Centrale PC 2001

Préambule

-a- $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \overset{\text{vide}}{=} 0$; $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$; $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 (\underset{\text{dts le vide}}{\cancel{\vec{j}}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$.

Ainsi : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \mathrm{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

or : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ (car $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

On trouve la même éq. pour $\vec{B}$ en faisant $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B})$ .... $\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

-b- $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y$ OPPH, polarisée rect ($/\!/ \vec{u}_y$), se propageant ds sens des $x \nearrow$, à la vitesse : $v_\varphi = \omega/k$.

(OPPH) : onde plane progressive monochromatique.

. Onde plane : les surfaces d'onde (équiphase) sont des plans ∞ [ici : $x =$ cte]. Dans ce plan, l'onde est <u>uniforme</u>

. Progressive : au cours du tps, le point M (de phase constante φ) AVANCE sur l'axe des x à la vitesse $v_\varphi = \omega/k$

. monochromatique (ou harmonique) : en un point P fixe, l'onde est sinusoïdale de puls. ω.

. Ici la polarisation est rectiligne, car la direction de $\vec{E}$ est CONSTANTE ($/\!/ \vec{u}_y$).

-c- Dans l'éq. de D'Alembert, la vitesse de propagation : $v_\varphi = c$

l'onde vérifie l'éq. ssi : $\underline{\frac{\omega}{k} = v_\varphi = c}$ (relation de dispersion).

Le milieu n'est pas dispersif, car la vitesse de phase est INDEP de ω... (Toutes les OPPH progressent à la même vitesse).

-d- $\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -jk \vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \underline{\vec{B}}$ $\Rightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{k}{\omega} \vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}}$

Soit : $\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z}$

-e- Cette onde n'est pas réalisable car les plans d'onde sont ∞... Une telle onde transporte donc une énergie ∞ !! ($\mathcal{P} = \iint_{\text{plan } \infty} \langle \vec{\pi} \rangle dS \to \infty$ (car $\langle \vec{\pi} \rangle \neq 0$!!)

(Il est de plus impossible de réaliser une onde strictement monochromatique... et les phénomènes de diffraction empêchent en général l'onde de se propager selon 1 seule dir.)

Dans le cuivre :

A-1- $n_{e^-} = n_{Cu} = \mathcal{N} \cdot \frac{m}{M} \frac{1}{V} = \mathcal{N} \cdot \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}}$. AN : $n_e = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{8{,}92 \cdot 10^3}{63{,}5 \cdot 10^{-3}} = 8{,}46 \cdot 10^{28}$

Ainsi : $n_e(\text{Cu}) \gg n_0$ (le Cu est un milieu Dense !)

. Dans un conducteur métallique, on tient compte d'une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. Cette force est une modélisation des chocs subis par l'e^- lorsqu'il progresse dans le réseau cristallin (parcours chaotique ; agitation thermique...)

. Elle est négl. ds le cas d'1 e^- dans un plasma car, comme on vient de le voir, le plasma est PEU DENSE ... et la proba. de choc est quasi nulle... $\Rightarrow$ .... plus de "frottement fluide".

-2- e^- subit :
- $*$ le poids (négl. / Fm électromag.)
- $*$ $\vec{f}_{el} = -e \vec{E}$
- $*$ $\vec{f}_{mag} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$ (négl) or : $|f_{mag}| < evB = e \frac{v}{c} E \ll eE = f_{el}$ (e^- non relat)

La seule force non négl. est donc : $\vec{f}_{el} = -e\vec{E}$.

-B-1 sur chaque e^- : $-e\underline{\vec{E}} = m \frac{d\underline{\vec{v}}}{dt}$ or : en rég. v : $\frac{d}{dt} \leftrightarrow \times j\omega$.

$\Rightarrow -e \underline{\vec{E}} = j m \omega \underline{\vec{v}}$

$$\boxed{\underline{\vec{v}} = +j \frac{e}{m\omega} E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y}$$ pour 1 e^- situé en M(x, y, z) et à t

-2- $\boxed{\underline{\vec{j}}(x,t) = -n_0 e \underline{\vec{v}}(x,t) = -j \frac{n_0 e^2}{m\omega} E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y}$

. En effet, on peut négliger le mvt des ~~protons~~ ions car : $m_{ion} \gg m_{e^-}$ $\Rightarrow v_{ion} \ll v_{e^-}$ (d'après B-1).

. Seuls les mvts des e^- sont à prendre en compte.

$\underline{\underline{\sigma = -j \frac{n_0 e^2}{m\omega}}}$. Cette conductivité est imaginaire pure ! $\Rightarrow$ $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en Quadrature (déphasage de $\pi/2$)

Dans un métal (à BF) σ est REELLE : $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont <u>en phase</u>.

-3- La puissance de la force fournie à 1 e^- est : $p = \vec{f}_{el} \cdot \vec{v} = -e \vec{E} \cdot \vec{v}$

$\rightarrow$ la puissance moyenne fournie par le champ aux e^- ds l'1 de vol. est donc (en M, à t)

$P = n_0 p = -n_0 e \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j}(M) \vec{E}(M)$

Ainsi : $\langle P \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$ $\vec{j}$ et $\vec{E}$ étant en Quadrature :

$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$

$\vec{j} = -E_0 \frac{n_0 e^2}{m\omega} \sin(\omega t - kx) \vec{u}_y$

$\vec{j} \cdot \vec{E} = -E_0^2 \frac{n_0 e^2}{m\omega} \underbrace{\cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx)}_{2 \sin(2\omega t - 2kx)}$.

$\Rightarrow \underline{\underline{\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0}}$: le champ ne cède pas d'Energie (en moyenne) aux e^- !!

c'est cohérent puisqu'on a négligé les $\vec{f}$ de frott !! (En rég. perm : f_{exc} sert à compenser les pertes par frott. !)

- C-1 Eq. de Maxwell : $\begin{cases} \vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \longrightarrow +j k\, \vec{u}_x \wedge \vec{E} = +j\omega \vec{B} \\ \vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) & \longrightarrow -jk\,\vec{u}_x \wedge \vec{B} = \mu_0\left[\underline{\sigma}\vec{E} + \varepsilon j\omega \vec{E}\right] \\ & = \mu_0\, j\left(\omega\varepsilon - \dfrac{n_0 e^2}{m\omega}\right)\vec{E} \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} \vec{u}_x \wedge \vec{E} = \dfrac{\omega}{k}\vec{B} \\ \vec{u}_x \wedge \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{k}\left(\dfrac{n_0 e^2}{m\omega} - \varepsilon_0\omega\right)\vec{E} \end{cases}$

D'où : $\vec{u}_x \wedge \left(\dfrac{k}{\omega}\vec{u}_x \wedge \vec{E}\right) = \dfrac{\mu_0}{k}\left(\dfrac{n_0 e^2}{m\omega} - \varepsilon\omega\right)\vec{E}$

Comme $\vec{E} // \vec{u}_y \perp \vec{u}_x$: $-\dfrac{k}{\omega}\cdot\vec{E} = \dfrac{\mu_0}{k}\left(\dfrac{n_0 e^2}{m\omega} - \varepsilon\omega\right)\vec{E} \Rightarrow k^2 = \mu_0\left(\varepsilon\omega^2 - \dfrac{n_0 e^2}{m}\right)$ (pour avoir $\vec{E} \neq 0$!)

Soit : $\boxed{k^2 = \dfrac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \dfrac{n_0 e^2}{m\varepsilon}\right) = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{si } \omega_p = \sqrt{\dfrac{n_0 e^2}{m\varepsilon}}}$

AN dans l'ionosphère : $\omega_p = \sqrt{\dfrac{10^{10}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}\cdot 36\pi\cdot 10^{9}}\; 1{,}6\cdot 10^{-19} = \underline{5{,}64\,10^6\ \mathrm{rad\,s^{-1}} = \omega_p}$
($f_p \simeq 0{,}9$ MHz).

C-2- $\omega < \omega_p$

Dans ce cas, k est imaginaire ! $\underline{k} = \pm j\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1} = \pm j k_1$

$\rightarrow \vec{E} = E_0\, e^{\mp k_1 x + j\omega t}\,\vec{u}_y$ L'onde ne peut pas "diverger" ! seule $e^{-k_1 x}$ (k_1 réel) est acceptable !

$\Rightarrow \boxed{\underline{k} = -j\dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}}$

-b- Ainsi : $\boxed{\vec{E} = E_0\, e^{-\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}\,\frac{x}{c}} \cos(\omega t)\,\vec{u}_y}$

Comme $\vec{B} = \dfrac{k}{\omega}\vec{u}_x \wedge \vec{E} = -j\dfrac{1}{c\omega}\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}\; e^{-\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}\,\frac{x}{c}}\, e^{j\omega t}\,\vec{u}_z$

$\boxed{\vec{B} = \dfrac{\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}{c}\, E_0\, e^{-\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}\,\frac{x}{c}} \sin(\omega t)\,\vec{u}_z}$

-c- . L'onde reste plane et monochromatique [$\vec{B}$ et $\vec{E}$ uniformes dans les plans $x = $ cte ; 1 seule puls$^{\text{ion}}$.]
. L'onde n'est plus progressive ! Elle est stationnaire. (pas de terme en $\omega t - kx$ ou $\omega t + kx$)
. L'onde est évanescente : elle s'atténue très vite en pénétrant dans le plasma.
(δ : profondeur caract. de pénétration : $\delta = \dfrac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \nearrow$ qd $\omega \nearrow$)
. L'onde est polarisée rectilignement (dir. de $\vec{E}$ cte : $// \vec{u}_y$)
. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en quadrature en tout pt du plasma.

-d- $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{\langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle}{\mu_0} = 0$ puisque $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en QUADRATURE
(même raisonnement que pour $\langle \vec{j}\cdot\vec{E} \rangle$ ds le plasma ....)
Aucune Energie (moyenne) n'entre dans le plasma : l'énergie de l'onde incidente est INTEGRALEMENT réfléchie. L'onde émise du sol vers le plasma EST REFLECHIE par le plasma

- C-3 - a- si $\omega > \omega_p$: $k = \dfrac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ est REEL (positif car l'onde se propage selon $x \nearrow$).

-b- $\vec{E} = E_0\, e^{j(\omega t - kx)}\,\vec{u}_y \Rightarrow \boxed{\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}\,\dfrac{x}{c}\right)\vec{u}_y}$

$\vec{B} = \dfrac{k}{\omega}\vec{u}_x \wedge \vec{E} = \dfrac{E_0}{c}\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}\; e^{j(\omega t - kx)}\,\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}\cos\left(\omega t - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}\,\dfrac{x}{c}\right)\vec{u}_z}$

-c- L'onde reste plane, progressive, monochromatique comme ds le vide.
Elle reste polarisée rectilignement. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ oscillent en phase.
Dans ce cas, l'onde a la même structure que dans le vide...
(mais $B \neq \dfrac{E}{c}$!)

-d- La vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$ ($> c$)

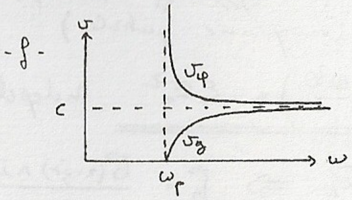
Le milieu EST dispersif car : $v_\varphi(\omega)$. Des ondes de puls$^{\text{ons}}$ $\neq$ progressent à des vitesses $\neq$

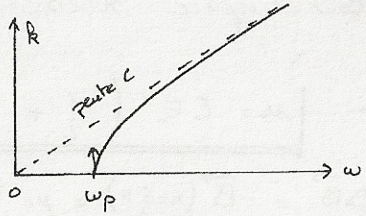
-e- $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ or : $k^2 = \dfrac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2) \underset{\text{diff.}}{\Rightarrow} 2k\,dk = \dfrac{2\omega\, d\omega}{c^2}$

Ainsi : $c^2 = \dfrac{\omega}{k}\dfrac{d\omega}{dk} = v_\varphi \cdot v_g$ Donc : $\boxed{v_g = \dfrac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$ (<

v_g est la vitesse à laquelle se propage l'ENERGIE. (c'est aussi la vitesse de propag. de l'enveloppe d'1 "paquet d'onde" de puls. proches).

-f-





On a vu : $v_g v_\varphi = c^2$; $v_g < c$ (l'énergie ne peut pas se propager plus vite qu'à c)
$v_\varphi > c$ (ne correspond pas à une vitesse de transport d'information ou de matière..)

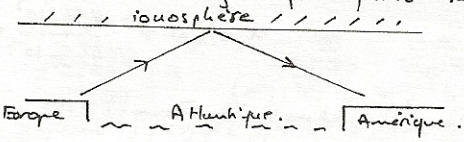
Le plasma se comporte donc comme un filtre passe haut : seules les freq. $> f_p$ sont transmises. Si $f \gg f_p$ alors : $v_\varphi \simeq v_g$ et $k \simeq \dfrac{\omega}{c}$ on retrouve les ~~mê~~ propriétés que dans le vide
($\lambda > \lambda_p$) $f < f_p$: réflexion totale sur l'ionosphère
($\lambda < \lambda_p$) $f > f_p$: ionosphère "Transparent"... mais dispersif (sauf si Hautes $f \gg f_p$).

$\lambda_p = \dfrac{c}{f_p} \simeq \dfrac{3\cdot 10^8}{9\cdot 10^5} \simeq 330\,\mathrm{m}$.

. Pour qu'un recepteur reçoive le signal, il faut qu'il y ait refl. totale sur l'ionosphère $\Rightarrow \lambda > \lambda_p$
. Le signal parcourt $2h$ pour revenir sur Terre à la célérité c (ds l'air).
$\Rightarrow 2h = c.\Delta t \Rightarrow \underline{h = \dfrac{c\Delta t}{2} = 90\,\mathrm{km}}$

h ionosphère E Récept. Terre

- D-1- La liaison se fait par reflexion sur l'ionosphère :



En effet les ondes utilisées pour cette liaison sont de qq kHz

$\rightarrow f < f_p$

$\rightarrow$ reflexion <u>totale</u> sur le plasma ionosphérique.

(<u>Rque</u> : l'océan se comporte aussi comme un conducteur (T du métal) et l'onde peut subir plusieurs reflexions).

- 2 - Pour communiquer avec des satellites, l'onde doit au contraire TRAVERSER l'ionosphère ... sans subir de distorsion !

on choisit donc : $f \gg f_p \Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} \cdot \text{ plasma transparent} \\ \cdot \text{ \underline{pas de dispersion}} \\ (\text{car } v_\varphi = ck = v_g = c \text{ si } f \gg f_p). \end{array}\right.$

On a bien : qq 100 MHz $\gg f_p \simeq 1$ MHz.