CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Physique-Modélisation PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est autorisé.

AVERTISSEMENT

Le candidat devra porter l'ensemble de ses réponses sur le cahier réponses, à l'exclusion de toute autre copie. Les résultats doivent être reportés dans les cadres prévus à cet effet.

Remarques préliminaires

- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
- Les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés.
- Plusieurs questions demandent une explication qualitative. Il est attendu des réponses claires et concises (moins de 10 lignes).
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).
- Tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet de fournir des informations et d'aider à la compréhension du problème mais ne contiennent pas de questions.

Remarques pour les questions de programmation

- Toutes les questions d'informatique comportent une mention du type « Écrire en langage Python. . . ». Les codes doivent être écrits en langage Python.
- On se limitera aux types suivant : entiers, flottants, chaines de caractères, listes, tableaux (`array` du module `numpy`) et tuples.
- On se limitera aux mots clés suivants : `if`, `elif`, `else`, `while`, `for`, `in`, `def`, `return`, `and`, `or`, `not`, `True`, `False`, `import`, `from`, `as` et `None`.
- On se limitera aux fonctions et méthodes de la bibliothèque standard suivante : `print`, `plot`, `range`, `enumerate`, `len` et `append`.
- **Les codes ne respectant pas les consignes précédentes ne seront pas comptabilisés.**

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Rappel sur la notation complexe

Dans tout le sujet, on associe à une grandeur sinusoïdale $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ la grandeur complexe $\underline{V}(t) = \underline{V_0} e^{j\omega t}$ avec $\underline{V_0} = V_0 e^{j\phi}$ (où $j^2 = -1$) et telle que $V(t) = \mathrm{Re}(\underline{V}(t))$, où Re est la partie réelle.

Données

— distance Terre-Soleil : $d_{ST} = 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
— rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
— rayon du Soleil : $R_S = 7{,}0 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
— masse du Soleil : $m_S = 2{,}0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
— constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}7 \times 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}}$
— constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}0 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
— masse d'un proton H^+ : $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
— masse d'un électron e^- : $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
— charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
— constante des gaz parfaits : $R = 8{,}3\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$
— constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}4 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
— vitesse de lumière dans le vide : $c = 3{,}0 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
— permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$
— perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$

Ce problème constitué de deux parties indépendantes s'intéresse à la production et à l'acheminement de l'énergie électrique produite par une centrale photovoltaïque. La première partie étudie l'origine de l'énergie photovoltaïque, le Soleil, ainsi que la puissance électrique fournie par une cellule photovoltaïque. La deuxième partie étudie l'acheminement de l'énergie électrique jusqu'à l'utilisateur. Les sous-parties sont pour la plupart indépendantes les unes des autres.

PREMIÈRE PARTIE
Étude du Soleil et de son rayonnement

A/ Approche descriptive du rayonnement du Soleil

Document 1 – Le rayonnement d'équilibre thermique

D'après Wikipédia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Corps_noir

Le **corps noir** est un objet idéal qui absorbe toute l'énergie électromagnétique qu'il reçoit, sans en réfléchir ni en transmettre.

En l'absence d'énergie électromagnétique extérieure, un corps noir à la température d'équilibre T émet un flux surfacique d'énergie électromagnétique dont la densité spectrale, c'est-à-dire le flux surfacique par unité de longueur d'onde émise, dépend uniquement de la longueur d'onde et de la température.

Le maximum de cette densité spectrale de flux surfacique est donné par la **loi de Wien**

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{T} , \tag{1}$$

avec λ_{max} en mètres et T en kelvins. Cette dernière loi exprime le fait que pour un corps noir, le produit de la température et de la longueur d'onde du pic de la courbe est toujours égal à une constante. Cette loi très simple permet ainsi de connaître la température d'un corps assimilé à un corps noir par la seule position de son maximum.

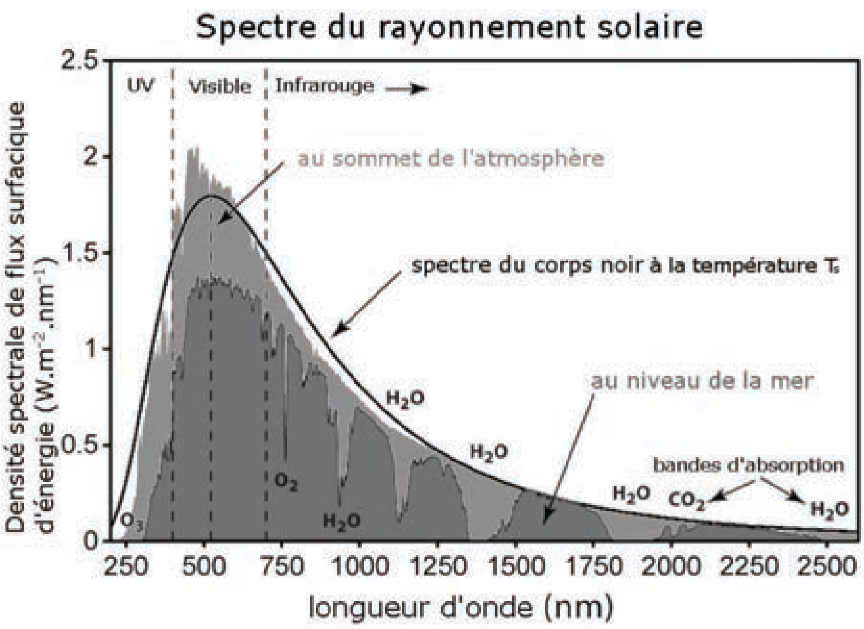
D'après la **loi de Stefan-Boltzmann**, le flux surfacique d'énergie $\phi(T)$ (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$) émis par le corps noir varie en fonction de la température absolue T (exprimée en kelvin) selon la formule

$$\phi(T) = \sigma T^4 , \tag{2}$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann qui vaut environ $5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$.

Document 2 – Le rayonnement solaire

D'après Wikipédia : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Rayonnement_solaire`



On s'intéresse aux caractéristiques du rayonnement solaire (documents 1 et 2). Le candidat peut utiliser les informations des documents afin de répondre aux questions.

Dans cette partie, on assimile le Soleil à un corps noir de rayon R_S.

A1. Estimer la valeur numérique de la température T_S du Soleil assimilé à un corps noir. Le raisonnement devra être explicité.

A2. Exprimer le flux surfacique d'énergie ϕ_S émis par le Soleil en fonction de T_S et de σ. En déduire l'expression de la puissance totale rayonnée par le Soleil $\mathcal{P}_S$ en fonction de T_S, R_S et σ.

La distance Terre-Soleil étant très grande, les rayons solaires peuvent être considérés comme arrivant parallèlement entre eux. Ainsi, la Terre reçoit la même puissance que celle que recevrait un disque de rayon R_T placé perpendiculairement aux rayons solaires incidents.

A3. Exprimer le flux surfacique d'énergie reçu par la Terre ϕ_T en fonction de σ, T_S, R_S et d_{ST} et montrer que la puissance totale reçue par la Terre, notée $\mathcal{P}_T$, s'écrit

$$\mathcal{P}_T = \sigma T_S^4 \pi \frac{R_S^2 R_T^2}{d_{ST}^2} .$$

Faire l'application numérique de ϕ_T.

En réalité, on mesure que la Terre reçoit au niveau du sol un flux surfacique total (intégré sur toutes les longueur d'ondes) d'énergie d'environ $\phi'_T \simeq 900\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

A4. Proposer une explication pour l'écart entre la valeur trouvée à la question précédente pour ϕ_T et celle mesurée de $900\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. On pourra s'aider des documents.

A5. À partir de ϕ'_T, estimer l'énergie reçue en un jour par la Terre. Comparer cette valeur à la consommation journalière de l'humanité valant environ $1{,}7 \times 10^{18}$ J. Commenter la pertinence de développer l'énergie photovoltaïque pour assurer les besoins énergétiques de l'humanité.

B/ Estimation de la température du Soleil

On se propose de retrouver l'ordre de grandeur de la température du Soleil par un modèle thermodynamique.

*Le Soleil est assimilé à une sphère de rayon R_S, de centre O et de masse m_S. La masse volumique est supposée constante et égale à la masse volumique moyenne ρ_S : c'est l'hypothèse notée H_1. On utilisera les coordonnées sphériques (*FIGURE *1).*

B1. Montrer par des considérations d'invariances et de symétries que l'expression du champ de gravitation $\overrightarrow{g_S}(M)$ créé par le Soleil à une distance r de son centre se met sous la forme $\overrightarrow{g_S}(M) = g_S(r)\,\overrightarrow{u_r}$.

B2. Exprimer la masse volumique moyenne ρ_S en fonction de M_S et R_S. Par analogie avec l'électrostatique, utiliser le théorème de Gauss pour déterminer l'expression de $g_S(r)$ lorsque $r < R_S$ en fonction de $\mathcal{G}$, ρ_s et r.

On s'intéresse à un volume mésoscopique du Soleil, centré en un point M situé à la distance r du centre O, dont la vitesse est notée $\vec{v}$ dans le référentiel supposé galiléen héliocentrique et dont la pression est $P(M)$. On néglige la viscosité.

B3. Donner la définition d'un volume mésoscopique. Rappeler sans démonstration l'expression de la force volumique équivalente aux forces de pression. En appliquant la deuxième loi de Newton au volume mésoscopique considéré, retrouver l'équation d'Euler.

Pour simplifier l'étude, le fluide constituant le Soleil est supposé au repos. Ceci constitue l'hypothèse notée H_2.

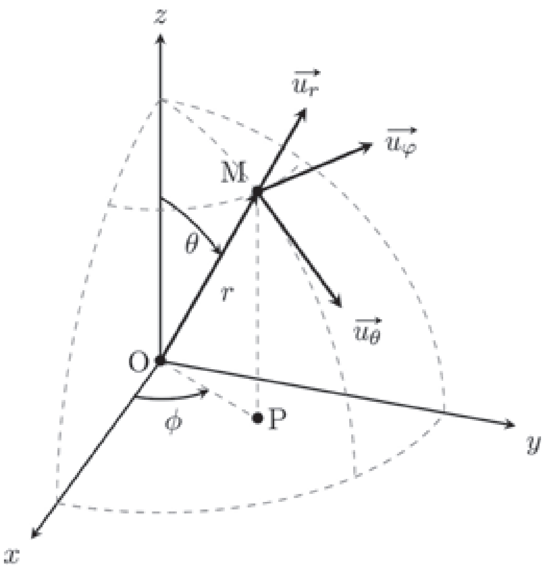


FIGURE 1 – Représentation des coordonnées sphériques. La base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\phi})$ est orthonormée.

B4. Simplifier l'équation d'Euler précédente pour montrer que la loi de la statique des fluides à l'intérieur du Soleil s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) = -\rho_S^2 \mathcal{G} \frac{4}{3} \pi r \overrightarrow{u_r} \,. \tag{3}$$

On note P_O la pression au centre du Soleil. L'expression du gradient en coordonnées sphériques est rappelée

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \overrightarrow{u_\phi} \,. \tag{4}$$

B5. À partir de l'équation (3), déterminer l'expression de $P(r)$ en fonction de P_O, $\mathcal{G}$, r et ρ_S. En supposant que la pression à l'extérieur du Soleil est nulle $P(R_S) = 0$, déterminer l'expression de P_O.

Pour déterminer la température à l'intérieur du Soleil, celui-ci est considéré comme constitué d'un gaz parfait (hypothèse H_3) d'hydrogène totalement ionisé, mélange équimolaire de protons H^+ et d'électrons e^-.

B6. Justifier que la masse molaire moyenne du gaz vaut environ $\mathcal{M} \simeq \frac{1}{2} m_p \mathcal{N}_A$ et effectuer l'application numérique. Quelle est de plus la relation dans ce modèle entre $\mathcal{M}$ et la pression P, la température T, la constante R des gaz parfaits et la masse volumique ρ_S du Soleil ?

Document 3 – La photosphère

D'après Wikipédia : ***https://fr.wikipedia.org/wiki/Soleil***

La photosphère est une des couches externes de l'étoile, dont le rayon externe correspond à la définition du rayon de l'étoile, et qui produit entre autres la lumière visible.

La lumière qui y est produite contient toutes les informations sur la température du rayonnement émis, la gravité de surface et la composition chimique de l'étoile. Pour le Soleil, la photosphère a une profondeur d'environ 400 kilomètres.

B7. Déduire des questions précédentes l'expression de la température dans le Soleil $T(r)$ en fonction de ρ_S, $\mathcal{G}$, r, R_S, R et $\mathcal{M}$. Quelle est la partie la plus chaude de la photosphère ? En considérant que la lumière est produite sur la couche interne de la photosphère, calculer la température à laquelle est émis le rayonnement électromagnétique du Soleil. Comparer à la valeur obtenue dans la partie A.

B8. D'après votre culture scientifique, discuter de la validité des hypothèses H_1 et H_2. Peut-on considérer un gaz de particules chargées comme un gaz parfait ? Discuter de la validité de l'hypothèse H_3. Que dire du modèle proposé ?

C/ Étude d'une centrale photovoltaïque

On s'intéresse à une centrale de taille comparable à celle de Martillac, près de Bordeaux, permettant d'alimenter en électricité une trentaine d'habitations. Elle est constituée 126 modules de 4 panneaux. Chaque panneau est formé de 9×6 *cellules photovoltaïques, et chaque cellule possède une taille* $16\,\mathrm{cm} \times 16\,\mathrm{cm}$. *Cette centrale produit environ* $100\,\mathrm{kW}$ *dans de bonnes conditions d'éclairement des modules. La caractéristique d'une cellule est donnée sur la figure suivante (*FIGURE *2).*

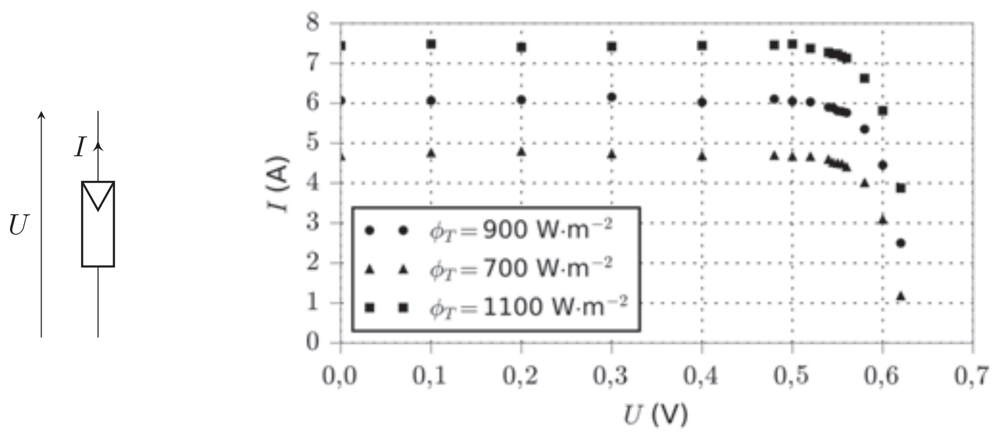


FIGURE 2 – Caractéristique d'une cellule photovoltaïque en convention générateur pour plusieurs valeurs différentes de l'éclairement.

C1. Décrire précisément mais succinctement un protocole expérimental permettant de mesurer la caractéristique d'une cellule photovoltaïque telle que présentée sur la FIGURE 2.

On considère une cellule photovoltaïque recevant un flux $\phi'_T \simeq 900\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. *Les points expérimentaux correspondants sont enregistrés dans un environnement Python dans deux* *objets de type liste :* `Liste_U` *contenant les valeurs des tensions mesurées et* `Liste_I` *les valeurs des intensités correspondantes.*

C2. Écrire une fonction `MaxPuissance` en langage Python prenant en argument `Liste_U` et `Liste_I` et renvoyant la tension U_m et l'intensité I_m correspondant au maximum de la puissance fournie par la cellule photovoltaïque.

Les valeurs trouvées sont $I_m = 5{,}8\,\mathrm{A}$ *et* $U_m = 0{,}55\,\mathrm{V}$. *Les* 9×6 *cellules photovoltaïques d'un panneau sont en série tandis que les 4 panneaux d'un module sont en parallèle.*

C3. Déterminer la tension E aux bornes d'un module, l'intensité I_{mod} traversant ce module et la puissance $\mathcal{P}_{mod}$ délivrée par ce module. Retrouver l'ordre de grandeur de 100 kW délivré par la centrale solaire de Martillac.

C4. D'après vous, en vous appuyant sur le document 4 et en argumentant, quelle est la composition des cellules utilisées dans la centrale de Martillac ?

C5. Quel est l'ordre de grandeur de la puissance délivrée par la centrale lorsque, par temps partiellement nuageux, l'éclairement baisse à $700\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$? Commenter sur l'usage des centrales photovoltaïques.

Document 4 – Les différentes technologies de cellules photovoltaïques

D'après EDF

Différentes technologies entrent aujourd'hui dans la composition des installations photovoltaïques :

— Le silicium cristallin
— Le silicium amorphe
— Le cuivre/indium/sélénium
— Le cuivre/indium/gallium/sélénium

Les panneaux solaires à base de silicium cristallin sont les plus anciens. Ils se décomposent eux-mêmes en deux variantes : le monocristallin et le polycristallin. Ces deux variantes sont aujourd'hui très proches aussi bien en termes de rendement qu'en termes de coût. Le rendement d'un panneau photovoltaïque correspond à la quantité d'énergie solaire transformée par le panneau en électricité consommable, par rapport à l'énergie captée. Le rendement moyen d'un panneau cristallin du marché est de 14,5%.

La souplesse mécanique du silicium amorphe lui permet d'être essentiellement utilisé dans des complexes de type « membrane solaire » ou « tôle solaire ». Le rendement moyen des panneaux solaires à base de silicium amorphe est de 6 à 8%.

Aujourd'hui, des technologies émergent à base de cuivre / indium / sélénium et de cuivre / indium / gallium / sélénium. Elles offrent de grandes perspectives en termes de coût et de rendement.

Tournez la page S.V.P.

DEUXIÈME PARTIE

Transport de l'énergie électrique de la centrale au consommateur

L'énergie produite par une centrale photovoltaïque est dans certains cas directement injectée dans le réseau électrique basse tension pour pouvoir être consommée localement.

Dans toute cette partie, on s'intéresse au transport électrique monophasé de cette énergie, c'est-à-dire utilisant deux câbles électriques, principalement employé pour alimenter les zones peu denses en habitations.

Pour des raisons historiques et techniques, le réseau électrique basse tension fonctionne avec des tensions alternatives. En France, la fréquence utilisée vaut $f_r = 50\,\mathrm{Hz}$ *tandis que la tension efficace sur le réseau considéré est* $U_r = 230\,\mathrm{V}$.

La transformation de la tension continue délivrée par la centrale photovoltaïque en signal électrique transportable sur le réseau est étudiée dans la partie D. Dans la partie E on examine le dimensionnement des câbles utilisés pour le transport de l'énergie sur le réseau. Enfin, la partie F s'intéresse au choix des caractéristiques électriques de la ligne monophasée pour l'adaptation au transport de l'énergie jusqu'aux installations domestiques. Ces trois parties sont indépendantes.

D/ Transformation en courant alternatif grâce à un onduleur

Pour pouvoir consommer l'énergie produite par la centrale, il faut transformer la tension continue $E \simeq 30\,\mathrm{V}$ *supposée constante et délivrée par un module de 4 panneaux (voir la partie C) en tension alternative de fréquence* f_r *et de tension efficace* U_r*. Le principe de cette transformation se décompose en trois étapes, illustrées sur la* FIGURE *3 :*

- *tout d'abord, l'onduleur de tension autonome positionné après les panneaux photovoltaïques de la centrale transforme le signal continu en signal alternatif ;*
- *ensuite, une opération de filtrage est nécessaire pour rendre la tension de sortie de l'onduleur la plus proche possible d'un signal sinusoïdal à* $50\,\mathrm{Hz}$ *;*
- *la dernière étape, qui ne sera pas étudiée ici, consiste à amplifier cette tension pour que sa tension efficace soit de* $230\,\mathrm{V}$.

Pour réaliser la première étape, on étudie un onduleur de tension autonome à commande symétrique dans un premier temps puis à commande décalée dans un second temps.

Pour un onduleur autonome à commande symétrique, les interrupteurs représentés sur la FIGURE *3 s'ouvrent et se ferment en fonction du temps, noté* t*, selon la séquence suivante, avec* $T = 1/f_r$ *et* n *un entier relatif :*

$$\begin{cases} \textit{si} \quad nT \leq t \leq nT + \dfrac{T}{2} & \textit{alors} \quad K_1 \textit{ et } K_3 \textit{ : fermés ;} \quad K_2 \textit{ et } K_4 \textit{ : ouverts,} \\ \textit{si} \quad nT + \dfrac{T}{2} \leq t \leq (n+1)\,T & \textit{alors} \quad K_1 \textit{ et } K_3 \textit{ : ouverts ;} \quad K_2 \textit{ et } K_4 \textit{ : fermés.} \end{cases} \tag{5}$$

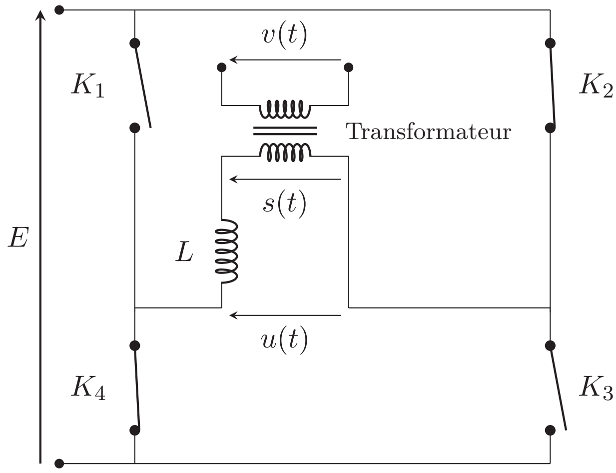


FIGURE 3 – Représentation schématique du circuit électrique, de la centrale au réseau électrique.

D1. Représenter le schéma électrique équivalent de l'onduleur lorsque $nT < t \leq nT + T/2$ et lorsque $nT + T/2 < t \leq (n+1)\,T$. Représenter alors l'allure de la tension $u(t)$ en sortie de l'onduleur. Quelle est la tension efficace U_{eff} de $u(t)$?

Cette tension n'étant pas sinusoïdale, un filtrage est nécessaire. On modélise de manière très simple le transformateur par une résistance R et une inductance négligeable devant L. Le circuit équivalent est représenté sur la FIGURE *4.*

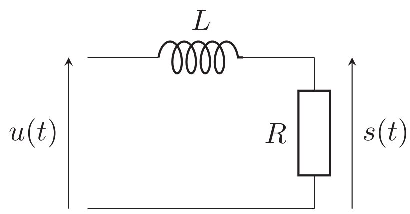


FIGURE 4 – Schéma du filtre équivalent.

Pour étudier l'influence de ce filtre sur chacun des harmoniques de la tension $u(t)$, on étudie le comportement de ce filtre lorsque la tension d'entrée $u(t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence f.

D2. Rappeler l'expression de l'impédance $\underline{Z_L}$ d'une inductance L ainsi que celle, $\underline{Z_R}$, d'une résistance R. En déduire que l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(f) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{u}}$ est

$$\underline{H}(f) = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_0}} \,, \tag{6}$$

où l'expression de f_0 est à déterminer en fonction de R et L.

D3. Quelle est la nature de ce filtre ? Est-il adapté pour filtrer $u(t)$ en un signal sinusoïdal à 50 Hz ? Déterminer le gain $G = |\underline{H}(f)|$ du filtre. Exprimer la fréquence de coupure à -3 dB de ce filtre, notée f_c, en fonction de f_0.

On choisit pour la suite la valeur de L telle que $f_r = f_0$. La tension $u(t)$ peut se décomposer en une série de Fourier selon :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} U_{2p+1} \sin\left[2(2p+1)\pi f_r t\right] \ , \tag{7}$$

avec les amplitudes des harmoniques de rang n valant $U_n = \dfrac{1}{n}$.

D4. En sortie du filtre, quels sont les rangs des harmoniques S_n présents dans le signal $s(t)$? L'amplitude S_3 de l'harmonique de rang trois est-elle négligeable devant celle du fondamental ? Même question avec l'harmonique de rang cinq d'amplitude S_5. Commenter.

Tout en conservant exactement le même filtre avec les mêmes composants, il est possible d'améliorer le filtrage en jouant sur la séquence d'ouverture et de fermeture des interrupteurs. Dans ce cas, l'onduleur est dit à « commande décalée ».

L'ouverture et la fermeture des interrupteurs est commandée à partir de la comparaison du signal du réseau pré-existant $u_r(t) = \sqrt{2}U_r \sin(2\pi f_r t)$ et d'un signal de commande $p(t)$ de forme triangulaire, d'amplitude $\alpha\sqrt{2}U_r$ avec $\alpha = 1{,}10$ et de fréquence $f_p = 400\,\mathrm{Hz}$ représenté sur la FIGURE 5. Le fonctionnement est donné par la séquence suivante :

$$\begin{cases} \text{si} \quad u_r(t) > p(t) & \text{alors} \quad K_1 \text{ : fermé et } K_4 \text{ : ouvert} \\ & \text{sinon} \quad K_1 \text{ : ouvert et } K_4 \text{ : fermé,} \\ \text{si} \quad -u_r(t) > p(t) & \text{alors} \quad K_2 \text{ : fermé et } K_3 \text{ : ouvert} \\ & \text{sinon} \quad K_2 \text{ : ouvert et } K_3 \text{ : fermé.} \end{cases} \tag{8}$$

Il y a donc toujours deux interrupteurs ouverts et deux interrupteurs fermés.

On se propose d'étudier le principe de cet onduleur numériquement en langage python. On commence par définir les deux fonctions $u_r(t)$ et $p(t)$ servant au pilotage des interrupteurs grâce au programme suivant.

```python
from math import sqrt, sin #racine carrée et sinus
fr = 50. #fréquence du réseau en Hertz
T = 1./fr
A = sqrt(2)*230 #amplitude en Volts

def Ur(t):
    return A*sin(2*pi*fr*t)

fp = 400. #fréquence du signal de commande
Tp = 1./fp
alpha = 1.10
Ap = A*alpha

def p(t):
    if t<0:
        return p(-t)
    n = t%Tp
    if 0<=n<=Tp/2:
        return Ap*(4/Tp*n-1)
    else:
        return Ap*(-4/Tp*(n-Tp/2)+1)
```

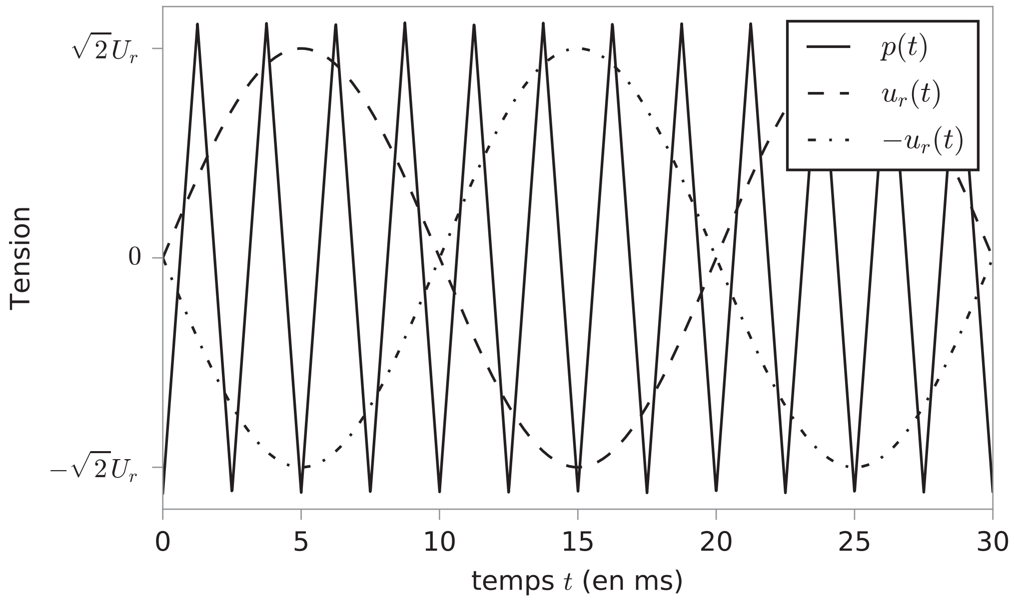


FIGURE 5 – Représentation des fonctions de commande p, u_r et $-u_r$ en fonction du temps pour l'onduleur à commande décalée. Ce graphique est donné à titre indicatif afin d'aider le candidat si besoin.

D5. Commenter et justifier la façon dont a été définie la fonction `p` dans le code ci-dessus.

D6. Dans cette nouvelle séquence, on montre que si K_1 et K_3 sont fermés alors $u(t) = +E$, si K_2 et K_4 sont fermés alors $u(t) = -E$ et $u(t) = 0$ sinon. On associe alors à chaque interrupteur un entier valant 0 si l'interrupteur est ouvert et 1 s'il est fermé. Élaborer une fonction Python nommée `tension` prenant en arguments les quatre valeurs des interrupteurs K_1, K_2, K_3 et K_4 et renvoyant la tension u en sortie de l'onduleur.

D7. Élaborer une fonction Python nommée `onduleur` prenant comme argument un flottant représentant le temps t, temps auquel sont évaluées les conditions d'ouverture de la séquence donnée précédemment à l'équation (8), et renvoyant la valeur de la tension en sortie de l'onduleur à cet instant t.

Pour pouvoir tracer l'allure de la tension $u(t)$, on souhaite définir une liste de $(N + 1)$ valeurs de temps t_k régulièrement espacés compris entre 0 et T_N tous les deux inclus. Pour la suite, on choisit $N = 40\,000$ et $T_N = 20T$, où T est la période du signal du réseau.

D8. Donner les instructions en langage Python pour construire les deux listes à enregistrer dans les variables respectives `Liste_t` et `Liste_u` et contenant respectivement les valeurs des temps t_k et des tensions $u(t_k)$.

D9. Écrire alors en langage Python les commandes permettant de tracer le graphique de $u(t)$ et de se représenter le fonctionnement de l'onduleur comme dans l'exemple page suivante de la FIGURE 6. On ne se souciera ni des légendes ni des axes.

D10. Quelle est la fréquence d'échantillonnage f_e de ce signal ? Justifier qualitativement pourquoi un si grand nombre de points de calcul du signal a été choisi ?

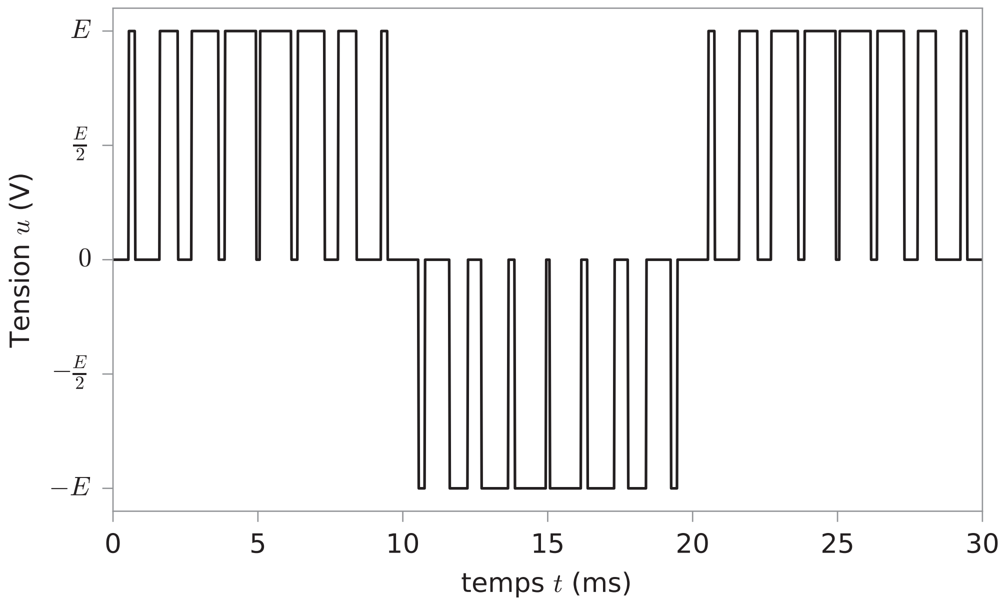


FIGURE 6 – Représentation de $u(t)$ sur une période et demi en sortie de l'onduleur à commande décalée étudié.

Grâce au module **`fftpack`** *de la bibliothèque* **`scipy`***, on réalise la transformée de Fourier de la tension $u(t)$. On dispose alors de deux listes de N éléments contenant les fréquences et les amplitudes A_i correspondantes. Ces deux listes, permettent de tracer le spectre de $u(t)$ représenté sur la* FIGURE *7.*

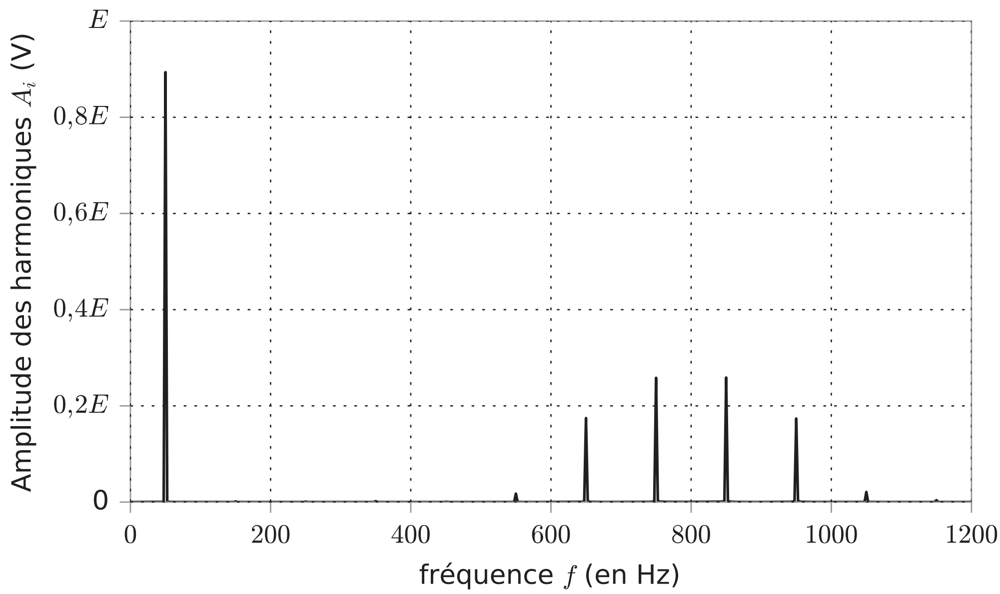


FIGURE 7 – Spectre d'amplitude de la tension u en fonction des fréquences.

D11. Écrire la ligne de code Python permettant d'importer le module `fftpack` de la bibliothèque `scipy`.

D12. À partir du spectre présenté sur la FIGURE 7, vérifier si la fréquence du fondamental, notée f_1, est compatible avec celle déduite du signal temporel de la FIGURE 6, et commenter la présence des autres harmoniques.

On trouve $\dfrac{A_1}{E} = 0{,}89$, $\dfrac{A_{11}}{E} = 0{,}017$ *et* $\dfrac{A_{13}}{E} = 0{,}17$.

D13. Calculer les amplitudes relatives des harmoniques S_1/E, S_{11}/E et S_{13}/E après le filtre. Quelle est l'allure du signal de sortie $s(t)$ en sortie de filtre lorsque l'onduleur est à commande décalée ? Quel avantage y-aurait-il à utiliser un onduleur à commande décalée dans ce montage ?

E/ Dimensionnement des câbles

On s'intéresse dans cette partie à la dimension des câbles employés pour transporter l'énergie électrique de la centrale au consommateur. On cherche à justifier le rayon r_c des câbles utilisés en début du réseau basse tension.

Pour cela, on adopte le modèle de Drude : un électron libre de charge $-e$ est soumis à la force qu'exerce un champ électromagnétique et à une force de frottement visqueux, modélisant les collisions, de la forme $\overrightarrow{f} = -\dfrac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v}$ avec m_e la masse d'un électron, τ un temps de relaxation et $\overrightarrow{v}$ la vitesse des électrons.

Un fil infini d'axe Oz et de rayon r_c est parcouru par un vecteur densité de courant $\overrightarrow{j_c}$. Le milieu, supposé électriquement neutre, contient n_0 électrons mobiles par unité de volume. Il est suffisamment dilué pour pouvoir négliger les interactions entre les différentes charges du milieu.

On utilise les coordonnées cylindrique de base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$. On considère un champ électromagnétique monochromatique de la forme $\underline{\overrightarrow{E}}(r,t) = \underline{E_0}(r)\exp(j\omega t)\,\overrightarrow{u_z}$ pour le champ électrique et $\underline{\overrightarrow{B}}(r,t) = \underline{B_0}(r)\exp(j\omega t)\,\overrightarrow{u_\theta}$ pour le champ magnétique.

Le mouvement d'un électron du milieu conducteur est non relativiste et il est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

E1. Dans le modèle présenté ci-dessus, appliquer la deuxième loi de Newton à un électron du milieu et donner l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse $\overrightarrow{v}$. Faut-il prendre en compte le poids de l'électron ? Justifier.

E2. On note μ_0 la perméabilité du vide et ϵ_0 la permittivité du vide. Écrire pour le milieu considéré les quatre équations de Maxwell.

E3. Justifier que la force magnétique subie par un électron est négligeable devant la force électrique. Simplifier alors l'équation du mouvement d'un électron.

On se place en régime permanent sinusoïdal et on note $\underline{\overrightarrow{v}}$ la vitesse de l'électron dans ce régime.

E4. Exprimer $\underline{\overrightarrow{v}}$ en fonction de e, $\underline{\overrightarrow{E_0}}$, τ, m_e et ω. En déduire l'expression du vecteur densité de courant $\underline{\overrightarrow{j_c}}$ en fonction des mêmes variables et de n_0.

E5. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale en fonction de $\overrightarrow{j_c}$, $\overrightarrow{E}$ et de la conductivité électrique γ. En déduire que la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ en régime permanent sinusoïdal s'exprime

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\tau\omega}\ , \tag{9}$$

et donner l'expression de γ_0 en fonction de n_0, e, τ et m_e.

Un milieu conducteur tel que le câble étudié est caractérisé par un temps de relaxation de l'ordre de $\tau \simeq 10^{-14}\,\mathrm{s}$ et une densité de porteurs de charge de l'ordre de $n_0 \simeq 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3}$. On rappelle que la fréquence du signal considéré est $f_r = 50\,\mathrm{Hz}$.

E6. Calculer γ_0. Par des calculs d'ordre de grandeurs, simplifier l'expression de la conductivité $\underline{\gamma}$ ainsi que l'équation de Maxwell-Ampère.

On rappelle que pour un champ vectoriel $\overrightarrow{f}$, on a la relation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{f}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{f}\right) - \Delta\overrightarrow{f}$ avec Δ le laplacien vectoriel.

E7. Déduire des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm locale que le vecteur densité de courant $\overrightarrow{\underline{j_c}}(r)$ vérifie

$$\Delta\overrightarrow{\underline{j_c}} = \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \overrightarrow{\underline{j_c}}\ . \tag{10}$$

Déterminer l'expression de δ et le calculer numériquement dans le cas étudié. Quel nom donne-t-on couramment à δ ?

La résolution de cette équation n'est pas demandée. La solution de l'équation précédente en coordonnées cylindriques conduit à un vecteur de la forme $\overrightarrow{\underline{j_c}}(r) = \underline{j_c}(r)\,\overrightarrow{u_z}$ avec une certaine expression pour $\underline{j_c}(r)$.

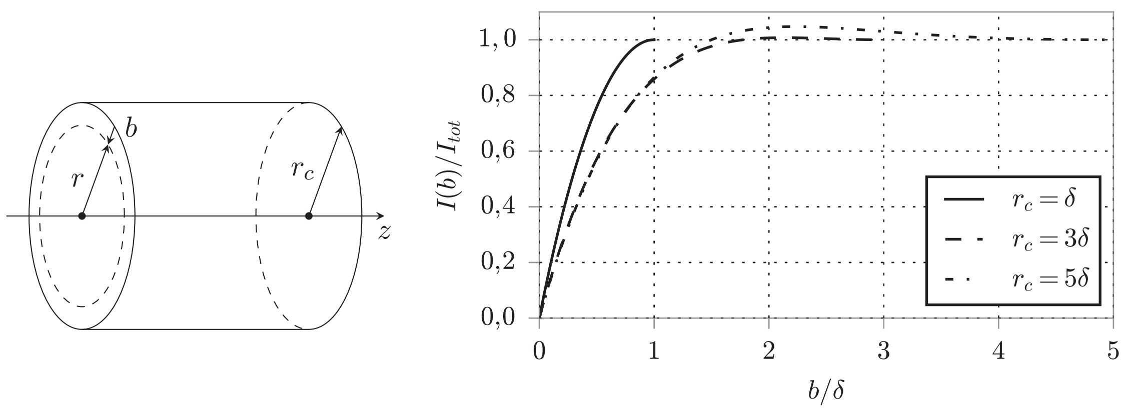


FIGURE 8 – À gauche : Représentation de l'épaisseur externe b. À droite : Représentation de $I(b)\,/I_{tot}$ pour les trois valeurs $r_c = \delta$, $r_c = 3\delta$ et $r_c = 5\delta$.

On représente alors sur la FIGURE *8 l'intensité normalisée* $\dfrac{I(b)}{I_{tot}}$ *avec* $I(b) = \left|\displaystyle\int_{r_c-b}^{r_c} 2\pi \underline{j_c}(r)\,r\mathrm{d}r\right|$

l'intensité circulant dans l'épaisseur b la plus externe du conducteur et $I_{tot} = \left| \int_0^{r_c} 2\pi \underline{j_c}(r)\, r\mathrm{d}r \right|$ *l'intensité totale.*

E8. En étudiant les courbes représentatives de $I(b)\,/I_{tot}$ pour différents rayons, quelle est la zone du câble la plus sollicitée pour transporter le courant ? Est-il utile de fabriquer des câbles dont le rayon vaut plusieurs fois δ ? Justifier.

E9. Au début du réseau basse tension, la section des câbles est $s = 240\,\mathrm{mm}^2$. Commenter.

E10. En pratique, pour faire circuler des courants intenses, on utilise plusieurs fils de faible rayon isolés les uns des autres, plutôt qu'un seul fil de gros rayon. Justifier ce choix.

E11. Proposer une explication permettant à $I(b)\,/I_{tot}$ d'être supérieur à 1 pour certaines valeurs de b, comme cela peut s'observer sur la FIGURE 8 dans le cas où $r_c = 5\delta$.

On s'intéresse maintenant à une méthode numérique permettant de calculer les intégrales définissant $I(b)$ *et* I_{tot}.

E12. Expliquer en quelques phrases et avec un schéma le principe d'intégration numérique par la méthode des rectangles.

E13. Élaborer une fonction Python nommée `Rectangles` prenant comme arguments une fonction f, deux flottants a et b et un nombre de points de calcul n et renvoyant la valeur approchée par la méthode des rectangles de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ calculée sur n points.

E14. Quelle est la complexité de calcul de cet algorithme ? On donnera la réponse sous la forme $\mathcal{O}(k)$ où k est une grandeur à déterminer en fonction de n.

On souhaite comparer la précision de la méthode des rectangles avec deux autres méthodes, celle des trapèzes et celle de Simpson. On note $R_n(f)$ *la valeur approchée de* $\int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ *par une méthode numérique (rectangles, trapèzes ou Simpson) utilisant n points de calcul. Cette comparaison est réalisée sur un exemple dont la solution exacte est simple :* $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On calcule l'erreur $|\epsilon| = \left| \frac{\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x - R_n(\sin)}{\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x} \right| = \left| \frac{1 - R_n(\sin)}{1} \right|$. *La* FIGURE *9 donne l'erreur* $|\epsilon|$ *en fonction du nombre de points de calcul n pour les trois méthodes considérées en échelle log-log.*

E15. A partir de la FIGURE 9, estimer l'évolution de l'erreur en fonction de n pour des valeurs de n pas trop élevées. On donnera la réponse sous la forme $|\epsilon| = \mathcal{O}(k)$ où k est une grandeur à déterminer en fonction de n. Comparer les trois méthodes d'intégration numérique.

E16. Passer une certaine valeur de n, on remarque que l'erreur augmente légèrement avec n. Ceci est visible sur la FIGURE 9 pour la méthode des trapèzes ou de Simpson. Proposer une explication à cela.

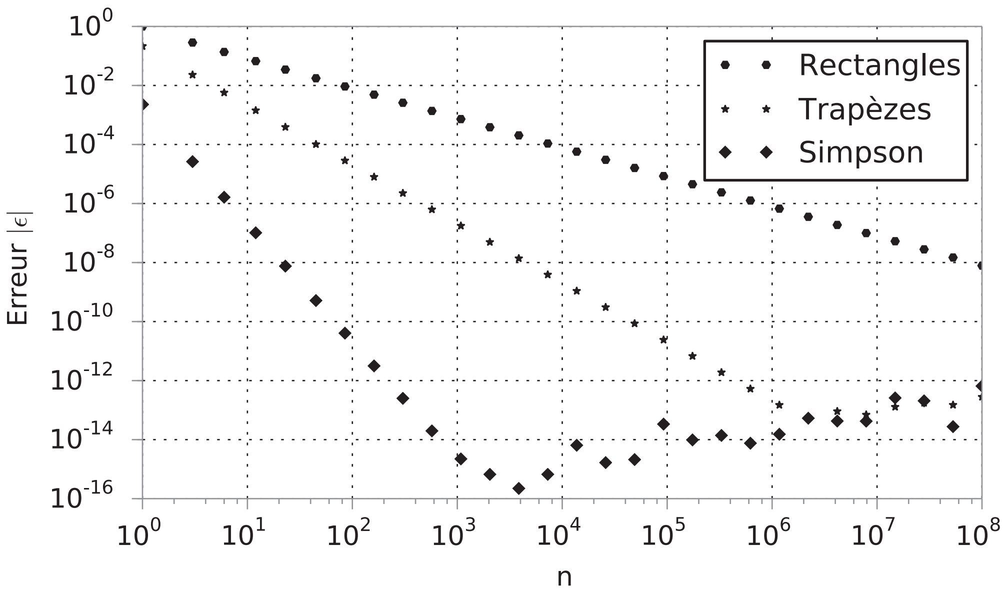


FIGURE 9 – Erreur des différentes méthodes en fonction du nombre de points de calcul n en échelle log-log

F/ Propagation de la tension le long d'une ligne électrique

On se propose ici d'étudier la propagation des signaux électriques dans une ligne monophasé, assimilée à deux câbles (en réalité il y en a plus, voir partie précédente) de longueur L_c.

Dans un premier temps, un tronçon de longueur $\mathrm{d}x$ *de cette ligne monophasée, que l'on considère très petite devant toutes les longueurs caractéristiques du phénomène, peut-être modélisé par une inductance* $\ell\mathrm{d}x$ *et une capacité* $\alpha\mathrm{d}x$ *(ℓ et α étant constantes) selon le schéma de la* FIGURE *10.*

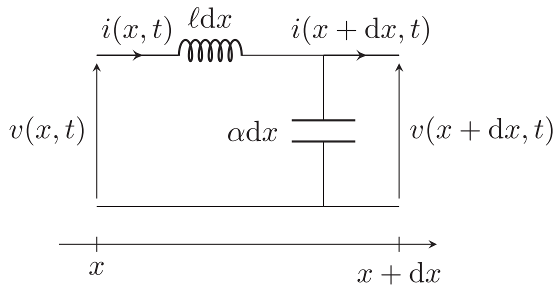


FIGURE 10 – Schématisation de la ligne électrique monophasée entre x et $x+\mathrm{d}x$ à l'instant t.

F1. L'ordre de grandeur de L_c est de 50 km. L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (ARQS) est-elle valable en tout point du câble ? Justifier. On rappelle que la fréquence du signal est $f_r = 50\,\mathrm{Hz}$.

F2. Montrer que l'application des lois de l'électrocinétique dans l'ARQS permet d'établir les deux équations suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} v(x,t) & = & \ell \mathrm{d}x \dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t) + v(x+\mathrm{d}x,t) \ , \\ i(x,t) & = & \alpha \mathrm{d}x \dfrac{\partial v}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t) + i(x+\mathrm{d}x,t) \ . \end{array}\right. \tag{11}$$

F3. En déduire que $v(x,t)$ vérifie une équation de D'Alembert et exprimer la célérité c des ondes associées en fonction de ℓ et α.

On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques (OPPH) de pulsation ω.

F4. Déterminer la relation de dispersion des ondes dans ce milieu entre la pulsation et le nombre d'onde noté k. Donner la définition d'un milieu dispersif et d'un milieu absorbant. Le milieu est-il dispersif ? Est-il absorbant ? Les réponses devront être succinctement justifiées.

On cherche une solution sous la forme de la somme d'une OPPH incidente notée $\underline{v_+}(x,t)$ se propageant vers les x positifs et d'une onde réfléchie $\underline{v_-}(x,t)$ se propageant vers les x négatifs. On note respectivement $\underline{V_+}$ et $\underline{V_-}$ les amplitudes complexes de ces ondes. Chaque onde de tension est de plus associée à un courant $\underline{i_+}(x,t)$ et $\underline{i_-}(x,t)$, d'amplitudes $\underline{I_+}$ et $\underline{I_-}$. On définit enfin l'impédance $\underline{Z} = \dfrac{\underline{V}}{\underline{I}}$ du milieu, qui dépend du type d'onde qui s'y propage.

F5. Donner la forme des OPPH incidentes et réfléchies en tension. En utilisant les relations de l'équation (11), exprimer l'impédance du milieu pour les ondes incidentes, notée $\underline{Z_+}$, et pour les ondes réfléchies $\underline{Z_-}$, en fonction de ℓ et α. Quelle est l'unité des impédances $\underline{Z_+}$ et $\underline{Z_-}$?

La tension d'entrée du réseau basse tension, en $x = 0$, est $v(0,t) = \sqrt{2}U_r \cos(\omega t)$ où $U_r = 230\,\mathrm{V}$. Le circuit est fermé en $x = L_c$ sur une habitation modélisée par une simple résistance R'.

F6. Écrire, sans les résoudre, les deux équations correspondantes aux conditions de bord et permettant d'obtenir $\underline{V_-}$ et $\underline{V_+}$.

F7. Déterminer l'expression de R' en fonction de ℓ et α afin d'annuler l'onde réfléchie. Qualitativement, quel est l'avantage de cette situation d'un point de vue énergétique ?

En réalité, il y a des pertes d'énergie dues à la nature résistive des câbles. On ajoute une résistance en série avec l'inductance $r\mathrm{d}x$ et une autre résistance linéique de valeur $\dfrac{1}{g\mathrm{d}x}$, en parallèle avec la capacité (c'est-à-dire que $g\mathrm{d}x$ est l'admittance de cette résistance).

F8. Quelles sont les deux nouvelles équations différentielles couplées et du premier ordre en x et en t vérifiées par $v(x,t)$ et $i(x,t)$?

F9. On considère des solutions de la forme $\underline{v}(x,t) = \underline{V}(x)\exp(j\omega t)$ et $\underline{i}(x,t) = \underline{I}(x)\exp(j\omega t)$. Montrer que $\underline{V}(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{V}}{\mathrm{d}x^2} = \underline{Z_s}\,\underline{Y_p}\,\underline{V} \ , \tag{12}$$

avec $\underline{Z_s} = j\ell\omega + r$ et $\underline{Y_p} = j\alpha\omega + g$.

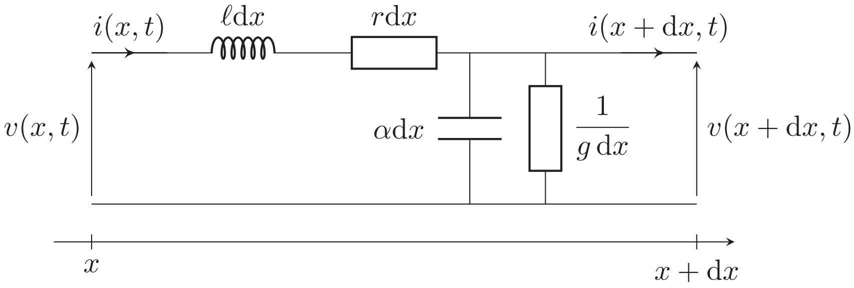


FIGURE 11 – Schématisation de la ligne électrique monophasée avec pertes entre x et $x + \mathrm{d}x$ à l'instant t.

On note $\underline{k}(\omega) = k''(\omega) + jk'(\omega)$ tel que $\underline{k}^2 = \underline{Z_s}\,\underline{Y_p}$, $k'(\omega) > 0$ et $k''(\omega) > 0$. Les solutions de l'équation précédente conduisent à

$$\begin{aligned}\underline{v}(x,t) = \underline{V_1} \exp\big[-k''(\omega)\,x + j\big(\omega t - k'(\omega)\,x\big)\big] \\ + \underline{V_2} \exp\big[k''(\omega)(x - L_c) + j\big(\omega t + k'(\omega)\,x\big)\big]\ .\end{aligned} \tag{13}$$

F10. Sans chercher à déterminer les expressions de $k'(\omega)$ et de $k''(\omega)$, préciser si ce milieu est dispersif et/ou absorbant.

En choisissant judicieusement les composants et la géométrie de la ligne, il est possible de respecter la condition $\ell g = r\alpha$. Dans ce cas, on trouve $k'(\omega) = \omega\sqrt{\ell\alpha}$ et $k''(\omega) = g\sqrt{\dfrac{\ell}{\alpha}}$. On montre aussi que $k''(\omega)$ est minimal lorsque cette condition est respectée.

F11. Quels sont les avantages à choisir les paramètres des câbles tels que $\ell g = r\alpha$?

On admet que sous la condition $\ell g = r\alpha$, la résistance R' permettant d'annuler l'onde réfléchie est la même que celle obtenue dans la question F7. Les ordres de grandeurs sont $g \simeq 2{,}1 \times 10^{-9}\,\mathrm{S \cdot m^{-1}}$, $\alpha \simeq 6{,}3 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ et $\ell \simeq 1{,}0 \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$.

F12. Calculer numériquement k'' lorsque $\ell g = r\alpha$. En l'absence d'onde réfléchie, calculer la variation relative de l'amplitude de la tension aux bornes de R' lorsque l'on prend en compte les pertes dans la ligne par rapport au cas sans perte. Commenter.

Fin de l'épreuve

L'usage de calculatrice est autorisé.

Cahier réponses

Épreuve de Physique-Modélisation

PC

Concours e3a – 2017

Toutes les réponses seront portées sur ce cahier de réponses à l'exclusion de toute autre copie

NE PAS DÉGRAFER

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

A/ Approche descriptive du rayonnement du Soleil

A1. Estimer la valeur numérique de la température T_S du Soleil assimilé à un corps noir. Le raisonnement devra être explicité.

A2. Exprimer le flux surfacique d'énergie ϕ_S émis par le Soleil en fonction de T_S et de σ. En déduire l'expression de la puissance totale rayonnée par le Soleil $\mathcal{P}_S$ en fonction de T_S, R_S et σ.

A3. Exprimer le flux surfacique d'énergie reçu par la Terre ϕ_T en fonction de σ, T_S, R_S et d_{ST} et montrer que la puissance totale reçue par la Terre, notée $\mathcal{P}_T$, s'écrit

$$\mathcal{P}_T = \sigma T_S^4 \pi \frac{R_S^2 R_T^2}{d_{ST}^2} .$$

Faire l'application numérique de ϕ_T.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

A4. Proposer une explication pour l'écart entre la valeur trouvée à la question précédente pour ϕ_T et celle mesurée de $900\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. On pourra s'aider des documents.

A5. À partir de ϕ'_T, estimer l'énergie reçue en un jour par la Terre. Comparer cette valeur à la consommation journalière de l'humanité valant environ $1{,}7 \times 10^{18}\,\mathrm{J}$. Commenter la pertinence de développer l'énergie photovoltaïque pour assurer les besoins énergétiques de l'humanité.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

B/ Estimation de la température du Soleil

B1. Montrer par des considérations d'invariances et de symétries que l'expression du champ de gravitation $\overrightarrow{g_S}(M)$ créé par le Soleil à une distance r de son centre se met sous la forme $\overrightarrow{g_S}(M) = g_S(r)\,\overrightarrow{u_r}$.

B2. Exprimer la masse volumique moyenne ρ_S en fonction de M_S et R_S. Par analogie avec l'électrostatique, utiliser le théorème de Gauss pour déterminer l'expression de $g_S(r)$ lorsque $r < R_S$ en fonction de $\mathcal{G}$, ρ_s et r.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

B3. Donner la définition d'un volume mésoscopique. Rappeler sans démonstration l'expression de la force volumique équivalente aux forces de pression. En appliquant la deuxième loi de Newton au volume mésoscopique considéré, retrouver l'équation d'Euler.

B4. Simplifier l'équation d'Euler précédente pour montrer que la loi de la statique des fluides à l'intérieur du Soleil s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) = -\rho_S^2 \mathcal{G} \frac{4}{3} \pi r \overrightarrow{u_r}\,. \tag{3}$$

B5. À partir de l'équation (3), déterminer l'expression de $P(r)$ en fonction de P_O, $\mathcal{G}$, r et ρ_S. En supposant que la pression à l'extérieur du Soleil est nulle $P(R_S) = 0$, déterminer l'expression de P_O.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

B6. Justifier que la masse molaire moyenne du gaz vaut environ $\mathcal{M} \simeq \dfrac{1}{2} m_p \mathcal{N}_A$ et effectuer l'application numérique. Quelle est de plus la relation dans ce modèle entre $\mathcal{M}$ et la pression P, la température T, la constante R des gaz parfaits et la masse volumique ρ_S du Soleil ?

B7. Déduire des questions précédentes l'expression de la température dans le Soleil $T(r)$ en fonction de ρ_S, $\mathcal{G}$, r, R_S, R et $\mathcal{M}$. Quelle est la partie la plus chaude de la photosphère ? En considérant que la lumière est produite sur la couche interne de la photosphère, calculer la température à laquelle est émis le rayonnement électromagnétique du Soleil. Comparer à la valeur obtenue dans la partie A.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

B8. D'après votre culture scientifique, discuter de la validité des hypothèses H_1 et H_2. Peut-on considérer un gaz de particules chargées comme un gaz parfait ? Discuter de la validité de l'hypothèse H_3. Que dire du modèle proposé ?

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

C/ Étude d'une centrale photovoltaïque

C1. Décrire précisément mais succinctement un protocole expérimental permettant de mesurer la caractéristique d'une cellule photovoltaïque telle que présentée sur la FIGURE 2.

C2. Écrire une fonction `MaxPuissance` en langage Python prenant en argument `Liste_U` et `Liste_I` et renvoyant la tension U_m et l'intensité I_m correspondant au maximum de la puissance fournie par la cellule photovoltaïque.

C3. Déterminer la tension E aux bornes d'un module, l'intensité I_{mod} traversant ce module et la puissance $\mathcal{P}_{mod}$ délivrée par ce module. Retrouver l'ordre de grandeur de 100 kW délivré par la centrale solaire de Martillac.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

C4. D'après vous, en vous appuyant sur le document 4 et en argumentant, quelle est la composition des cellules utilisées dans la centrale de Martillac ?

C5. Quel est l'ordre de grandeur de la puissance délivrée par la centrale lorsque, par temps partiellement nuageux, l'éclairement baisse à $700\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$? Commenter sur l'usage des centrales photovoltaïques.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D/ Transformation en courant alternatif grâce à un onduleur

D1. Représenter le schéma électrique équivalent de l'onduleur lorsque $nT < t \leq nT + T/2$ et lorsque $nT + T/2 < t \leq (n+1)\,T$. Représenter alors l'allure de la tension $u(t)$ en sortie de l'onduleur. Quelle est la tension efficace U_{eff} de $u(t)$?

D2. Rappeler l'expression de l'impédance $\underline{Z}_L$ d'une inductance L ainsi que celle, $\underline{Z}_R$, d'une résistance R. En déduire que l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(f) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{u}}$ est

$$\underline{H}(f) = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_0}}\ , \tag{6}$$

où l'expression de f_0 est à déterminer en fonction de R et L.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D3. Quelle est la nature de ce filtre ? Est-il adapté pour filtrer $u(t)$ en un signal sinusoïdal à 50 Hz ? Déterminer le gain $G = |\underline{H}(f)|$ du filtre. Exprimer la fréquence de coupure à -3 dB de ce filtre, notée f_c, en fonction de f_0.

D4. En sortie du filtre, quels sont les rangs des harmoniques S_n présents dans le signal $s(t)$? L'amplitude S_3 de l'harmonique de rang trois est-elle négligeable devant celle du fondamental ? Même question avec l'harmonique de rang cinq d'amplitude S_5. Commenter.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D5. Commenter et justifier la façon dont a été définie la fonction `p` dans le code ci-dessus.

D6. Dans cette nouvelle séquence, on montre que si K_1 et K_3 sont fermés alors $u(t) = +E$, si K_2 et K_4 sont fermés alors $u(t) = -E$ et $u(t) = 0$ sinon. On associe alors à chaque interrupteur un entier valant 0 si l'interrupteur est ouvert et 1 s'il est fermé. Élaborer une fonction Python nommée `tension` prenant en arguments les quatre valeurs des interrupteurs K_1, K_2, K_3 et K_4 et renvoyant la tension u en sortie de l'onduleur.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D7. Élaborer une fonction Python nommée `onduleur` prenant comme argument un flottant représentant le temps t, temps auquel sont évaluées les conditions d'ouverture de la séquence donnée précédemment à l'équation (8), et renvoyant la valeur de la tension en sortie de l'onduleur à cet instant t.

D8. Donner les instructions en langage Python pour construire les deux listes à enregistrer dans les variables respectives `Liste_t` et `Liste_u` et contenant respectivement les valeurs des temps t_k et des tensions $u(t_k)$.

D9. Écrire alors en langage Python les commandes permettant de tracer le graphique de $u(t)$ et de se représenter le fonctionnement de l'onduleur comme dans l'exemple page suivante de la FIGURE 6. On ne se souciera ni des légendes ni des axes.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D10. Quelle est la fréquence d'échantillonnage f_e de ce signal ? Justifier qualitativement pourquoi un si grand nombre de points de calcul du signal a été choisi ?

D11. Écrire la ligne de code Python permettant d'importer le module `fftpack` de la bibliothèque `scipy`.

D12. À partir du spectre présenté sur la Figure 7, vérifier si la fréquence du fondamental, notée f_1, est compatible avec celle déduite du signal temporel de la Figure 6, et commenter la présence des autres harmoniques.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D13. Calculer les amplitudes relatives des harmoniques S_1/E, S_{11}/E et S_{13}/E après le filtre. Quelle est l'allure du signal de sortie $s(t)$ en sortie de filtre lorsque l'onduleur est à commande décalée ? Quel avantage y-aurait-il à utiliser un onduleur à commande décalée dans ce montage ?

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

E/ Dimensionnement des câbles

E1. Dans le modèle présenté ci-dessus, appliquer la deuxième loi de Newton à un électron du milieu et donner l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse $\vec{v}$. Faut-il prendre en compte le poids de l'électron ? Justifier.

E2. On note μ_0 la perméabilité du vide et ϵ_0 la permittivité du vide. Écrire pour le milieu considéré les quatre équations de Maxwell.

E3. Justifier que la force magnétique subie par un électron est négligeable devant la force électrique. Simplifier alors l'équation du mouvement d'un électron.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

E4. Exprimer $\underline{\vec{v}}$ en fonction de e, $\underline{\overrightarrow{E_0}}$, τ, m_e et ω. En déduire l'expression du vecteur densité de courant $\underline{\vec{j_c}}$ en fonction des mêmes variables et de n_0.

E5. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale en fonction de $\vec{j_c}$, $\vec{E}$ et de la conductivité électrique γ. En déduire que la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ en régime permanent sinusoïdal s'exprime

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\tau\omega}\,, \tag{9}$$

et donner l'expression de γ_0 en fonction de n_0, e, τ et m_e.

E6. Calculer γ_0. Par des calculs d'ordre de grandeurs, simplifier l'expression de la conductivité $\underline{\gamma}$ ainsi que l'équation de Maxwell-Ampère.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

E7. Déduire des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm locale que le vecteur densité de courant $\underline{\vec{j_c}}(r)$ vérifie

$$\Delta \underline{\vec{j_c}} = \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \underline{\vec{j_c}}\,. \qquad (10)$$

Déterminer l'expression de δ et le calculer numériquement dans le cas étudié. Quel nom donne-t-on couramment à δ ?

E8. En étudiant les courbes représentatives de $I(b)\,/I_{tot}$ pour différents rayons, quelle est la zone du câble la plus sollicitée pour transporter le courant ? Est-il utile de fabriquer des câbles dont le rayon vaut plusieurs fois δ ? Justifier.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

E9. Au début du réseau basse tension, la section des câbles est $s = 240\,\text{mm}^2$. Commenter.

E10. En pratique, pour faire circuler des courants intenses, on utilise plusieurs fils de faible rayon isolés les uns des autres, plutôt qu'un seul fil de gros rayon. Justifier ce choix.

E11. Proposer une explication permettant à $I(b)/I_{tot}$ d'être supérieur à 1 pour certaines valeurs de b, comme cela peut s'observer sur la FIGURE 8 dans le cas où $r_c = 5\delta$.

E12. Expliquer en quelques phrases et avec un schéma le principe d'intégration numérique par la méthode des rectangles.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

E13. Élaborer une fonction Python nommée `Rectangles` prenant comme arguments une fonction f, deux flottants a et b et un nombre de points de calcul n et renvoyant la valeur approchée par la méthode des rectangles de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ calculée sur n points.

E14. Quelle est la complexité de calcul de cet algorithme ? On donnera la réponse sous la forme $\mathcal{O}(k)$ où k est une grandeur à déterminer en fonction de n.

E15. A partir de la FIGURE 9, estimer l'évolution de l'erreur en fonction de n pour des valeurs de n pas trop élevées. On donnera la réponse sous la forme $|\epsilon| = \mathcal{O}(k)$ où k est une grandeur à déterminer en fonction de n. Comparer les trois méthodes d'intégration numérique.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

E16. Passer une certaine valeur de n, on remarque que l'erreur augmente légèrement avec n. Ceci est visible sur la FIGURE 9 pour la méthode des trapèzes ou de Simpson. Proposer une explication à cela.

F/ Propagation de la tension le long d'une ligne électrique

F1. L'ordre de grandeur de L_c est de 50 km. L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (ARQS) est-elle valable en tout point du câble ? Justifier. On rappelle que la fréquence du signal est $f_r = 50\,\mathrm{Hz}$.

F2. Montrer que l'application des lois de l'électrocinétique dans l'ARQS permet d'établir les deux équations suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} v(x,t) & = & \ell \mathrm{d}x \dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t) + v(x+\mathrm{d}x,t) \ , \\ i(x,t) & = & \alpha \mathrm{d}x \dfrac{\partial v}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t) + i(x+\mathrm{d}x,t) \ . \end{array}\right. \tag{11}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

F3. En déduire que $v(x,t)$ vérifie une équation de D'Alembert et exprimer la célérité c des ondes associées en fonction de ℓ et α.

F4. Déterminer la relation de dispersion des ondes dans ce milieu entre la pulsation et le nombre d'onde noté k. Donner la définition d'un milieu dispersif et d'un milieu absorbant. Le milieu est-il dispersif ? Est-il absorbant ? Les réponses devront être succinctement justifiées.

F5. Donner la forme des OPPH incidentes et réfléchies en tension. En utilisant les relations de l'équation (11), exprimer l'impédance du milieu pour les ondes incidentes, notée $\underline{Z_+}$, et pour les ondes réfléchies $\underline{Z_-}$, en fonction de ℓ et α. Quelle est l'unité des impédances $\underline{Z_+}$ et $\underline{Z_-}$?

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

F6. Écrire, sans les résoudre, les deux équations correspondantes aux conditions de bord et permettant d'obtenir $\underline{V_-}$ et $\underline{V_+}$.

F7. Déterminer l'expression de R' en fonction de ℓ et α afin d'annuler l'onde réfléchie. Qualitativement, quel est l'avantage de cette situation d'un point de vue énergétique ?

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

F8. Quelles sont les deux nouvelles équations différentielles couplées et du premier ordre en x et en t vérifiées par $v(x,t)$ et $i(x,t)$?

F9. On considère des solutions de la forme $\underline{v}(x,t) = \underline{V}(x)\exp(j\omega t)$ et $\underline{i}(x,t) = \underline{I}(x)\exp(j\omega t)$. Montrer que $\underline{V}(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{V}}{\mathrm{d}x^2} = \underline{Z_s}\,\underline{Y_p}\,\underline{V}\,, \qquad (12)$$

avec $\underline{Z_s} = j\ell\omega + r$ et $\underline{Y_p} = j\alpha\omega + g$.

F10. Sans chercher à déterminer les expressions de $k'(\omega)$ et de $k''(\omega)$, préciser si ce milieu est dispersif et/ou absorbant.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

F11. Quels sont les avantages à choisir les paramètres des câbles tels que $\ell g = r\alpha$?

F12. Calculer numériquement k'' lorsque $\ell g = r\alpha$. En l'absence d'onde réfléchie, calculer la variation relative de l'amplitude de la tension aux bornes de R' lorsque l'on prend en compte les pertes dans la ligne par rapport au cas sans perte. Commenter.

Fin de l'épreuve

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE