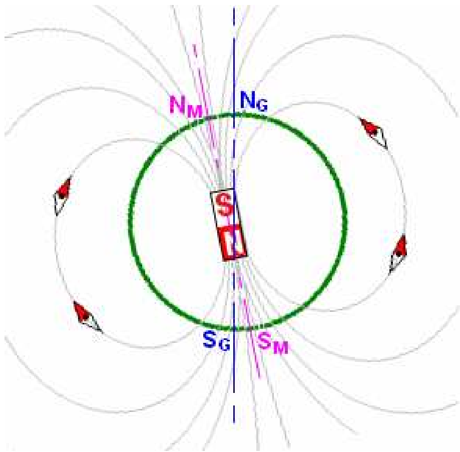
Centrale - PC sujet 2 2007

I. Navigation côtière

A- Navigation à vue

A.1) *Le champ magnétique terrestre*

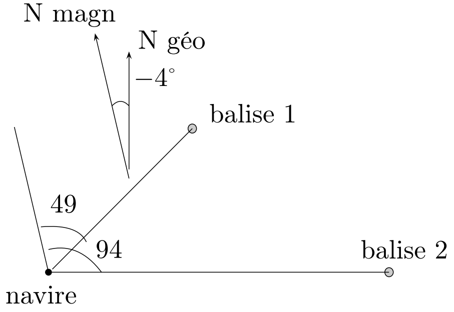


Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 0,05 mT.

A.2) *déclinaison*

(a) La valeur de la déclinaison n'est pas constante et varie avec la latitude et la longitude. Elle varie également au cours du temps (le pôle nord magnétique se rapproche actuellement du pôle nord géographique à la vitesse de 40 km/an).

(b) Les angles respectifs par rapport au nord géographique sont de 45° et 90°.



B- Navigation par temps de brouillard

B.1) *Rayonnement d'un dipôle oscillant*

(a) Cette relation est valable pour un dipôle, de taille caractéristique négligeable devant λ. Il s'agit du champ lointain à grande distance devant la longueur d'onde : $r \gg \lambda$.

(b)

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = -\frac{\mu_0}{4\pi rc}\omega^2 \vec{p_0} \wedge \vec{e_r} e^{j(\omega t - kr)}}$$

(c) La zone de rayonnement correspond à $r \gg \lambda$ où $\lambda = c/f = 3,0$ km. L'expression de $\underline{\vec{B}}$ n'est valable qu'au delà de 30 km du phare. Il n'y a pas de rayonnement dans la direction verticale du dipôle.

(d) Pour une onde plane progressive, se propageant selon la direction $\vec{e_r}$:

$$\underline{\vec{E}} = c\underline{\vec{B}} \wedge \vec{e_r}$$

$$\underline{\vec{E}} = -\frac{\mu_0}{4\pi r}\omega^2 (\vec{p_0} \wedge \vec{e_r}) \wedge \vec{e_r} e^{j(\omega t - kr)}$$

(e) Le vecteur de Poynting représente le flux surfacique de puissance électromagnétique.

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$$

On obtient :

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0}{16c\pi^2 r^2} p_0^2 \omega^4 \cos^2(\omega t - kr) \sin^2\theta \, \vec{e_r}$$

La moyenne dans le temps est :

$$\boxed{< \vec{\Pi} > = \frac{\mu_0}{32c\pi^2 r^2} p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta \, \vec{e_r}}$$

(f) La surface élémentaire est $\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$ d'où

$$< \mathrm{d}\mathcal{P} > = \frac{\mu_0}{32c\pi^2} p_0^2 \omega^4 \sin^3\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

Cette puissance est constante et indépendante de r, la décroissance en $1/r$ des champs témoigne de la conservation de l'énergie totale de l'onde. On intégre sur θ entre 0 et π et sur ϕ variant de 0 à 2π.

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}}$$

B.2) *Réception du signal*

(a) On obtient :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\Delta}\vec{E}$$

La relation de dispersion est $\omega^2 = k^2 c^2$

(b) $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{e_x} \wedge \underline{\vec{E}}}{c} = -\frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e_y}$

(c) $< \vec{\Pi} >= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}}{\mu_0} \right)$ d'où

$$< \vec{\Pi} >= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e_x}$$

(d) Le flux du champ magnétique à travers la spire varie au cours du temps, il apparait une force électromotrice : $e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
Le cadre est de dimension très inférieure à la longueur d'onde, on peut négliger les variations spatiales du champ sur le cadre. Le flux est maximal si le cadre est perpendiculaire au champ magnétique.
$\Phi = NSB_0 \cos(\omega t) = E_0 NS \cos(\omega t)/c$ d'où $u_{AB} = E_0 NS\omega \sin(\omega t)/c$ *i.e.* $U = E_0 \omega SN/c/\sqrt{2}$ avec $E_0 = \sqrt{2\Pi\mu_0 c}$ *i.e.*

$$U = \omega SN \sqrt{\Pi\mu_0/c}$$

(e) La puissance surfacique est : $\Pi =< p > /(4\pi r^2) = 5,16$ W/m^2 d'où $E_0 = 1,97.10^{-2}$ V/m $\boxed{U_{AB} = \omega SN\sqrt{2\Pi\mu_0/c} = 2,9.10^{-5}\,V}$

II. Ondes dans les fluides.

II.A. Ondes acoustiques

A.1) *Approximation acoustique*

(a) Le gaz est parfait *i.e.* $P = \mu RT/M$: si T et P sont uniformes à l'équilibre, μ l'est également.

(b) $\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \right) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{grad} P + \mu \vec{g}$
Le terme convectif non linéaire disparait dans l'approximation acoustique. La masse volumique étant en facteur de la dérivée de la vitesse d'ordre 1, on peut se limiter à une expression à l'ordre 0 de μ.
D'où :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p$$

(c) L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathrm{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

Au premier ordre, elle devient :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu_0 \,\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$

(d) On assimile les petites variations de la pression à p et les petites variations de masse volumique à $\mu' = \mu - \mu_0$, on a alors au premier ordre :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu'}{p}$$

d'où :

$$p = \frac{\mu - \mu_0}{\chi_s \mu_0}$$

(e) On remplace la masse volumique μ dans l'équation de continuité :

$$\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$

En prenant la divergence de l'équation d'Euler :

$$\mu_0 \frac{\partial\, \mathrm{div}\, \vec{v}}{\partial t} = -\Delta p = \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

En posant $c = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_s}$, on obtient l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

(f) L'équation d'Euler linéarisée montre que la dérivée temporelle de la vitesse est un gradient : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p/\mu_0$
Si on introduit le potentiel $\Phi = -\int p(M,t)dt/\mu_0$ (on choisit la constante d'intégration nulle), on obtient :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$$

L'écoulement est bien potentiel.

(g) On dérive l'équation d'Euler par rapport au temps et on remplace p à l'aide de l'équation de continuité :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\chi_s}\overrightarrow{\text{grad}}\,(\,\text{div}\vec{v})$$

Or $\Delta\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\,\text{div}\vec{v}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\,\text{div}\vec{v})$ car le champ de vitesse est irrotationnel.
Au final :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s \mu_0}\overrightarrow{\text{grad}}\,(\,\text{div}\vec{v})$$

Le champ de vitesse se propage à la même vitesse que le champ de pression.

(h) La célérité est indépendante de la fréquence de l'onde : le milieu est non dispersif.

A.2) *Aspect énergétique*

(a) Le flux de $\vec{J}$ à travers une surface S, $\iint \vec{J}\cdot\vec{dS} = \iint \vec{v}\cdot p\vec{dS}$ représente la puissance sonore traversant la surface S. L'analogue pour les ondes électromagnétiques est le vecteur de Poynting.

(b) Les dimensions des termes sont : $[\mu_0 v^2] = M.T^{-2}L^{-1}$ et $[p^2] = M^2L^{-2}T^{-4}$ d'où le coefficient α doit avoir la dimension :

$$[\alpha] = LT^2M^{-1}$$

Il s'agit donc de l'inverse d'une pression.
e représente la densité volumique d'énergie associée à l'onde acoustique. $\frac{1}{2}\mu_0 v^2$ est la densité volumique d'énergie cinétique.

(c) Calculons respectivement $\frac{\partial e}{\partial t}$ et $\text{div}\vec{J}$.
$\text{div}\vec{J} = \overrightarrow{\text{grad}}\,p.\vec{v} + p\,\text{div}\vec{v}$ On peut remplacer $\overrightarrow{\text{grad}}\,p$ et $\text{div}\vec{v}$ grâce aux équations d'Euler et de continuité.

$$\text{div}\vec{J} = -\mu\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.\vec{v} + -\chi_s\frac{\partial p}{\partial t}p = -\frac{1}{2}\frac{\partial(\mu_0 v^2 + p^2\chi_S)}{\partial t}$$

On en déduit que

$$\boxed{\alpha = \frac{\chi_s}{2}}$$

α est bien homogène à l'inverse d'une pression.

A.3) *Ordres de grandeur*

(a) $\mu_0 = \frac{PM}{RT} = 1,18$ kg/m^3

(b) Pour une transformation isentropique d'un gaz parfait, $Pv^\gamma = cte$ *i.e.* $P\mu^{-\gamma} = cte$ d'où $\frac{\partial \mu}{\partial p}\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\gamma p}$

$$\chi_s = \frac{1}{\gamma p}$$

(c) $$\boxed{c = 1/\sqrt{\frac{PM}{\gamma PRT}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}$$

$$c = 347\,m/s$$

(d) $I_0 = < pv >$ or pour une onde plane progressive, $p = \mu_0 cv$ d'où $I_0 = \mu_0 c < v^2 >$
On en déduit la valeur maximale de la vitesse, $v_m = \sqrt{2I_0/(\mu_0 c)} = 7.10^{-8}$ m/s et celle de la pression acoustique $p_m = 2,8.10^{-5}$ Pa.
L'amplitude de déplacement est $x_m = v_m/\omega = 1.10^{-12}$ m. L'amplitude de déplacement est très inférieure à λ ($\lambda = 34$ cm). L'approximation acoustique est largement réalisée compte tenu des très faibles valeurs de p et de v.
La variation de pression liée au champ de pesanteur vaut $\mu g x \simeq 10^{-11}$ Pa sur l'amplitude du déplacement. La surpression est très supérieure et l'effet du champ de pesanteur est très négligeable.

(e) L'intensité de l'onde vaut $I = 1$ W/m^2 ce qui correspond à $v = 7.10^{-2}$ m/s et $p = 28$ Pa. L'amplitude de déplacement est $x = 1.10^{-5}$ m, elle reste bien inférieure à la longueur d'onde. On reste bien dans le cadre de l'approximation acoustique.

II.B. Ondes à la surface libre d'un liquide

B.1) *Mise en équations*

(a) L'écoulement est incompressible d'où : $\text{div}\vec{v} = 0$ *i.e.*

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Cette hypothèse est valable si la vitesse est négligeable devant la vitesse du son dans le milieu.

(b) La dérivée convective $(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$ est d'ordre 2 par rapport à la vitesse, elle est donc négligeable devant le terme d'accélération locale $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ d'ordre 1.
L'équation d'Euler devient :

$$\mu\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \mu\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(P+\mu g z)$$

La dérivée de $\vec{v}$ est bien un champ de gradient. On peut donc introduire un potentiel des vitesses : $\phi = \int(-P/\mu - gz)dt$

(c) On a $\mathrm{div}\vec{v} = 0 = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) = \Delta\phi$
ϕ est donc solution d'une équation de Laplace.

(d) l'équation d'Euler devient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \mu g z$ d'où en intégrant :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + P/\mu + gz = e(t)$$

$e(t)$ a la dimension d'une énergie volumique.

(e) Le potentiel ϕ est déterminé à une fonction additive du temps près. On peut donc choisir un nouveau potentiel $\phi' = \phi - \int e\,dt$ ce qui permet de choisir la constante d'intégration nulle.

B.2) *Solution progressive sur un plan d'eau de profondeur finie*

(a) le bassin est de grande dimension si sa taille est très supérieure à la longueur d'onde et à la profondeur.

(b) Au fond du bassin, la composante normale au plan $z=-h$ de la vitesse est nulle : $v_z(-h) = 0$ d'où $\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,-h,t) = 0$.
Sur la surface libre, la pression est uniforme. Si son équation est $z = f(x,t)$, la condition aux limites cinématique traduisant le fait qu'une particule de fluide à la surface reste à la surface s'écrit $v_z = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x}$. Au premier ordre, l'amplitude du mouvement est petite devant λ et $v_x\frac{\partial f}{\partial x}$ est négligeable d'où $\frac{\partial z}{\partial t}(surface\,libre) = v_z(0,t)$ au premier ordre. En dérivant par rapport au temps l'équation

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + P/\mu + gz = 0$$

en utilisant $v_z(0,t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,0,t)$
On obtient :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(x,0,t) + g\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,0,t) = 0$$

(c) $\Delta\phi = 0$ d'où $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$ d'où

$$f''\cos(kx-\omega t) - k^2 f\cos(kx-\omega t) = 0$$

d'où

$$f'' - k^2 f = 0$$

La forme générale des solutions est :

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

(d) $\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,-h,t) = 0$ d'où $f'(-h)\cos(kx-\omega t) = 0$ *i.e.* $f'(-h) = 0$.
On remplace dans la seconde condition aux limites :
$-\omega^2 f(0)\cos(kx-\omega t) + gf'(0)\cos(kx-\omega t) = 0$

(e) On remplace f par son expression dans les équations précédentes.
$-Ake^{kh} + Bke^{-kh} = 0$ et $-\omega^2(A+B) + gk(A-B) = 0$
On en déduit : $B = Ae^{-2kh}$ et on remplace dans la seconde équation :
$-\omega^2(1+e^{-2kh}) + gk(1-e^{-2kh}) = 0$
La relation de dispersion est donc :

$$\boxed{gk(kh) = \omega^2}$$

Le milieu est dispersif, la vitesse de phase v_ϕ est une fonction de ω.

B.3) *Solution progressive en eau profonde*

(a) Si $h \gg \lambda$, on a $kh \gg 1$ et $(kh) = 1$. On en déduit :

$$\boxed{\omega^2 = gk}$$

La vitesse de phase est $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ d'où

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

On différentie la relation de dispersion : $2\omega\,\mathrm{d}\omega = g\,\mathrm{d}k$ d'où

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{g}{2\omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}v_\phi$$

(b) En eau profonde, $kh \to \infty$, la constante B doit alors être nulle pour la vitesse de tende pas vers l'infini.

$$\phi = Ae^{kz}\cos(kx-\omega t)$$

(c) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = -kAe^{kz}\sin(kx-\omega t)$ et $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z = kAe^{kz}\cos(kx-\omega t)$
On intégre par rapport au temps en négligeant les variations spatiales de l'exponentielle et du cosinus ($|x-x_0|k \ll 1$) :

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{k}{\omega}Ae^{kz}\cos(kx-\omega t) \\ z - z_0 &= -\frac{k}{\omega}Ae^{kz}\sin(kx-\omega t) \end{aligned}$$

Les trajectoires sont des cercles de rayon $Ak\, e^{kz}/\omega$ qui diminue avec la profondeur.

(d) La surface libre correspond à l'équation : $\frac{\partial\phi}{\partial t} + gz + P_0/\rho = 0$ d'où

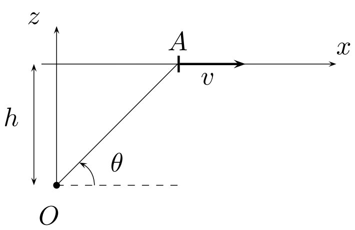
$$\omega A e^{kz}\sin(kx-\omega t) + gz + P_0/\rho = 0$$

On a $e^{kz} \simeq 1$ d'où l'équation de la surface libre est $z = B\sin(kx-\omega t) + C$: elle a un profil sinusoïdal.

II.C. Sillage d'un avion

C.1) *Vol subsonique*

(a) L'avion émet un signal à $t = t_0$ à la position A (angle θ) à la vitesse c. Ce signal parcourt une distance $h/\sin\theta$ et arrive en O à $t_1 = t_0 + h/(c\sin\theta)$. A $t = t_0 + T$, l'avion émet un nouveau signal qui va parcourir la distance $h/\sin(\theta')$ et arrive en O à $t_2 = t_0 + T + h/(c\sin(\theta'))$.



La période perçue par l'observateur est

$$T' = t_2 - t_1 = T + \frac{h}{c}\left(\frac{1}{\sin\theta'} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

θ' est proche de θ : $\theta' = \theta + \delta\theta$. On a $x = h\mathrm{cotan}\theta$ d'où au premier ordre : $-h\delta\theta/\sin^2\theta = \delta x = vT$.
Au premier ordre :

$$\frac{1}{\sin\theta'} - \frac{1}{\sin\theta} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\delta\theta$$

Finalement :

$$\boxed{T' = T + \frac{h}{c}\cos\theta\frac{vT}{h} = T + T\frac{v}{c}\cos\theta}$$

On retrouve bien $T = T'$ si $\theta = \pi/2$ car il n'y a pas de variation locale de OA au premier ordre en ce point.

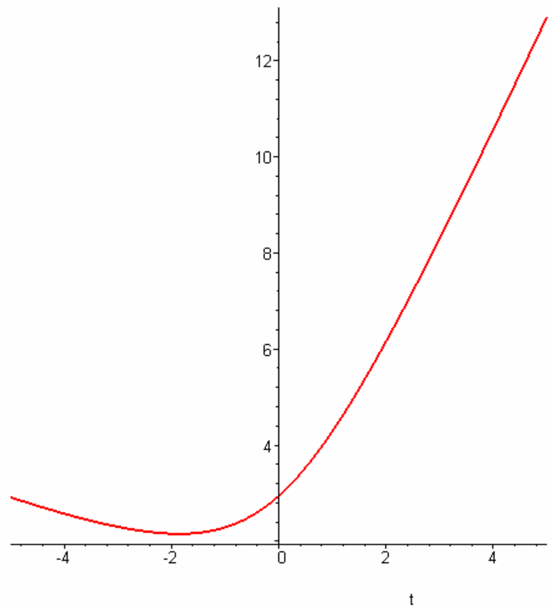
(b) Question peu claire ... A un instant donné, la région de l'espace atteinte par des ondes sonores émises à un instant t est une sphère. Les ondes allant plus vite que l'émetteur, on entend l'avion avant qu'il ne passe devant l'observateur.
Si on considère que l'avion est en mouvement depuis un temps infini, tout point de l'espace est atteint par une onde sonore.

C.2) *Vol supersonique*

(a) La distance à parcourir par l'onde sonore émise à l'instant t est $d(t) = \sqrt{x^2+h^2}$ d'où l'onde est reçue en O à $t' = t + d(t)/c$ *i.e.*

$$t' = t + \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + \frac{v^2t^2}{c^2}}$$

Asymptotes : $t \to -\infty$: $t' = t(1-v/c)$ et $t \to \infty$: $t' = t(1+v/c)$
$t'(0) = t + h/c$
La courbe a l'allure suivante (pour les valeurs numériques de l'énoncé)



(b) Si $\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t = 0$, un grand nombre d'onde émise autour de t arrive au même moment à l'observateur, celui-ci entend un onde sonore résultante très intense.

(c) t_0 correspond à $f'(t_0) = 0$ or

$$f'(t) = 1 + \frac{v^2t/c^2}{\sqrt{h^2/c^2 + v^2t^2/c^2}}$$

La racine est négative telle que $v^2t^2/c^2 + h^2/c^2 = v^4t^2/c^4$ d'où

$$\boxed{t_0 = -\frac{h}{v}\frac{1}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}}$$

D'où $t'_0 = f(t_0)$, après calculs, on trouve :

$$t'_0 = h\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2}}$$

Les positions de A sont alors $x_0 = -h/\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}$ et $x'_0 = h\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}$.

(d) L'observateur ne peut entendre l'avion que lorsque qu'il se trouve dans le cône dans lequel se trouve les onde sonores émises,il entend donc le bang avant l'avion.
Effectuons un DL de f autour de t_0 :
$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 = f(t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2$ d'où

$$\Delta t' = \frac{1}{2}f''(t_0)\Delta t^2$$

Après calculs,

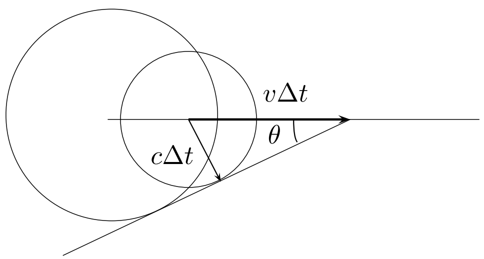
$$f''(t_0) = \frac{v^2h^2/c^4}{(h^2/c^2 + h^2/(v^2-c^2))^{3/2}}$$

D'où

$$\boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta t'}{f''(t_0)}} = 0,83\,s}$$

Le son reçu correspond bien à une compression des ondes sonores émises par l'avion.

(e) L'enveloppe des ondes sonores émises au cours du temps est un cône tangent aux surfaces d'ondes sphériques marquant l'arrivée de l'onde en un point.



L'angle au sommet de ce cône est tel que

$$\sin\theta = \frac{c}{v}$$

(f) La région pouvant être atteinte à un instant donné par une onde sonore est l'intérieur du cône d'angle au sommet 2θ et de sommet l'avion.

(g) On mesure sur la photo : $2\theta = 83^\circ$ d'ou

$$v = 4,5.10^2\,m/s$$

II.D. Sillage d'un bateau

D.1) *Relation de dispersion*

(a) Par définition de v_ϕ et de v_g, on souhaite obtenir : $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \eta\frac{\omega}{k}$ *i.e.* $\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = \eta\frac{\mathrm{d}k}{k}$. D'où la relation de dispersion doit avoir la forme suivante :

$$\omega = \alpha k^\eta$$

(b) $[\omega] = T^{-1} = (L.T^{-2})^\alpha(L^{-1})^\beta = L^{\alpha-\beta}T^{-2\alpha}$
Il faut donc choisir $\alpha = \beta = 1/2$

$$\omega = a\sqrt{gk}$$

Cette relation de dispersion correspond bien à celle obtenue pour les ondes de gravité en eau profonde.

D.2) *Forme du sillage*

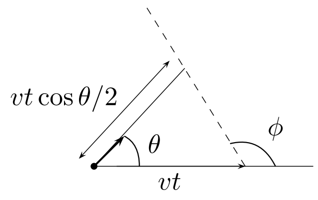
(a) $[H] = M.L^2.T^{-1}$
La constante de Planck possède la même dimension.

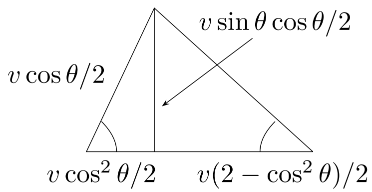
(b) Les lois de conservation s'écrivent : $m\vec{v} = m\vec{v}' + H\vec{k}$
$mv^2 = mv'^2 + 2H\omega$
On porte au carré la première équation :
$m^2v'^2 = (m\vec{v} - H\vec{k}) = m^2v^2 + H^2k^2 - 2mHvk\cos\theta$ d'où $H\omega - Hvk\cos\theta + H^2k^2/m = 0$
Le terme Hk^2/m est d'ordre 2 d'où :

$$\boxed{\omega = vk\cos\theta}$$

(c) $v_\phi = \frac{\omega}{k} = v\cos\theta$ et $v_g = v_\phi/2 = \frac{1}{2}v\cos\theta$

(d) Les paquets d'onde vont à la vitesse v_g





$$\tan(\pi-\phi) = \frac{\sin\theta\cos\theta v}{v(2-\cos^2\theta)}$$
$$\tan(\phi) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - 2}$$

(e) $\phi(0) = \pi$ et $\phi(\pi/2) = \pi$ ce qui est cohérent. ϕ doit posséder un ou plusieurs extrema. On peut déterminer les extrema de $\tan\phi$

$$\frac{\mathrm{d}\tan\phi}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\cos^4\theta + 2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \cos^2\theta\sin^\theta}{(\cos^2\theta-2)^2}$$

cette expression s'annule si $\cos^4\theta + 2(1-2\cos^2\theta) + \cos^2\theta\sin^2\theta = 0 = -3\cos^2\theta + 2$ $\tan\phi$ est extrémal pour $\cos\theta = \sqrt{2/3}$

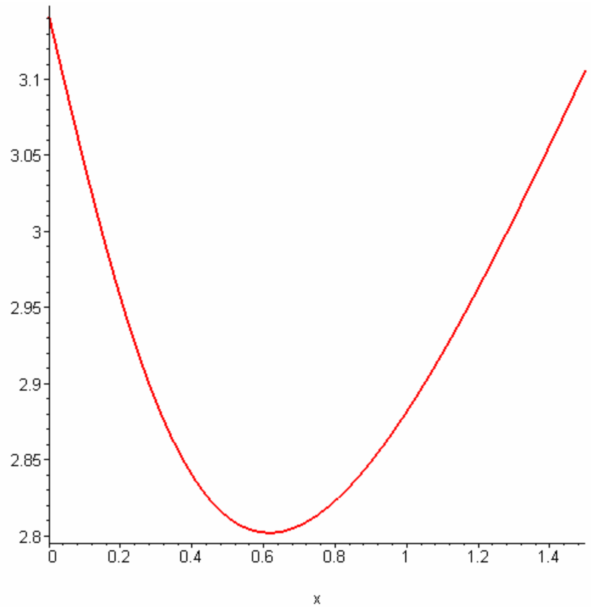


FIG. 1 – $\phi(\theta)$

Cet extremum est un minimum. Ainsi tous les paquets restent dans un secteur de demi angle au sommet $\alpha = \pi - \phi_{min}$ avec $\phi_{min} = \arctan(\sqrt{2}/4)$.

AN : $\boxed{\alpha = 19,5^\circ}$.

(f) Sur la photo, on mesure un demi angle au sommet proche de 20° ce qui est cohérent. Cet angle est indépendant de v, on ne peut donc pas en déduire la vitesse du catamaran.

(g) Les deux situations (avion/bateau) sont différentes car un des milieux est non dispersif et l'autre oui.