# Partie I - Préliminaires

## I.A - Étude de l'atmosphère

IA.1) Modèle isotherme: $dP_{atm} = -\rho g\, dz = -\dfrac{Mg}{RT_0} P_{atm} dz \Rightarrow P_{atm} = P_0 \exp(-Mgz/RT_0)$.

I.A.2) Taylor de P(z) au voisinage de $z_0$ :

$$P_{atm} = P_0 \exp(-Mgz_0/RT_0) + P_0(z-z_0).\left(-Mg/RT_0 \exp(-Mgz/RT_0)\right)_{z=z_0}.$$

En posant $P_A = P_0 \exp(-Mgz_0/RT_0)$ et $\alpha = \dfrac{Mg}{RT_0} P_A$ on a bien $P_{atm} = P_A - \alpha(z-z_0)$

A-N: $P_A =$ $P_A = 91 \times 10^3$ Pa et $\alpha = 10{,}7$ Pa.m$^{-1}$.

## I.B - Étude de l'écoulement dans un capillaire

**I.B.1)** équation de continuité + isovolume: $\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z$ dépend seulement de r en régime stationnaire.

**I.B.2)**a) Il s'agit plutôt de l'équation de Navier Stockes: $\dfrac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{g} - \dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \dfrac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$

Or $\dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{0} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z}\vec{e}_z = \vec{0}$, la pesanteur est négligée, il reste: $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \eta\Delta v_z\, \vec{e}_z$

En projetant sur la direction radiale on obtient (1) et sur la direction axiale on obtient (2).

b) L'équation (1) indique que P n'est fonction que de z. L'équation (2) égalise donc une fonction de z avec une fonction de r. Les variables r et z étant indépendantes, ceci n'est possible que si chaque membre de l'égalité (2) est une constante: $\dfrac{dP}{dz} = C^{te}$. P(z) est donc une fonction affine pour laquelle la dérivée est égale au taux d'accroissement. Soit $\dfrac{dP}{dz} = \dfrac{P_s - P_e}{L} = -\dfrac{\Delta P}{L}$.

c) L'équation (2) s'intègre selon : $v_z(r) = -\dfrac{\Delta P}{L}\dfrac{r^2}{4\eta} + C_1 \text{Ln}\, r + C_2$

La vitesse doit être définie partout , y compris pour r = 0 (sur l'axe Oz) donc il faut prendre $C_1 = 0$.

Sur la paroi fixe il faut vérifier : $v_z(a) = 0$ soit $v_z(r) = \dfrac{\Delta P(a^2 - r^2)}{4\eta L}$ (profil parabolique)

**I.B.3)** Le débit volumique s'écrit $D_V = \int_0^a v_z(r) 2\pi r dr$ ce qui donne : $D_V = \dfrac{\pi\Delta P a^4}{8\eta L}$ donc $\beta = \dfrac{\pi a^4}{8\eta L}$.

A-N: $\beta = 2{,}65 \times 10^{-8}$ m$^4$.s.kg$^{-1}$.

**I.B.4)** Il faut calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement donné par : $R_e = \dfrac{\rho v a}{\eta}$

On peut prendre pour valeur caractéristique de la vitesse la valeur sur l'axe soit $v = \dfrac{\Delta P a^2}{4\eta L}$

On obtient ainsi : $R_e = \dfrac{\rho\Delta P a^3}{4\eta^2 L}$. Pour un écoulement laminaire il faut $R_e < 2000$

La valeur maximale de la dépression est alors $\Delta P_{max} = \dfrac{8000\eta^2 L}{\rho a^3}$ soit $\approx 800$ Pa.

# Partie II - Variomètre à tube capillaire

**II.A.1)** En vol horizontal il n'y a pas d'écoulement dans le capillaire, donc $\Delta P = P_{int} - P_{atm} = 0$.

**II.A.2)** L'air est parfait: $n_{int} = \dfrac{P_{int} V_0}{RT_0}$. Donc le débit sortant vaut : $D_V = -\dfrac{M}{\rho}\dfrac{dn_{int}}{dt} = -\dfrac{MV_0}{\rho RT_0}\dfrac{dP_{int}}{dt}$.

L'énoncé indique $\Delta P = P_{int} - P_{atm}$ indépendant de t, donc en dérivant : $\dfrac{dP_{int}}{dt} = \dfrac{dP_{atm}}{dt}$

Or d'après le préliminaire $P_{atm} = P_A - \alpha(z - z_0)$ soit $\dfrac{dP_{atm}}{dt} = -\alpha\dfrac{dz}{dt} = -\alpha U_0$

On obtient ainsi la relation : $D_V = -\frac{MV_0}{\rho RT_0}\frac{dP_{int}}{dt} = -\frac{MV_0}{\rho RT_0}\frac{dP_{atm}}{dt} = \alpha\frac{MV_0}{\rho RT_0}U_0 = \frac{\alpha V_0}{P_A}U_0$

Enfin on admet encore que $D_V = \beta\Delta P$ donc $\Delta P = \frac{\alpha V_0}{\beta P_A}U_0$.

On trouve numériquement $\Delta P$ = 4,11.$U_0$, la sensibilité est donc très médiocre, il sera difficile de mesurer la vitesse verticale qui est de l'ordre du m/s.

**II.B - Variomètre mécanique**

**II.B.1)** On a toujours l'équation $dP_{atm} = -\rho g\,dz \Rightarrow d(P_{int} - \Delta P) = -\rho g dz$.

Dans l'hypothèse où $\Delta P$ est indépendant de t il vient : $\frac{dP_{int}}{dt} = -\rho g\frac{dz}{dt} = -\rho g U_0$

**II.B.2)** On a trouvé la relation $\Delta P = \frac{\alpha V_0}{\beta P_A}U_0$ donc la relation obtenue à la question précédente s'écrit encore

$$\frac{dP_{int}}{dt} = -\rho g U_0 = -\Delta P\frac{\rho g\beta P_A}{\alpha V_0} \Rightarrow \frac{dP_{int}}{dt} = -\frac{\rho g\beta P_A}{\alpha V_0}(P_{int} - P_{atm}) = -\frac{\rho g\beta P_A}{\alpha V_0}(P_{int} - P_A + \alpha(z - z_0))$$

Cette équation est de la forme voulue en posant: $\tau = \frac{\alpha V_0}{\rho g\beta P_A}$ or $\alpha = \frac{Mg}{RT_0}P_A = \rho g$ donc $\tau = \frac{V_0}{\beta P_A}$.

Puisque $z - z_0 = U_0 t$, la solution est la somme de la solution $P_{int} = A_0.\exp(-t/\tau)$ et d'une solution particulière de la forme $P_{int} = A_2 + A_3 t$.

Compte tenu des conditions initiales on trouve: $P_{int} = P_A + \alpha U_0(\tau - t - \tau.\exp(-t/\tau))$.

A-N: on calcule $\tau$ = 0,41 s, la constante de temps est médiocre pour une mesure en temps réel.

a) En projetant la RFD sur l'axe Ox du mouvement: $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = S(P_{int} - P_{atm})$

b) A partir de : $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = S(P_{int} - P_{atm}) = S(P_{int} - P_A + \alpha(z(t) - z_0))$; on obtient en dérivant :

$m\dddot{x} + h\ddot{x} + k\dot{x} = S\left(\frac{dP_{int}}{dt} + \alpha U_0\right)$, on peut éliminer $P_{int}$ dans: $\frac{dP_{int}}{dt} + \frac{1}{\tau}P_{int} = \frac{1}{\tau}[P_A - \alpha(z(t) - z_0)]$

on obtient : $m\tau\dddot{x} + (h\tau + m)\ddot{x} + (k\tau + h)\dot{x} + kx = \alpha\tau S U_0$ .

On peut aussi remplacer $P_{atm}$ et $P_{int}$ pour obtenir: $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = \alpha\tau S U_0(1 - \exp(-t/\tau))$ .

**II.B3)** a) Puisque $x_{part}$ est une solution particulière, il suffit de rechercher la solution générale $x_{gen}$ de: $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$.

Ce qui se fait en cherchant les racines de l'équation caractéristique : $mr^2 + hr + k = 0$

Le discriminant vaut : $\Delta = h^2 - 4mk$ qui par hypothèse est négatif, les racines sont complexes et la solution $x_{gen}$ est oscillatoire amortie.

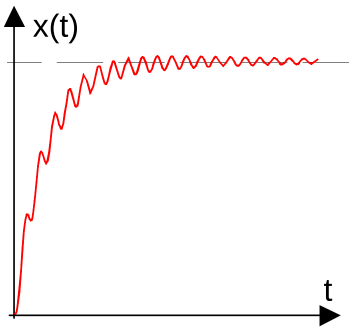
In fine : $x(t) = x_{part}(t) + x_{gen}(t) = x_{part}(t) + X_0\exp(-ht/2m)\cos\left[\sqrt{-\Delta}\,t/2m + \phi_0\right]$, $X_0$ et $\phi_0 = C^{te}$

b) Les conditions initiales sont : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

c) graphe = dérive oscillante autour de l'exponentielle.

d) Le déplacement maximal est environ la valeur finale de l'exponentielle.

soit $x_{max} = 4S\alpha U_0\tau\left|\frac{m - h\tau + k\tau^2}{(2k\tau - h)^2 - (h^2 - 4mk)}\right| = S\alpha U_0\frac{\tau}{k}$ ≈ 8,2 mm.

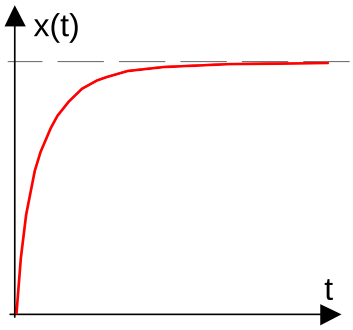



La variation de volume maximale du compartiment est $S.x_{max}$ < 0,2 % $V_0$.
Il est légitime de supposer le volume du variomètre constant.

**II.B.5)** Les oscillations pour arriver à la valeur finale sont gênantes. Pour une réponse rapide, l'idéal serait de placer l'oscillateur en régime critique, soit de réaliser $h^2 = 4mk$.

On peut choisir alors $m_c = 0{,}25.10^{-3}$ g , ce qui posera des problèmes de résistances mécaniques.

On peut choisir $k_c = 0{,}25.10^{-3}$ N.m$^{-1}$. Ce qui paraît peu réaliste avec des ressorts ordinaires.
On pourrait prendre $h_c = 0{,}063$ N.m$^{-1}$.s. Ce qui paraît possible, mais il faut aussi s'affranchir des frottements solides. Dans ce cas l'allure du graphe serait celui indiqué ci-contre.




II.B.6) a/ on a l'équation : $m\tau\dddot{x} + (h\tau + m)\ddot{x} + (k\tau + h)\dot{x} + kx = \alpha\tau S U_0$ .
On peut encore l'écrire sous la forme

$$m\tau\dddot{x} + (h\tau + m)\ddot{x} + (k\tau + h)\dot{x} + kx = \alpha\tau S\frac{dz}{dt} = \alpha\tau S\frac{d\xi}{dt}$$

Soit en régime harmonique : $m\tau(j\omega)^3\underline{x} + (h\tau + m)(j\omega)^2\underline{x} + (k\tau + h)(j\omega)\underline{x} + k\underline{x} = \alpha\tau Sj\omega\underline{\xi}$

La fonction de transfert est donc bien du type proposée avec :

$$\tau_0 = \frac{\alpha\tau S}{k} = \frac{\alpha S}{k}\frac{V_0}{\beta P_A} \quad \tau_1 = \tau + \frac{h}{k} = \frac{V_0}{\beta P_A} + \frac{h}{k} \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{h\tau + m}{k}} = \sqrt{\frac{hV_0 + m\beta P_A}{k\beta P_A}} \quad \tau_3 = \sqrt[3]{\frac{m\tau}{k}} = \sqrt[3]{\frac{mV_0}{k\beta P_A}}$$

b/ En BF: $\underline{H}(j\omega) = j\omega\tau_0$ soit 20 dB/decade et $\varphi = \pi/2$ . En HF: $\underline{H} = -\tau_0/\omega^2\tau_3^3$ soit 40 dB/décade et $\varphi = -\pi$.

C'est confirmé par les graphes proposés. Le variomètre doit indiquer la vitesse soit: $x = \lambda\dot{\xi}$, la fonction de transfert doit s'écrire. $\underline{H}(j\omega) = j\omega\lambda$ , c'est le cas en basse fréquence. D'après la courbe de gain on peut préciser qu'il faut $\omega < 2{,}5$ rad.s$^{-1}$. Ce qui exclue les variations trop rapides des conditions de vol.

# Partie III - Variomètre à affichage électronique

## III.A - Étude du système de capacités différentielles

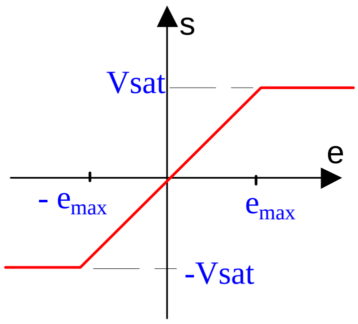
**III.A.1)** On a simplement : $C_{1a} = C_{1b} = \dfrac{\varepsilon S}{e_0 + x}$ $\quad C_{2a} = C_{2b} = \dfrac{\varepsilon S}{e_0 - x}$ .

**III.A.2)** On calcule avec les valeurs fournies: $C_0 = 4{,}8$ nF

## III.B - Oscillateur à pont de Wien

**III.B.1)** a) Modèle de l'AO idéal : courants d'entrée $i^+ = i^- = 0$ et en régime linéaire $V^+ = V^-$.
Le montage proposée est un ampli non inverseur de gain $\underline{F} = 1 + R_2/R_1$ .
Les limitations pratiques sont de plusieurs natures:
- limitation en courant: le courant de sortie ne peut dépasser une certaine limite (de l'ordre de 0,1 A)
- limitation en entrée: la tension de sortie ne peut dépasser ±Vsat - de l'ordre de 13 V)
- limitation en fréquence: l'AO se comporte comme un filtre passe-bas ($f_c$ de quelque kHz)

b) Avec $e_{max} = V_{sat}/F$ , la caractéristique est représentée ci-contre.

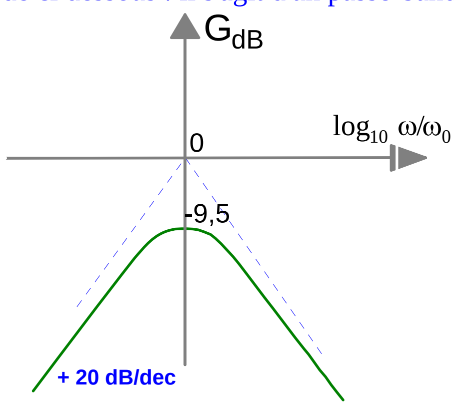


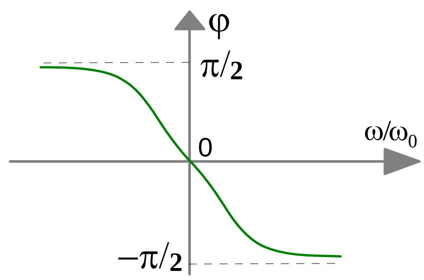

**III.B.2)** a/ On reconnaît un diviseur de tension: $\underline{G} = \dfrac{Z_{//}}{Z_{//} + Z_+} = \dfrac{1}{1 + Z_+/Z_{//}} = \dfrac{1}{1 + Z_+Y_{//}}$

Ce qui conduit à $\underline{G} = \dfrac{1}{1 + (R + 1/jC\omega)(1/R + jC\omega)} = \dfrac{1}{3 + 1/jRC\omega + jRC\omega}$

- fréquence de résonance $\omega_0 = 1/RC$ : - facteur de qualité: Q = 1/3 : - gain maximum : $G_{max} = 1/3$

b/ graphe de Bode ci dessous : il s'agit d'un passe-bande



**III.B.3**)a/ On constate que $F.G = \frac{s}{e}\frac{s'}{e'} = \frac{s}{e}\frac{e}{s} = 1$.
Puisque F est réel il faut G soit réel également et que sa partie réelle soit égale à 1/F.
Il faut donc $0 = 1/jRC\omega + jRC\omega$ et $1 + R_2/R_1 = 3$. Soit $f = 1/(2\pi RC)$ et $r = R_2/R_1 = 2$.

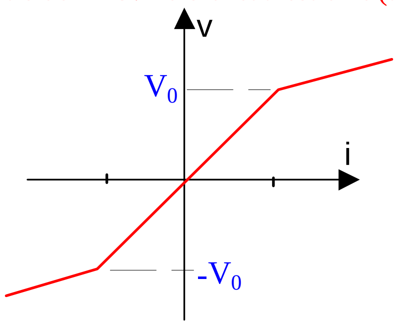
b/ Pour le filtre de Wien: $\frac{\underline{s}'}{\underline{e}'} = \frac{1}{3 + 1/jRC\omega + jRC\omega} \Rightarrow \underline{s}' + 3jRC\omega\underline{s}' + (jRC\omega)^2\underline{s}' = jRC\omega\underline{e}'$

Et pour l'ampli non inverseur : $\frac{\underline{e}'}{\underline{s}'} = 1 + r$ donc $\underline{s}' + 3jRC\omega\underline{s}' + (jRC\omega)^2\underline{s}' = jRC\omega(1+r)\underline{s}'$

Ce qui correspond à l'équation différentielle: $(RC)^2\frac{d^2s'}{dt^2} + RC[2-r]\frac{ds'}{dt} + s' = 0$.

Dans le cas r = 2, l'équation est celle d'un oscillateur harmonique de fréquence propre $f = 1/(2\pi RC)$.
On retrouve les résultats de la question précédente.
A-N: f = 3316 Hz. Pour cette fréquence le comportement fréquentielle de l'AO peut-être ignoré.
c) Le montage ne comporte pas de GBF, c'est donc le "bruit" environnant qui démarre les oscillations. Celles-ci ont des amplitudes extrêmement faibles, mais si les paramètres sont adaptés elles seront amplifiées. Pour cela il faut que l'exposant de l'exponentielle solution de l'equa-diff soit positif, soit r > 2.
Avec les valeurs catalogues on calcule : 10/4,7 = 2,12 et 10/5,6 = 1,78 .
Le seul choix est donc $R_1 =$ 4,7 kΩ.
d) Si la valeur de $R_1$ est très grande alors les oscillations qui prennent naissance dans le circuit sont amorties et aucun signal n'est perceptible en sortie.
En diminuant $R_1$ on passe par la valeur critique $R_2/2$ et les oscillations provenant du bruit ne sont pas amorties mais elles ne sont pas non plus amplifiées. L'amplification débutera lorsque $R_1 > R_2/2$ soit r > 2.
L'amplification va conduire la sortie en saturation. On arrive donc à cette conclusion que les oscillations ont une amplitude imposée : $e'_{max} = V_{sat}$ et par conséquent $s'_{max} = 1/3V_{sat} \approx 4{,}33$ V.
Lorsque $R_1$ a une faible valeur le domaine de linéarité défini par $e_{max} = V_{sat}/F$ est quasi nul et l'AO est en saturation quasi en permanence. L'équation différentielle doit être reprise en faisant $e' = \pm V_{sat}$ = Cte (ce qui revient à faire F = 0 ou r = –1). Les solutions pour s' sont alors exponentielles amorties et on a un oscillateur à relaxation très peu sinusoïdal.
En considérant uniquement le fondamental du créneau et la fonction G(ω) on peut dire que le fondamental de s'(t) est une sinusoïde d'amplitude $4/3.V_{sat}/\pi \approx 5{,}5$ V.
Il est normal de ne garder que le fondamental du créneau car le filtre passe-bande est suffisamment sélectif (20 dB/décade) et élimine les autres harmoniques qui ont déjà une amplitude plus réduite.
Il semble qu'il y ait confusion dans l'énoncé entre sortie s'(t) et sortie de l'AO. Le créneau est en e'(t) !

**III.B.4)** a/ La branche comportant $R_3$ n'est passante que si $|v| > V_0 = v_Z + v_D$ .Donc
si $|v| > V_0$ alors $v = (R_3//R_2).(i \pm V_0/R_3)$
sinon $v = R_2.i$
D'où la caractéristique ci-contre.
b) Quand l'amplitude des oscillations dépassent $V_0$, elles sont rapidement amorties et ramenées vers $V_0$ qui agit comme une régulation. L'oscillation se fait autour de $V_0$ et non de $V_{sat}$ .




**III.C - Étude globale du capteur**
On écrit $v_m(t) = k_m.v_1(t).v_2(t) = k_m.A^2.\cos(\omega_1 t).\cos(\omega_2 t) = ½\, k_m.A^2\{\cos[(\omega_1+\omega_2)t] + \cos[(\omega_1-\omega_2)t]\}$
La cellule (R',C') étant un filtre passe-bas de fréquence de coupure $\omega_c = 1/R'C'$ il faut :
$\omega_c > \omega_1+\omega_2$ et $\omega_c < |\omega_1-\omega_2|$ On pourra prendre par exemple $\omega_c = 1/RC_0$.

La tension de sortie est alors $V_s = \gamma\,|f_1-f_2|$ soit $V_s = \frac{\gamma}{2\pi}\left(\frac{1}{RC_1} - \frac{1}{RC_2}\right) = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{e_0+x}{RS} - \frac{e_0-x}{RS}\right)$

Soit $V_s = \frac{\gamma x}{\pi RS\varepsilon} = \frac{\gamma\lambda}{\pi RS\varepsilon}V_z$ .