

Séparation isotopique

Problème A

Séparation par résonance cyclotron ionique

Première partie : mouvement d'un ion dans un champ magnétique uniforme

- 1) Le principe fondamental appliqué à une charge donne : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}_0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = qB_0/m v_y \\ \dot{v}_y = -qB_0/m v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$
- 2) On en déduit : $\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0$ (indépendant du signe de q).
- 3) Les conditions initiales sont : $v_x(0) = v_\perp$; $\dot{v}_x(0) = 0$; $v_y(0) = 0$; $\dot{v}_y(0) = -\varepsilon \omega_c v_\perp$; $v_z(0) = v_{//}$. D'où :
- $$v_x(t) = v_\perp \cos(\omega_c t) \quad ; \quad v_y(t) = -\varepsilon v_\perp \sin(\omega_c t) \quad ; \quad v_z(t) = v_{//} = \text{cste.}$$
- 4) Une nouvelle intégration avec $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0)$ donne :
- $$x(t) = \rho_L \sin(\omega_c t) \quad ; \quad y(t) = \varepsilon \rho_L [\cos(\omega_c t) - 1] \quad ; \quad z(t) = v_{//} t.$$
- 5) Trajectoire hélicoïdale, autour de l'axe parallèle à Oz passant par A(0, $-\varepsilon \rho_L$, 0), parcourue dans le sens indirect autour de Az par une charge positive.
- 6) $\omega_{ce} = 4,41.10^{11} \text{ rad.s}^{-1}$ $\omega_{c1} = 1,03.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ $\omega_{c2} = 1,01.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$
 $\rho_{L1} = 4,25 \text{ }\mu\text{m}$ $\rho_{L2} = 2,78 \text{ mm}$ $\rho_{L2} = 2,80 \text{ mm}$
- Les fréquences cyclotron ioniques correspondent au domaine des ondes hertziennes.

Deuxième partie : la résonance cyclotron ionique

- 7) Le principe fondamental s'écrit : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}_0 + q \vec{E}_0(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = qB_0/m v_y + qE_{0x}(t)/m \\ \dot{v}_y = -qB_0/m v_x + qE_{0y}(t)/m \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$

D'où l'équation différentielle vérifiée par $\underline{w}(t)$: $\dot{\underline{w}} + j\omega_c \underline{w} = -jqE_0 e^{-j\omega t} / m$.

En remarquant qu'on aura une solution particulière sinusoïdale, la solution générale est de la forme :

$$\underline{w}(t) = \underline{A} e^{-j\omega_c t} + \frac{qE_0}{m(\omega - \omega_c)} e^{-j\omega t}$$

On obtient le résultat attendu en déterminant la constante complexe \underline{A} avec les conditions initiales.

- 8) L'intégration temporelle de $\underline{w}(t)$ donne : $r_\perp(t) = j\rho_L e^{-j\omega_c t} + \frac{jqE_0}{m(\omega_c - \omega)} \left[\frac{e^{-j\omega_c t}}{\omega_c} - \frac{e^{-j\omega t}}{\omega} \right]$.

$$\text{Finalement : } \begin{cases} x(t) = \rho_L \sin(\omega_c t) + qE_0 [\sin(\omega_c t)/\omega_c - \sin(\omega t)/\omega] / m(\omega_c - \omega) \\ y(t) = \rho_L \cos(\omega_c t) + qE_0 [\cos(\omega_c t)/\omega_c - \cos(\omega t)/\omega] / m(\omega_c - \omega) \\ z(t) = v_{//} t \end{cases}$$

- 9) En remplaçant la solution proposée dans l'équation différentielle vérifiée par $\underline{w}(t)$, avec $\omega = \omega_c$, on obtient :

$$(\dot{F} - j\omega_c F) e^{-j\omega_c t} + j\omega_c F e^{-j\omega_c t} = -jqE_0 e^{-j\omega_c t} / m \Rightarrow F(t) = -jqE_0 t / m + \underline{B}$$

$$\text{En tenant compte des conditions initiales : } \underline{w}(t) = \left[v_\perp - \frac{jqE_0}{m} t \right] e^{-j\omega_c t}.$$

En projection sur le plan Oxy, on obtiendrait une trajectoire circulaire si le terme entre crochets était constant. Or son module croît au cours du temps, la projection de la trajectoire doit alors être une spirale

croissante. Ceci est confirmé par les allures fournies par l'énoncé. En trois dimensions, se superpose la translation uniforme selon z .

- 10) En ce qui concerne le cas non résonant, la solution générale est la somme d'une réponse à l'excitation sinusoïdale et de la réponse libre non amortie. Cette superposition de deux sinusoïdes de fréquences proches ($\omega = 1,05 \omega_c$) se traduit par des battements de l'amplitude. D'où une trajectoire quasi-circulaire en projection sur le plan Oxy , dont le rayon bat.
- 11) L'excitation des ions, à fréquence égale à celle de leur mouvement cyclotron, se traduit par une croissance de l'amplitude de leur mouvement (résonance). Si le champ n'est pas uniforme, la condition de résonance $\omega = \omega_c$ n'est pas vérifiée à chaque instant, et l'amplitude ne croît pas régulièrement (battements si $\omega \neq \omega_c$). On peut tout de même se permettre un faible écart, car si ω et ω_c sont proches, l'amplitude des battements est importante, ce qui se rapproche du comportement résonant.

- 12) On déduit de $\underline{w}(t)$ les expressions de $v_x(t)$ et $v_y(t)$:
- $$\begin{cases} v_x(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t) - qE_0 t \sin(\omega_c t) / m \\ v_y(t) = -v_{\perp} \sin(\omega_c t) - qE_0 t \cos(\omega_c t) / m \end{cases}$$

Le champ électrique exciteur est colinéaire, de même sens, à la composante de la vitesse qui croît à la résonance. C'est ainsi que s'effectue de façon optimale l'accélération de la charge par la force électrique. Cette configuration s'établit indépendamment de la direction initiale de la vitesse (non contraignant).

- 13) La distance de 2 m selon z est parcourue en : $\tau = 1$ ms. Alors : $qE_0 \tau / m = 2,0 \cdot 10^4 \text{ ms}^{-1}$, valeur 10 fois plus importante que celle trouvée pour v_{\perp} . On estime alors la trajectoire à ce moment quasi-circulaire de rayon : $R = qE_0 \tau / m \omega_c = E_0 \tau / B_0 = 2$ cm.

Troisième partie : principe de la séparation isotopique par résonance

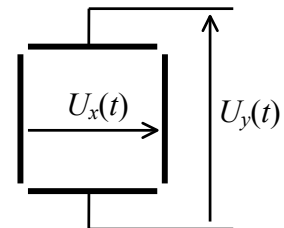
- 14) On calcule qu'un enroulement solénoïdal produit un champ $B_0 = \mu_0 n I_0$. Si les spires sont jointives, le nombre de spires par mètre est $n = 50$. En enroulant un tel solénoïde de 30cm de rayon, sa longueur serait : $L = 244$ m (déraisonnable). Le calcul du champ magnétique néglige les effets de bord, en estimant la zone où l'effet de bord se fait sentir à quelques rayons, $L = 4$ m serait par exemple suffisant. Ceci permet d'effectuer 61 enroulements coaxiaux, d'où $n = 3050$. Finalement, on prévoit : $I_0 = 652$ A.
- 15) Cette intensité ne pourrait être supportée à température ambiante où le matériau présente de l'effet Joule, il fondrait. D'où la nécessité qu'il soit supraconducteur. Dans un conducteur en cuivre, la puissance dégagée serait $P = RI_0^2$, le calcul de la résistance d'un cylindre de longueur ℓ et de section s donnant : $R = \ell / \sigma s$. A.N. : $R = 128 \Omega$ et $P = 54$ MW !!!! (puissance d'une petite centrale thermique).
- 16) Si les effets de bord peuvent être négligés, le champ électrique est uniforme dans un condensateur plan, dirigé de la plaque positive vers la plaque chargée négativement (dans le sens des potentiels décroissants). Pour obtenir le champ électrique voulu, en notant e la distance entre les plaques, il faudrait :

$$U_x(t) = eE_0 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad U_y(t) = eE_0 \cos(\omega t).$$

Le montage proposé fournit :

$$\underline{V}_x = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \underline{V} \quad \text{et} \quad \underline{V}_y = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{V}.$$

Il faudrait que \underline{V}_y soit en avance de $\pi/2$ par rapport à \underline{V}_x . Ceci est réalisé mathématiquement pour ω infinie. En pratique, cela est vérifié pour $\omega \gg 1/RC$ et $\omega \gg R/L$. La pulsation de résonance ionique impose $\omega = 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$. Avec $L = 1$ H, on peut choisir $R = 3 \cdot 10^4 \Omega$ et il faudrait : $C = 1$ nF qui est une valeur usuelle en électronique, mais pas si évidente à atteindre avec de tels condensateurs plans à air ($C = \epsilon_0 S / e$ avec $S \approx e^2$, $e = 1$ m donne $C \approx 0,01$ nF). Un tel montage peut difficilement convenir.



- 17) Phénomène d'induction s'opposant au champ accélérateur (?).
- 18) Effet de peau dans un métal. Il s'oppose, par induction, à l'existence d'un champ variable en son sein.
- 19) Les ions 235, résonants, ont une trajectoire transverse de rayon croissant (quelques cm à la fin), tandis que les ions 238, non résonants, garderont un rayon de quelques mm. Les plaques 1, de potentiel positif, repoussent les ions, et collectent les électrons. Sur la plaque 2 sont recueillis les ions (?).
- 20) Le rayon de sa trajectoire étant plus important en sortie, l'Uranium enrichi en ions 235 est récupéré dans les régions éloignées de l'axe. L'uranium 235 est fissile, alors que l'uranium 238 ne l'est pas, d'où l'utilisation d'uranium enrichi dans l'industrie nucléaire. Le procédé d'enrichissement le plus utilisé est la diffusion gazeuse à travers une membrane ; l'Uranium 235, plus léger, diffuse plus vite, d'où un enrichissement en sortie (le même procédé doit être répété un grand nombre de fois pour obtenir un enrichissement notable).

Problème B

Méthode spectrographique

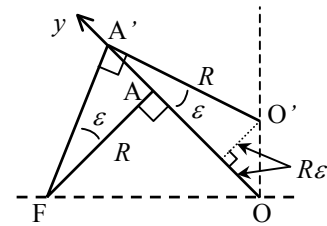
- 21) La force magnétique ne travaillant pas, $v = cste$, et la norme de la force étant constante, le rayon de courbure de la trajectoire l'est également. La trajectoire est plane, circulaire, de rayon R .

$$R = \frac{mv}{qB} \quad \text{et} \quad qU = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}.$$

- 22) A.N. : $v = 202 \text{ km.s}^{-1}$ et $B = 0,98 \text{ T}$.

- 23) Les charges arrivant normalement à Oy ont le centre de leur trajectoire circulaire en O , et $AO = FA = R$ car le triangle OAF est isocèle. Par ailleurs, La configuration proposée donne une trajectoire symétrique pour les charges ayant le centre de courbure de la partie circulaire sur la bissectrice intérieure à (Ox, Oy) .

Pour le deuxième faisceau, le module de la vitesse étant le même, le rayon R de la trajectoire circulaire est le même. Si $\varepsilon \ll 1$, le point de rencontre A' avec Oy est déplacé de $R\varepsilon$. Le centre O' de la portion de cercle se trouve sur la droite $A'O'$, inclinée de ε par rapport à Oy . O' se trouve donc à la distance $R\varepsilon$ de Oy , donc sur la bissectrice intérieure à (Ox, Oy) . Donc la nouvelle trajectoire est aussi symétrique, et ces charges qui proviennent de F sont focalisées en $\Phi_1 = F_1$.



- 24) Selon z , les ions ont une vitesse constante. La longueur de la trajectoire (FF_1) est $L = 2R(1 + \pi/4)$. D'où la longueur parcourue selon z : $v \sin(\varepsilon') [L / v \cos(\varepsilon')] \approx L\varepsilon'$. Finalement : $\ell = R(4 + \pi)\varepsilon'$. A.N. : $\ell = 3,6 \text{ mm}$.

- 25) Une masse différente donne un rayon R' différent ; le centre du cercle est alors décalé de $R' - R$ sur Oy et le quart de cercle ne peut être effectué à l'arrivée sur Ox . Au premier ordre, les ions arrivent alors décalés de $R' - R$ sur Ox , avec un angle $(R' - R) / R'$ par rapport à la normale à Ox .

$$R' - R \approx R \frac{\Delta m}{2m_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{R' - R}{R'} \approx \frac{\Delta m}{2m_1} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx (R' - R) + R \frac{R' - R}{R'} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx R \frac{\Delta m}{m_1}.$$

- 26) On en déduit : $s = 2\varphi = 12,7 \text{ mm}$.

- 27) Une telle intensité durant 1 an correspond à $9,8.10^{23}$ ions, donc 2,7 grammes d'uranium 235.

Cette technique présente l'avantage d'être statique, il n'y a pas à exciter le faisceau avec un champ électrique variable ; le dispositif expérimental devrait donc être moins lourd que celui envisagé dans le premier problème. Par contre, il nécessite l'utilisation d'un faisceau d'ion de très faible dimension transversale (en F) pour effectuer la focalisation, alors que la résonance cyclotron ionique n'impose pas, dans son principe, une telle limitation. Ce doit être pour cette raison que l'intensité est limitée, d'où une production annuelle d'uranium enrichi plus faible qu'avec la première méthode.

- 28) Les fentes étant en place, il s'agit de régler la différence de potentiel accélératrice, et l'axe du faisceau incident, de manière à avoir le centre de courbure en O et donc focalisation en F_1 .

FIN