et on les rince à l'eau pure. L'analyse de ces cellules montre qu'elles sont devenues radioactives. Commenter cette expérience, en relation avec le modèle de Boyle-Conway.

POMPE À SODIUM

θ **25** – Pour expliquer les insuffisances du modèle précédent, Hodgkin et Huxley ont proposé que la membrane est également perméable aux ions sodium. Montrer que cette seule hypothèse reste insuffisante pour expliquer les faits expérimentaux.

θ **26** – On affirme alors l'existence d'un processus développé par la membrane, qui se rajoute aux deux processus déjà existant de diffusion et de convection et qui permet l'apparition couplée d'un flux, dit actif, de sodium, de vecteur densité molaire $\mathbf{j}_a\left(\mathrm{Na}^+\right)$ et d'un flux, dit aussi actif, de potassium de vecteur densité molaire $\mathbf{j}_a\left(\mathrm{K}^+\right)$. C'est ce qu'on nomme la *pompe sodium - potassium*.
Indiquer sur un schéma le sens, en régime permanent, des flux diffusif, convectif et actif des ions sodium. On suppose toujours que le potentiel de membrane vaut $-70\,\mathrm{mV}$.
Justifier, au regard d'un résultat de la question 23, l'hypothèse que, pour l'ion potassium, le flux diffusif soit supérieur au flux convectif ; indiquer alors sur un schéma le sens des flux diffusif, convectif et actif des ions potassium.

θ **27** –Exprimer le vecteur $\mathbf{j}_a\left(Na^+\right)$ en régime stationnaire, en fonction de $C(z)$, concentration en ion sodium dans le pore et $V(z)$ potentiel électrostatique régnant dans le pore. Montrer qu'on peut écrire la relation précédente sous la forme

$$j_a e^{\frac{qV}{kT}} = D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\varphi(z)$$

et donner l'expression de la fonction $\varphi(z)$ en fonction de $C(z), V(z)$, D et $\dfrac{kT}{q}$. En présence de processus actif, la fonction $\varphi(z)$ n'est plus constante.

θ **28** – En supposant le champ électrique transmembranaire E uniforme sur toute la distance h, calculer sa valeur numérique. Rappeler l'expression du vecteur densité de flux de puissance du rayonnement électromagnétique en fonction du champ électrique.
On donne $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ H.m^{-1} et $c = 3\times 10^8$m.s^{-1} (vitesse de la lumière) ; calculer la valeur du champ électrique E_L associé à un laser qui émettrait un rayonnement continu de puissance $P = 1\mathrm{mW}$ uniformément réparti sur une surface équivalente $s = 3\ \mathrm{mm}^2$.

θ **29** – Les concentrations en ion sodium dans les milieux extra et intra cellulaires étant notées respectivement C_i et C_e, on établit la relation approximative

$$j_a = D\frac{q\left|V_i - V_e\right|}{kT}\ \frac{C_e \exp\left[-\dfrac{q}{kT}\left(V_i - V_e\right)\right] - C_i}{1 - \exp\left[-\dfrac{q}{kT}\left(V_i - V_e\right)\right]}.$$

Calculer $\dfrac{q\left(V_i - V_e\right)}{kT}$ pour le sodium ($T = 310K$, $k = 1{,}38\times 10^{-23}$J.K^{-1} et $q = 1{,}6\times 10^{-19}C$).
Sachant que $D = 1{,}4\times 10^{-9}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$, calculer la valeur de la densité de courant actif molaire j_a de l'ion sodium. Comparer cette valeur à une estimation numérique du courant de diffusion de cet ion.

FIN DE L'ÉPREUVE