

Marées océaniques
Partie I - Théorie statique des marées

I.A - Définition de la force de marée

I.A.1) $\vec{a}_{T/(R_0)} = \vec{G}(T) = \sum_A \frac{kM_A \vec{TA}}{TA^3}$ est égal au champ gravitationnel $\vec{G}(T)$ créé au centre T de la Terre par les

astres (A) autres que la Terre, essentiellement le Soleil et la Lune.

I.A.2) Soit H la projection de P sur l'axe de rotation de la Terre ; P décrit dans (R_T) un mouvement circulaire uniforme de centre H : $\vec{a}_{P/(R_T)} = -\Omega^2 \vec{HP}$.

La composition des accélérations donne : $\vec{a}_{P/(R_0)} = \vec{a}_{P/(R_T)} + \vec{a}_{T/(R_0)} = -\Omega^2 \vec{HP} + \vec{G}(T)$.

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$m\vec{a}_{P/(R_0)} = m\vec{G}(P) + m\vec{G}_T(P) + \vec{f} \Rightarrow \boxed{m(\vec{G}(P) - \vec{G}(T)) + m\vec{G}_T(P) + m\Omega^2 \vec{HP} + \vec{f} = \vec{0}}$, où $\vec{G}_T(P)$ est le champ gravitationnel de la Terre en P .

I.A.3) Le terme $m\vec{G}_T(P) + m\Omega^2 \vec{HP} = m\vec{g}$ ne varie pas au cours du temps ; c'est le poids ;

$\vec{g} = \vec{X}(P) = \vec{G}_T(P) + \Omega^2 \vec{HP}$ est l'accélération de la pesanteur.

Le terme $m(\vec{G}(P) - \vec{G}(T))$ varie au cours du temps à cause du mouvement des astres dans (R_{sol}) ; c'est la force de marée $m \sum_A \vec{C}_{AT}(P)$.

I.B - Calcul de la force de marée

Démontrons l'expression donnée (calcul non demandé) de $\vec{C}_{AT}(P)$, sans supposer $TP = R_T$ (ce qui est préférable pour la suite) :

$$\vec{C}_{AT}(P) = kM_A \left(\frac{\vec{PA}}{PA^3} - \frac{\vec{TA}}{TA^3} \right)$$

$$\vec{PA} = \vec{TA} - \vec{TP}$$

$$PA^2 = TP^2 + TA^2 - 2 \cdot TA \cdot TP \cdot \cos \hat{Z}_A$$

Développons jusqu'à l'ordre 1 en TP/TA

$$PA^{-3} = TA^{-3} \left(1 - 2 \frac{TP}{TA} \cos \hat{Z}_A + \dots \right)^{-3/2} = TA^{-3} \left(1 + 3 \frac{TP}{TA} \cos \hat{Z}_A + \dots \right)$$

$$\vec{C}_{AT}(P) = kM_A \left[\frac{\vec{TA} - \vec{TP}}{PA^3} - \frac{\vec{TA}}{TA^3} \right] = kM_A \left[-\frac{\vec{TP}}{TA^3} + 3 \frac{TP \cdot \vec{TA}}{TA^4} \cos \hat{Z}_A + \dots \right]$$

soit en projetant sur les axes : $\vec{C}_{AT}(P) = \frac{kM_A}{TA^3} (2x\vec{e}_x - y\vec{e}_y - z\vec{e}_z)$.

I.B.1) Le maximum de $\frac{\|\vec{C}_{AT}(P)\|}{\|\vec{G}_T(P)\|}$ à la surface de (T) a lieu en P_1 ; il vaut

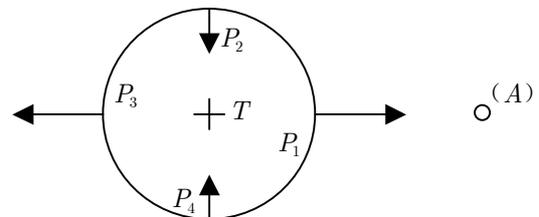
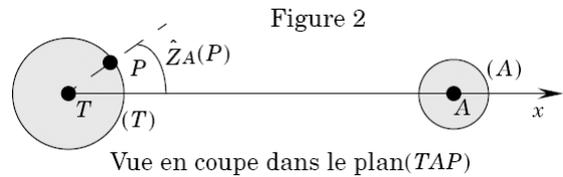
$$\frac{2kM_L R_T / kM_T}{TL^3} / \frac{kM_T}{R_T^2} = 2 \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{TL} \right)^3 = \frac{2}{81} \left(\frac{6,4}{380} \right)^3 = 1,2 \times 10^{-7}.$$

I.B.2) Ci-contre est représenté \vec{C}_{AT} aux quatre points demandés. En module, le terme de marée est le même en P_1 et P_3 et il vaut moitié moins en P_2 et P_4 .

I.B.3) Si V_{AT} existe, il satisfait à

$$dV_{AT} = \overrightarrow{\text{grad}}_P(V_{AT}(P)) \cdot d\vec{P} = -\vec{C}_{AT}(P) \cdot d\vec{P} \\ = \frac{kM_A}{TA^3} (-2xdx + ydy + zdz)$$

On en déduit que V_{AT} existe et que $V_{AT} = \frac{kM_A}{2TA^3} (-2x^2 + y^2 + z^2)$ (à une constante additive près).



I.B.4) $x = TP \cos \hat{Z}_A$ et $y^2 + z^2 = TP^2 - x^2$ montrent que

$$-2x^2 + y^2 + z^2 = TP^2 - 3x^2 = TP^2 (1 - 3 \cos^2 \hat{Z}_A)$$

$$(1) \quad V_{AT} = \frac{k \cdot M_A \cdot TP^2}{2 \cdot TA^3} (1 - 3 \cos^2 \hat{Z}_A)$$

I.C - Modèle statique de la marée océanique

I.C.1) Selon la loi fondamentale de la statique des fluides, le gradient de la pression p au point M est égal à la force volumique autre que celle de pression : $\overrightarrow{\text{grad}}p = \mu \left(\vec{g} + \sum_A \vec{C}_{AT} \right)$. Pour un petit déplacement $d\vec{M}$ du point M , la variation de pression est $dp = \overrightarrow{\text{grad}}p \cdot d\vec{M} = \mu \left(\vec{g} + \sum_A \vec{C}_{AT} \right) \cdot d\vec{M}$. Comme la surface de l'Océan est isobare, l'ensemble des déplacements $d\vec{M}$ tangents à sa surface doit être tel que $dp = 0$, donc tous ces déplacements sont perpendiculaires à $\vec{g} + \sum_A \vec{C}_{AT}$: $\vec{g} + \sum_A \vec{C}_{AT}$ est normal à la surface de l'Océan.

I.C.2) A la surface de l'Océan,

$$\mu \left(\vec{g} + \sum_A \vec{C}_{AT} \right) \cdot d\vec{M} = 0$$

$$\left(-\overrightarrow{\text{grad}}(gz) - \sum_A \overrightarrow{\text{grad}}V_{AT} \right) \cdot d\vec{M} = 0$$

$$gz + \sum_A V_{AT} = cste$$

$$\frac{kM_T}{R_T^2} \xi + \sum_A \frac{k \cdot M_A \cdot TP^2}{2 \cdot TA^3} (1 - 3 \cos^2 \hat{Z}_A) = cste$$

$$\xi = \sum_A \frac{k \cdot M_A \cdot R_T^2}{2 \cdot g \cdot TA^3} (3 \cos^2 \hat{Z}_A - 1) + cste$$

$$\xi = \sum_A \frac{M_A \cdot R_T^4}{2 \cdot M_T \cdot TA^3} (3 \cos^2 \hat{Z}_A - 1) + cste$$

$$\Delta \xi_L = \frac{3 \cdot M_L \cdot R_T^4}{2 \cdot M_T \cdot TL^3} = \frac{3 \times (6,4 \times 10^6)^4}{2 \times 81 \times (3,8 \times 10^8)^3} = 0,57 \text{ m}$$

si la Lune passe par le zénith.

Il y a environ deux marées hautes et deux marées basses par jour, car les astres ne se meuvent que peu en un jour dans le référentiel géocentrique, ils font environ un tour en un jour dans le référentiel terrestre et $\cos^2 \hat{Z}_A$ passe par un minimum nul et un maximum égal à 1 deux fois par jour.

$$\Delta \xi_S = \frac{3 \cdot M_S \cdot R_T^4}{2 \cdot M_T \cdot TS^3} = \frac{3 \times 3,3 \times 10^5 \times (6,4 \times 10^6)^4}{2 \times (1,5 \times 10^{11})^3} = 0,25 \text{ m}$$

I.C.3) Si T , L et S (pleine lune ou nouvelle lune) sont alignés, $\cos^2 \hat{Z}_S = \cos^2 \hat{Z}_L$ et le marnage est maximum ; il vaut $\Delta \xi_{VE} = \Delta \xi_L + \Delta \xi_S = 0,82 \text{ m}$.

Si $TL \perp TS$ (premier ou dernier quartier), $\cos^2 \hat{Z}_S = 1 - \cos^2 \hat{Z}_L$ et le marnage est minimal ; il vaut $\Delta \xi_{ME} = \Delta \xi_L - \Delta \xi_S = 0,32 \text{ m}$.

Le Soleil est dans le plan de l'Equateur aux équinoxes, donc les marées de vives eaux sont plus fortes à ce moment.

Partie II - Ondes de gravité dans un bassin de faible profondeur

II.A - Équations constitutives

II.A.1) L'hypothèse H - II - 8, compte tenu de $v_z = 0$, s'écrit $\frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$. Les deux premières équations montrent que \vec{v} ne dépend pas de z .

II.A.2) La colonne d'océan d'axe vertical, de section droite rectangulaire $dx \cdot dy$ infinitésimale s'étendant depuis le fond jusqu'à la surface libre, a pour volume $(H + \xi) \cdot dx \cdot dy$;

Le débit sortant de volume à travers ses faces parallèles à Oyz est

$$(H + \xi(x + dx)) \cdot dy \cdot v_x(x + dx) - (H + \xi(x)) \cdot dy \cdot v_x(x) = \frac{\partial [(H + \xi) v_x]}{\partial x} \cdot dx \cdot dy ;$$

celui à travers ses faces parallèles à Oxz est

$$(H + \xi(y + dy)) \cdot dx \cdot v_y(y + dy) - (H + \xi(y)) \cdot dx \cdot v_y(y) = \frac{\partial[(H + \xi)v_y]}{\partial y} \cdot dx \cdot dy.$$

Le volume net sortant est égal à la diminution de volume de la colonne, soit :

$$\frac{\partial[(H + \xi)v_x]}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial[(H + \xi)v_y]}{\partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{d(H + \xi)}{dt} \cdot dx \cdot dy = 0 ; \text{ d'où :}$$

$$(2) \quad \text{div}[(H + \xi)\vec{v}] + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

II.A.3) Le bilan de matière pour un fluide incompressible donne $\text{div } \vec{v} = 0$. Les hypothèses posées font que l'on a obtenu une autre équation. Ce paradoxe n'est qu'apparent ; il est dû à ce que l'équation (2) est bidimensionnelle, tandis que l'équation $\text{div } \vec{v} = 0$ est tridimensionnelle ; dans la conception tridimensionnelle, si un fluide incompressible a une sortie horizontale nette de volume, il doit avoir une entrée verticale nette de volume ; mais, dans la conception bidimensionnelle, une sortie horizontale nette de volume se traduit par une diminution de ξ .

II.A.4)

$$(3) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}P$$

Projetons sur la verticale : $0 = -g - \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z}$; d'où $P = P_0 + \mu g(H + \xi - z)$.

Remarque : nous avons négligé le terme de marée devant g .

Le champ de pression peut être qualifié d'hydrostatique, car son expression en fonction de la profondeur est la même qu'en statique des fluides.

II.B - Équations de la propagation

II.B.1) On linéarise les équations pour calculer de petites variations, des petites oscillations (pendule) ou des ondes de faible amplitude (acoustique).

II.B.2)

$$(4) \quad H \text{div } \vec{v} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

II.B.3) En ne considérant que les coordonnées horizontales : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}P$; compte tenu de A.4 :

$$(5) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -g \overrightarrow{\text{grad}} \xi$$

I.B.4) En dérivant (4) par rapport au temps et en y remplaçant $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ par $-g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \xi$, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - H \cdot g \cdot \Delta \xi = 0}.$$

En dérivant (5) par rapport au temps et en y remplaçant $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ par $-H \text{div } \vec{v}$, on obtient

$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - H \cdot g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{v}) = \vec{0}$. Comme $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{v}) - \Delta \vec{v}$ et comme $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \vec{0}$, on aboutit à

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - H \cdot g \cdot \Delta \vec{v} = \vec{0}}.$$

Ce sont des équations d'onde, ou équations de d'Alembert, de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$. La vitesse de propagation est $c = \sqrt{Hg}$. Cette relation est homogène, car $[c] = LT^{-1}$, $[H] = L$ et $[g] = LT^{-2}$.

II.B.5) Appliquons $H = c^2 / g$

entre A et B : $H = (16000 / (15 \times 60))^2 / 9,8 = 32 \text{ m}$;

entre B et C : $H = (36000 / (36 \times 60))^2 / 9,8 = 28 \text{ m}$.

Il n'est pas étonnant que la profondeur augmente un peu quand on se dirige vers la pleine mer.

Partie III - Amplitude des ondes de marée dans une mer semi-ouverte

III.A - Résonance de marée dans une baie

III.A.1) Si la longueur est plus grande que la largeur, on peut espérer que ξ dépend peu de y .

Comme l'équation des ondes est linéaire, elle est séparément vérifiée par chaque terme d'un développement en série de Fourier.

$$\text{III.A.2) L'équation des ondes } \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \text{ devient } c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \omega^2 f = 0 \Rightarrow f(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}$$

$$\text{III.A.3) En } x = L, v_x = 0, \text{ compte tenu de (5) s'écrit : } \frac{\partial \xi}{\partial x}(x = L, t) = 0.$$

$$\text{III.A.4) } \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(-\frac{A\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c} + \frac{B\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \right) \cos(\omega t + \varphi).$$

Les conditions aux limites sur $\xi(x, t)$ sont $\xi(0, t) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et $\frac{\partial \xi}{\partial x}(L, t) = 0$. D'où

$$A = \xi_0 \text{ et } -\frac{\xi_0 \omega}{c} \sin \frac{\omega L}{c} + \frac{B\omega}{c} \cos \frac{\omega L}{c} = 0 \Rightarrow B = \xi_0 \tan \frac{\omega L}{c};$$

$$\xi = \xi_0 \left(\cos \frac{\omega x}{c} + \tan \frac{\omega L}{c} \sin \frac{\omega x}{c} \right) \cos(\omega t + \varphi).$$

$$\text{III.A.5) Il y a résonance au voisinage de } \tan \frac{\omega L}{c} = \infty \quad \frac{\omega L}{c} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad \boxed{L = (2n+1) \frac{\lambda}{4}} \quad (n \text{ entier}).$$

$$\text{Pour } n = 1, \sqrt{gH} = c = \frac{2\omega L}{\pi} = \frac{4L}{T_0} \quad \boxed{H = \frac{16L^2}{gT_0^2}} = \frac{16 \times 250000^2}{9,8 \times (12,4 \times 3600)^2} = \boxed{51 \text{ m}}$$

On vérifie bien $H \ll \lambda = 4L = 1000 \text{ km}$.

III.B - Amplitude de la marée dans une mer fermée

$$\text{III.B.1) L'équation des ondes a pour solution } g(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}.$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(-\frac{A\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c} + \frac{B\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \right) \cos(\omega t + \varphi). \text{ Choisissons l'origine des } x \text{ à une extrémité de la mer. Les}$$

conditions aux limites $\frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(L, t) = 0$ donnent $B = 0$ et $A \sin \frac{\omega L}{c} = 0$, soit $A = 0$ et $B = 0$ sauf si

$$\sin \frac{\omega L}{c} = 0. \text{ Il n'y a de solution stationnaire que si } \frac{\omega L}{c} = n\pi \quad \boxed{L = n \frac{\lambda}{2}} \quad (n \text{ entier}). \text{ Alors, } B = 0 \text{ et } A \text{ est}$$

indéterminé : $\xi = A \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \omega t$. Sinon, la seule solution stationnaire est $\xi(x, t) = 0$.

$$\text{III.B.2) Les formules utilisées jusque maintenant donnent } c = \sqrt{gH} = \sqrt{9,8 \times 2000} = 140 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et}$$

$\lambda/2 = cT_0/2 = 140 \times 12,4 \times 3600/2 \text{ m} = 3100 \text{ km}$; le bassin occidental de la Méditerranée a pour longueur $\lambda/4$, d'où une marée peu importante.

La formule $c = \sqrt{gH}$ peut paraître douteuse, car valable pour H faible; H est toutefois faible devant les autres longueurs, λ et L , utilisées ici; l'autre longueur caractéristique du problème est

$$gT_0^2 = 9,8 \times (12,4 \times 3600)^2 = 2 \times 10^{10} \text{ m}, \text{ devant laquelle } H = 2000 \text{ m} \text{ est négligeable.}$$

Partie IV - Influence de la rotation de la Terre sur les marées océaniques dans un bassin limité

IV.A - Mise en équation des ondes de gravité tenant compte de la composante horizontale de la force de Coriolis

IV.A.1) La force de Coriolis s'exerçant sur une particule fluide de volume dV est $d\vec{F}_C = -2\mu dV \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$; $dF_{Cx} = 2\mu dV \Omega \sin \Lambda v_y$, $dF_{Cy} = -2\mu dV \Omega \sin \Lambda v_x$; d'où $dF_{Cx} \cdot v_x + dF_{Cy} \cdot v_y = 0$: la composante horizontale de la force de Coriolis est perpendiculaire à la vitesse.

La grandeur de la force de Coriolis, $2\mu dV \Omega \sin \Lambda v$ est indépendante de la direction de Ox , donc la direction de Ox ne joue pas de rôle dans la relation entre la force de Coriolis et la vitesse.

$$\text{IV.A.2) L'équation d'Euler devient } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\mu} \text{grad} P - 2\Omega \sin \Lambda \vec{e}_z \wedge \vec{v} \text{ et sa forme linéarisée est :}$$

$$(6) \quad \boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{g} - \frac{1}{\mu} \text{grad} P - 2\Omega \sin \Lambda \vec{e}_z \wedge \vec{v}}.$$

Si on projette cette équation sur la verticale, on retrouve $\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g \Rightarrow P = P_0 + \mu g(H + \xi - z)$.

IV.A.3) On cherche une onde de marée de la forme : $\xi(x, y, t) = \text{Re}(f(x, y) \exp(i\omega t))$ et $\vec{v}(x, y, z, t) = \text{Re}\left[\left(\underline{v}_x(x, y) \exp(i\omega t)\right)\vec{e}_x + \underline{v}_y(x, y) \exp(i\omega t)\vec{e}_y\right]$.

Projetons l'équation (6) sur Ox et Oy , en omettant de prendre la partie réelle et en notant $\gamma = 2\Omega \sin \Lambda$:

$$\begin{cases} i\omega \underline{v}_x = -g \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \underline{v}_y \\ i\omega \underline{v}_y = -g \frac{\partial f}{\partial y} - \gamma \underline{v}_x \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire en \underline{v}_x et \underline{v}_y donne

$$\underline{v}_x = \frac{g}{\omega^2 - \gamma^2} \left(i\omega \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \underline{v}_y = \frac{g}{\omega^2 - \gamma^2} \left(i\omega \frac{\partial f}{\partial y} - \gamma \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

IV.A.4) Le bilan de volume de la question II.B.2 reste valable ; sa linéarisation reste valable donc l'équation (4) l'est aussi : $H \left(\frac{\partial \underline{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{v}_y}{\partial y} \right) + i\omega f = 0$; d'où, en y portant les expressions de \underline{v}_x et \underline{v}_y : $f = \frac{gH}{\gamma^2 - \omega^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$, soit : $\Delta f + \frac{\omega^2 - \gamma^2}{gH} f = 0$.

Formellement, si on fait $\gamma = 0$, on trouve l'équation résolue en III.

$$\omega \text{ est supérieur à } \gamma = 2\Omega \sin \Lambda \text{ si } \Lambda < \arcsin \frac{\omega}{2\Omega} = \arcsin \frac{\tau_r}{2T_0} = \arcsin \frac{86164}{2 \times 12,4 \times 3600} = 75^\circ.$$

L'onde n'est harmonique que si $|\Lambda| < 75^\circ$, ce qui correspond à la totalité des cas réels d'application possibles.

IV.B - La solution particulière des ondes de Kelvin

IV.B.1) En $y = \pm b$, la conservation de la matière se traduit par $v_y = 0$ quels que soient x et t , soit compte tenu de

$$A.3 : \left(i\omega \frac{\partial f}{\partial y} - \gamma \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y=\pm b} = 0.$$

IV.B.2.a) $f = \xi_0 \exp\left(-\frac{\gamma y + i\omega x}{c}\right)$, où $c = \sqrt{Hg}$, est une solution de l'équation de propagation de IV.A.4, car

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} f \text{ et } \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} f, \text{ donc } \Delta f = \frac{\gamma^2 - \omega^2}{Hg} f.$$

La condition aux limites de IV.B.1. est également vérifiée, car $\gamma \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{i\omega\gamma}{c} f$ et $-i\omega \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{i\omega\gamma}{c} f$.

IV.B.2.b) Pour l'onde de Kelvin, $v_y = 0$ est vrai en tout point, alors que cette condition n'est imposée que sur les rives du canal. Elle est donc possible pour tout canal de largeur et profondeur constantes. Elle se propage avec la vitesse $\vec{c} = \sqrt{Hg} \vec{e}_x$ et avec une amplitude fonction croissante de y . Elle n'est valable que dans une mer limitée, car si $y \rightarrow +\infty$, $|f| \rightarrow \infty$.

IV.B.2.c) Les lignes d'égale amplitude (en pointillé) sont les parallèles à Ox ; les lignes d'égale phase (en traits pleins) sont les parallèles à Oy .

IV.B.3.a) Supposons le canal suffisamment large, situé dans l'hémisphère nord ($\gamma > 0$) et a ni trop petit, ni trop grand. Près de la rive $y = -b$,

$$\xi(x, y, t) \simeq \xi_0 \cdot \text{Re} \left(\exp \left(i\omega t - \frac{\gamma y + i\omega x}{c} \right) \right) : \text{l'onde se propage dans le sens de}$$

$$Ox ; \text{ près de la rive } y = b, \underline{\xi}(x, y, t) = a\xi_0 \exp \left(i\omega t + \frac{\gamma y + i\omega x}{\sqrt{gH}} \right) : \text{l'onde se propage dans le sens contraire de } Ox.$$

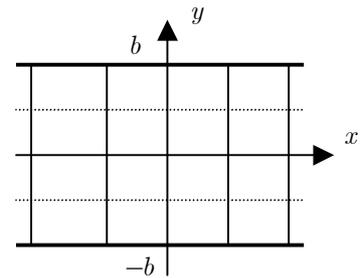
Loin des rives, le marnage est beaucoup plus faible.

Dans l'hémisphère sud, les sens de propagations sont inversés, car $\gamma < 0$.

IV.B.3.b) Ne supposons pas $a = +1$ et cherchons les lieux où le marnage est nul : $f = 0$.

$$\exp \left(-\frac{\gamma y + i\omega x}{c} \right) + a \cdot \exp \left(+\frac{\gamma y + i\omega x}{c} \right) = 0$$

Séparons les parties réelles et imaginaires :



$$\operatorname{Re}(f) = 0 \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{\gamma y}{c}\right) + a \cdot \exp\left(\frac{\gamma y}{c}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\frac{\omega x}{c} = 0$$

$$\operatorname{Im}(f) = 0 \Leftrightarrow -\exp\left(-\frac{\gamma y}{c}\right) + a \cdot \exp\left(\frac{\gamma y}{c}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\omega x}{c} = 0$$

Si $a > 0$, la condition est $\cos\frac{\omega x}{c} = 0$ et $\exp\left(-\frac{2\gamma y}{c}\right) = a$, soit $x = \frac{\lambda}{4} \text{ modulo } \frac{\lambda}{2}$ et $y = -\frac{c}{2\gamma} \ln a$ (en effet, une somme de deux exponentielles d'arguments réels ne peut être nulle); dans le cas de l'énoncé, $a = 1$ $y = 0$.

Ce résultat n'est pas surprenant, c'est la disposition classique des nœuds d'une onde stationnaire.

IV.B.3.c) Ne supposons pas $a = +1$. Le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(x, y, t) = \xi_0 \sqrt{\frac{g}{H}} \operatorname{Re} \left(\exp(i\omega t) \left[\exp\left(-\frac{\gamma y + i\omega x}{c}\right) - a \cdot \exp\left(\frac{\gamma y + i\omega x}{c}\right) \right] \right) \vec{e}_x.$$

Le courant est nul si $\underline{v_x} = 0$

$$\operatorname{Re}(\underline{v_x}) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{\omega x}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad \exp\left(-\frac{\gamma y}{c}\right) - a \cdot \exp\left(\frac{\gamma y}{c}\right) = 0$$

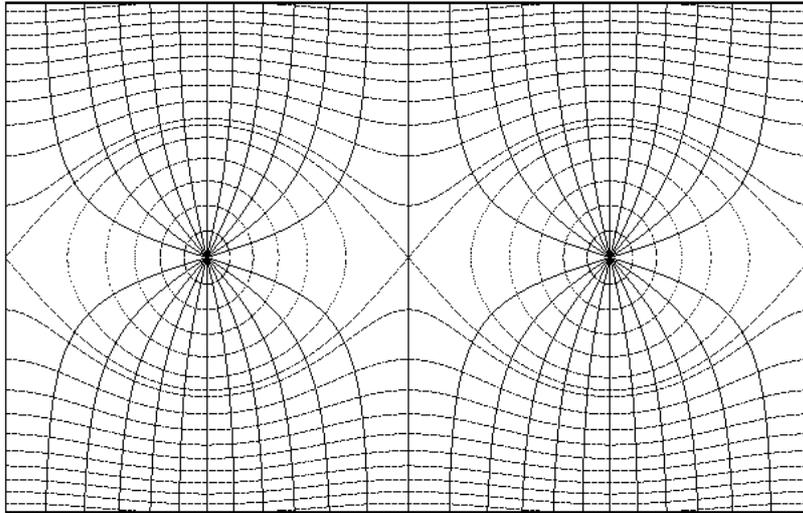
$$\operatorname{Im}(\underline{v_x}) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{\omega x}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad \exp\left(-\frac{\gamma y}{c}\right) + a \cdot \exp\left(\frac{\gamma y}{c}\right) = 0$$

Si $a > 0$, la condition est $x = 0 \text{ modulo } \frac{\lambda}{2}$ et $y = -\frac{c}{2\gamma} \ln a$ ($y = 0$ dans le cas de l'énoncé).

En ces points, le courant est nul et l'amplitude de la marée est maximum en tant que fonction de x (mais elle est minimum en tant que fonction de y).

Aux points amphidromiques, le courant est maximum en tant que fonction de x (mais il est minimum en tant que fonction de y).

IV.B.3.d) Voici un tracé plus précis que celui de la figure 5 des lignes cotidales (en trait plein, $\varphi = n\pi/12$) et des



lignes d'égal amplitude (en pointillé) pour $\Lambda = 55^\circ$:

Sur la rive $y = -b$, comme $\varphi(x, y)$ est fonction croissante de x , pour une valeur déterminée de l'argument du \cos , t est fonction croissante de x : l'onde se propage dans le sens de Ox .

Sur la rive $y = b$, comme $\varphi(x, y)$ est fonction décroissante de x , pour une valeur déterminée de l'argument du \cos , t est fonction décroissante de x : l'onde se propage dans le sens contraire de Ox .

En A et C , la phase est indéterminée : A et C sont de points amphidromiques. B est un point de courant nul.

IV.B.3.e) Les points amphidromiques sont observables dans le canal si $|y_0| < b - \frac{\sqrt{gH}}{2\gamma} |\ln|a|| < b$.

IV.B.3.f) En Mer du Nord : on voit trois points amphidromiques, régulièrement espacés de 3° de latitude, soit $0,1$ radian ou 640 km ; $\lambda = 1300 \text{ km}$ $H = \frac{\lambda^2}{gT_0^2} = \frac{(1,3 \times 10^6)^2}{9,8 \times (12,4 \times 3600)^2} = 90 \text{ m}$. L'onde de marée se propage sur la rive

britannique dans le sens nord-sud et sur la rive scandinave dans le sens sud-nord, conformément à la théorie précédente.

Au large de l'Angleterre, l'amplitude de la marée varie de 3 m à 1 m quand on s'écarte de la côte d'une distance de $3,5^\circ$ de longitude, soit environ $\frac{3,5}{360} 2\pi \times 6400 \times \sin 55^\circ = 320 \text{ km}$, d'où le calcul approximatif de la profondeur :

$$\exp\left(\frac{\gamma D}{\sqrt{gH}}\right) = 3 \Rightarrow H = \frac{1}{g} \left(\frac{\gamma D}{\ln 3}\right)^2 = \frac{1}{g} \left(\frac{2\Omega D \sin \Lambda}{\ln 3}\right)^2 = \frac{1}{9,8} \left(\frac{2 \times 7,3 \times 10^{-5} \times 3,2 \times 10^5 \times \sin 55^\circ}{\ln 3}\right)^2 = 120 \text{ m} ; \text{l'ordre}$$

de grandeur est en accord avec celui du calcul précédent ; la précision est moins bonne, car l'expression théorique utilisée est approchée.

On observe aussi, dans la région du Pas de Calais, que l'amplitude de la marée croît lorsque la largeur du canal décroît.

En Manche, il y a un point amphidromique virtuel sur la terre ferme anglaise d'où divergent les lignes cotidales au niveau du Cotentin près des côtes anglaises. Ce point est distant du point amphidromique le plus proche dans la Mer du Nord de 6° de longitude, distance du même ordre que celle entre points amphidromiques dans la Mer du Nord. On verrait sur une carte plus complète que les marées sont plus fortes sur la cote du Cotentin que sur la côte anglaise située en face.

Appendice.

Voici le programme maple qui a tracé la figure 5 ; on note gamma55 la quantité γ/ω .

```
> restart:with(plots):
> gamma55:=evalf(2*12.4*sin(55*Pi/180)/24);
> graml:=plot([seq(arccosh(i^2/16-cos(2*x))/(2*gamma55),i=1..16),seq(-
arccosh(i^2/16-cos(2*x))/(2*gamma55),i=1..16),arccosh(2-cos(2*x))/(2*gamma55),-
arccosh(2-cos(2*x))/(2*gamma55)],x=0..2*Pi,-2..2,color=black,
numpoints=500,linestyle=7):
> ens:={seq(i,i=-5..-1),seq(i,i=1..5)};
grphi:=plot([seq(arctanh(cot(x)/tan(i*Pi/12)/gamma55),i in ens)],x=0..2*Pi,-
2..2,color=black, numpoints=500):
> gr0:=plot({[[0,2],[2*Pi,2]],[[0,-2],[2*Pi,-2]],seq([[i*Pi/2,-
2],[i*Pi/2,2]],i=0..4)},color=black,thickness=[2,2,0,0,0,0,0]):
> display({graml,grphi,gr0},scaling=constrained,axes=none);
```