ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉPREUVE DE PHYSIQUE-(XULCR)

M. AFEKIR
Lycée d'Excellence
CPGE - Benguerir
cpgeafek@gmail.com

Faisceaux gaussiens et pinces optiques

I Propagation et décomposition en ondes planes d'un champ électrique

1. L'équation différentielle :

$$\underline{E}(x,z) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)\exp(i\alpha x)\frac{d\alpha}{2\pi} \quad \text{et} \quad \widetilde{\underline{E}}(\alpha,z) = \int_{\mathbb{R}} \underline{E}(x,z)\exp(-i\alpha x)dx \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\Delta\underline{E}(x,z) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{E}(x,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\underline{E}(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\underline{E}(x,z)}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\underline{E}(x,z)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\underline{E}(x,z)}{\partial x^2} &= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)(-\alpha^2)\exp(i\alpha x)\frac{d\alpha}{2\pi} = -\alpha^2\underline{E}(x,z) \\
\frac{\partial^2\underline{E}(x,z)}{\partial z^2} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)}{\partial z^2}\exp(i\alpha x)\frac{d\alpha}{2\pi} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2}+\alpha^2\right)\underline{E}(x,z) \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial^2\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}-\alpha^2\right)\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)\right]\exp(i\alpha x)\frac{d\alpha}{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

La propriété 1 permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}-\alpha^2\right)\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)}{\partial z^2} + \underline{\gamma}^2\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z) = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\gamma}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 \tag{9}$$

2. $\underline{\gamma}$ est réel si $\underline{\gamma}^2 > 0$. Par conséquent :

$$|\alpha| \leqslant \frac{\omega}{c}$$

- L'expression générale de $\widetilde{\underline{E}}(x,z)$ pour $\underline{\gamma}$ réel ; $\underline{\gamma} = \gamma > 0$:

$$\widetilde{\underline{E}}(x,z) = \widetilde{\underline{a}}(\alpha)\exp(i\gamma z) + \widetilde{\underline{b}}(\alpha)\exp(-i\gamma z)$$

  $\underline{\gamma}$ est imaginaire pure si dans le cas où :

$$|\alpha| \geqslant \frac{\omega}{c}$$

- L'expression générale de $\widetilde{\underline{E}}(x,z)$ pour $\underline{\gamma}$ imaginaire pure ; $\underline{\gamma} = i\delta$ avec $\delta > 0$:

$$\widetilde{\underline{E}}(x,z) = \widetilde{\underline{C}}(\alpha)\exp(\delta z) + \widetilde{\underline{D}}(\alpha)\exp(-\delta z)$$

3. Le champ électrique s'écrit :

$$\underline{E}(x,z,t) = \exp(-i\omega t)\int_{-\omega/c}^{+\omega/c} \underline{A}(\alpha)\exp[i(\alpha x+\gamma z)]\frac{d\alpha}{2\pi} \tag{10}$$

L'équation (10) définit $\underline{E}(x,z,t)$ par la transformé de FOURIER d'un champ $\underline{E}(x,z,\alpha)$. C'est une décomposition en *spectre* angulaire d'ondes planes. $\underline{A}(\alpha)$ est l'*amplitude* de la composante de FOURIER du champ $\underline{E}(x,z,t)$ à la pulsation spatiale α.

- Le terme $\alpha x+\gamma z = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}$. Le vecteur $\overrightarrow{k} = \alpha\overrightarrow{e}_x + \gamma\overrightarrow{e}_z$ est le vecteur d'onde de l'onde résultante. Cette onde se propage, alors, dans le plan (x,z).
  - α est le nombre d'onde suivant la direction x,
  - γ est le nombre d'onde suivant la direction z.
- Le champ $\underline{E}(x,z,t)$ apparaît comme une somme continue d'ondes planes se propageant dans des directions (α,γ).

4. Dans le cas où $\underline{\gamma}$ est imaginaire pur, le spectre du champ électrique correspond à celui d'ondes *évanescentes.*

5. Dans le cas où $\underline{\gamma}$ est réel, l'équation (10) permet d'écrire que :

$$\underline{E}(x,z=0,t) = \exp(-i\omega t)\int_{\mathbb{R}} \underline{A}(\alpha)\exp(i\alpha x)\frac{d\alpha}{2\pi} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\underline{E}(x,z=0,t)\exp(i\omega t)}_{\underline{E}(x,z=0)} = \int_{\mathbb{R}} \underline{A}(\alpha)\exp(i\alpha x)\frac{d\alpha}{2\pi}$$

L'équation (3) donne :

$$\underline{A}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \underline{E}(x,z=0)\exp(-i\alpha x)dx \tag{11}$$

II Étude de la limitation transversale d'un faisceau lumineux

6. Approximation de l'optique géométrique : l'optique géométrique est un modèle qui convient lorsque les dispositifs (*instruments optiques*) sont de dimensions caractéristiques très grandes devant la longueur d'onde λ. Soit :

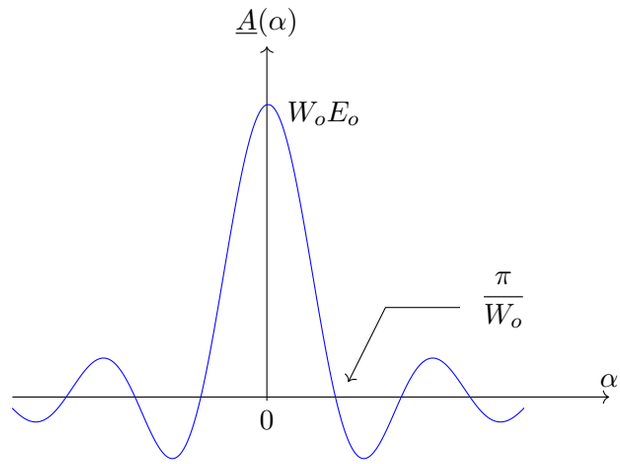
$$W_o \gg \lambda$$

Dans la situation d'étude ; $\lambda = 0,6$ μm et W_o de quelques micromètres. L'approximation *n'est plus vérifiée.* Le dispositif pourra, alors, mettre en évidence le phénomène de *diffraction.*

7.

$$\begin{aligned}\underline{A}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \underline{E}(x,z=0)\exp(-i\alpha x)dx &= \int_{\mathbb{R}} E_o\exp(-i\alpha x)dx \\ &= \int_{-W_o/2}^{+W_o/2} E_o\exp(-i\alpha x)dx \\ &= \frac{2E_o}{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha W_o}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\underline{A}(\alpha) = W_oE_o\frac{\sin\left(\frac{\alpha \mathrm{W_o}}{2}\right)}{\frac{\alpha \mathrm{W_o}}{2}}$$



8. $\tan\theta = \dfrac{\alpha}{\gamma}$

- Extrémum de $\underline{A}(\alpha)$ correspond à $\alpha_{ext,n} = \dfrac{4n\pi}{W_o}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, soit :

$$\tan\theta_{ext,n} = \frac{4n\pi}{W_o\gamma}$$

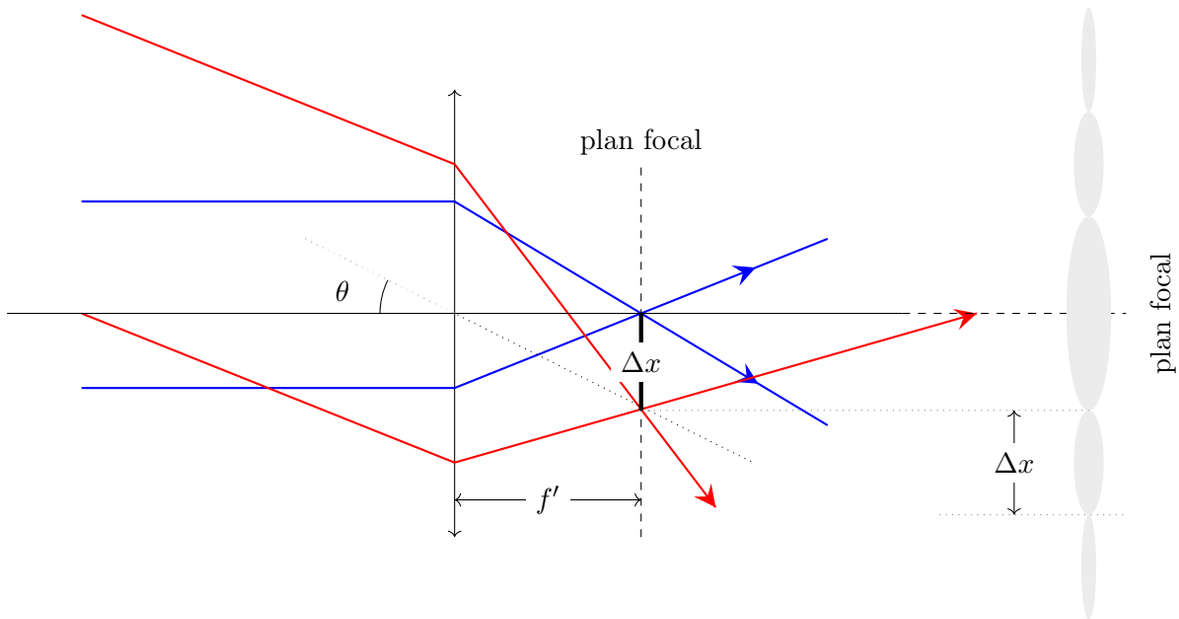
- Le maximum principale correspond à $\alpha_{maxp,0} = 0$: direction du faisceau laser.
- L'annulation de $\underline{A}(\alpha)$ correspond à $\alpha_{0,m} = \dfrac{2m\pi}{W_o}$ avec $m \in \mathbb{Z}$, soit :

$$\tan\theta_{0,m} = \frac{2m\pi}{W_o\gamma}$$

- La première annulation de $\underline{A}(\alpha)$ corresponde à $m = \pm 1$, soit :

$$\alpha_{0,1} = \frac{2\pi}{W_o} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \approx \frac{\alpha_{0,1}}{k_i} = \frac{\lambda}{W_o}$$

9.



Dans le plan focale de la lentille ($\mathcal{L}$), on détecte une figure de diffraction plus marquée dans la direction des x. Elle est constitué d'une tache centrale où se focalise toute l'intensité de l'onde, suivie de taches secondaires $0,5$ fois plus larges et de plus en plus moins intenses loin du centre (*foyer*).

10. Pour la tache lumineuse au voisinage du point focal image :

$$\tan\theta \approx \sin\theta = \frac{\Delta x}{f'} = \frac{\lambda}{W_o} \qquad \Rightarrow \qquad 2\Delta x = \frac{2\lambda f'}{W_o}$$

Δx est inversement proportionnel à W_o : plus la largeur W_o de la fente est faible, plus la "largeur" de la tache centrale est grande.
Pour $W_o = 10\ \mu$m : $2\Delta x = 24$ mm.

III Source laser et faisceau gaussien

11. L'expression de $\underline{E}_L(x,z)$ dans le demi-espace $z > 0$:

$$\underline{E}_L(x,z) = \int_{\mathbb{R}} \underline{A}(\alpha)\exp[i(\alpha x + \gamma z)]\frac{d\alpha}{2\pi}$$

En utilisant la formule (11) et **la propriété 2** sachant que $E_l(x, z=0) = E_o \exp\left[\frac{-x^2}{W_o^2}\right]$:

$$\underline{A}(\alpha) = W_o E_o \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{-W_o^2\alpha^2}{4}\right)$$

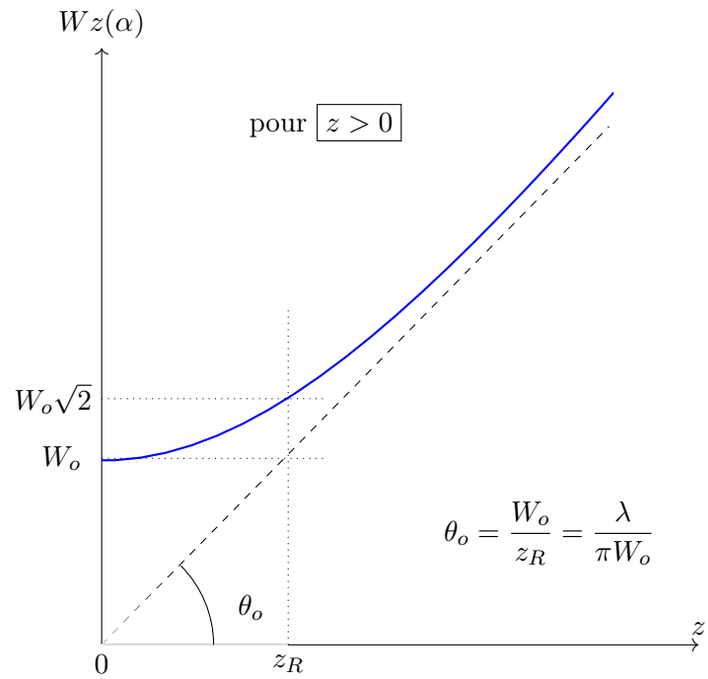
Soit :

$$\underline{E}_L(x,z) = \frac{W_o E_o}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp[i(\alpha x + \gamma z)]\exp\left(\frac{-W_o^2\alpha^2}{4}\right)d\alpha$$

12. Angle de divergence :

$$z \ll z_R \quad : \qquad W(z) \approx W_o\left(1 + \frac{z^2}{2z_R^2}\right)$$

$$z \gg z_R \quad : \qquad W(z) \approx W_o\frac{z}{z_R} = \theta_o z_R$$



13. L'intensité $I_L(x,z)$:

$$I_L(x,z) \propto |\underline{E}_L(x,z)|^2 \quad \propto \quad |\underline{K}(z)|^2\exp\left(\frac{-2x^2}{W(z)^2}\right)$$

$$\propto \quad \frac{4\pi E_o^2}{2\pi\sqrt{1+\frac{z^2}{z_R^2}}}\exp\left(\frac{-2x^2}{W(z)^2}\right)$$

$$I_L(x,z) = I_o \left[\frac{W_o}{W(z)}\right] \exp\left[\frac{-2x^2}{W(z)^2}\right] \qquad \text{avec} \quad I_o \propto 2E_o^2$$

Pour chaque valeur de z, l'intensité $I_L(x)$ est, alors, une fonction gaussienne.

En $z = 0$

$$I_L(x,z) = I_o \exp\left[\frac{-2x^2}{W_o^2}\right]$$

En $z = z_R$

$$I_L(x,z) = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{-x^2}{W_o^2}\right]$$

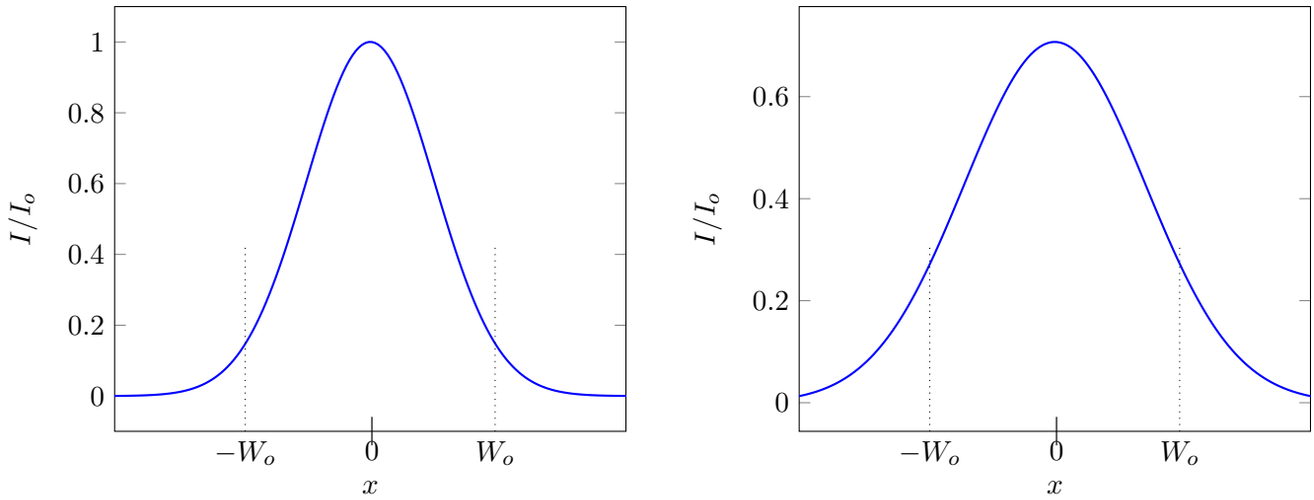


Figure 1: La répartition spatiale d'intensité : $I/I_o(x,z)$ pour $z = 0$ et pour $z = z_R$.

14. L'amplitude de l'**onde sphérique** est en $\exp(-kr)$ avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

- ☐ Pour $z \gg z_R$: $R(z) = z \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+R^2}$,
- ☐ dans le plan $y = 0$: $r = \sqrt{x^2+R^2} = R\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{1/2}$,
- ☐ pour $z \gg |x|$: $r \simeq R + \frac{x^2}{2R}$. L'amplitude est, alors, en $\exp\left(ikR + \frac{ikx^2}{2R}\right) = \exp(ikz)\exp\left(\frac{ikx^2}{2R}\right)$

- Rayon de courbure des surfaces d'onde pour $z \gg z_R$:

$$R(z) \simeq z \qquad \text{(l'onde est sphérique.)}$$

- Rayon de courbure des surfaces d'onde pour $z \ll z_R$:

$$R(z) \simeq \frac{z_R^2}{z} \gg 1 \qquad \text{(rayon de courbure infini : l'onde est plane.)}$$

- <u>Application numérique</u> :

$$z_R = \frac{\pi {W_o}^2}{\lambda}, \qquad \text{soient :} \qquad \begin{cases} \text{pour} \quad W_o = 100\,\mu\text{m}, & z_R = 5,24\,\text{cm} \\ \text{pour} \quad W_o = 1\,\text{mm}, & z_R = 5,24\ \text{m}. \end{cases}$$

IV Moment dipolaire d'un atome et d'un assemblée d'atomes

IV.A. Modèle d'atome : l'électron élastiquement lié

15. La force exercée sur l'électron $\overrightarrow{F}_{el} = -e\underline{\overrightarrow{E}}_{el}$ où $\underline{\overrightarrow{E}}_{el}$ est le champ électrique crée par la sphère de centre O, de rayon r_e, de charge $q(r_e)$ et de densité de charge uniforme $\rho = \dfrac{q(r_e)}{\frac{4}{3}\pi r_e^3} = \dfrac{+e}{\frac{4}{3}\pi R_o^3}$:

$$\underline{\overrightarrow{E}}_{el} = \frac{q(r_e)}{4\pi\varepsilon_o r_e^3}\overrightarrow{r}_e = \frac{+e}{4\pi\varepsilon_o R_o^3}\overrightarrow{r}_e \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{F}_{el} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_o R_o^3}\overrightarrow{r}_e = -k_{el}\overrightarrow{r}_e$$

$$k_{el} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R_o^3} = m_e\omega_o^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_o = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e R_o^3}}$$

Application numérique : $\omega_o = 4,5 \times 10^{16}$ rad.s^{-1}.

16. La *taille caractéristique* de la sphère, uniformément chargée, est son diamètre $d_o = 2R_o = 0,1$ nm (*échelle atomique*). La longueur d'onde utilisée pour l'onde est $\lambda = 600$ nm (*distance caractéristiques des variations des champs*).

$$\lambda \gg d_o$$

Les amplitudes des champs $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r})$ et $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r})$ peuvent, alors, être considérées comme uniforme à l'échelle de l'atome.

17. Le noyau est plus massif que l'électron.

18. L'action du champ magnétique est négligeable ; en effet :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F}_e = e\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) \\ \overrightarrow{F}_m = e\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\|\overrightarrow{F}_e\|}{\|\overrightarrow{F}_m\|} \sim \frac{c}{v_e} \gg 1$$

19. L'équation différentielle :

- Bilan des forces :
  - La force de Lorentz : $\overrightarrow{f}_L = -e\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) - e\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t) = -e\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)$,
  - Le poids : $\overrightarrow{P} = m_e\overrightarrow{g}$ négligeable devant la force électromagnétique,
  - La force élastique : $\overrightarrow{F}_{el} = -k_{el}\overrightarrow{r}_e = -m_e\omega_o^2\overrightarrow{r}_e$,
  - La force de frottement visqueux : $\overrightarrow{F}_V = -m_e\Gamma\dot{\overrightarrow{r}}_e$.
- Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron, de masse m_e dans le référentiel barycentrique (*lié au noyau*) :

$$-e\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) - m_e\omega_o^2\overrightarrow{r}_e - m_e\Gamma\dot{\overrightarrow{r}}_e = m_e\ddot{\overrightarrow{r}}_e$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}_e}{dt^2} + \Gamma\frac{d\overrightarrow{r}_e}{dt} + \omega_o^2\overrightarrow{r}_e = \frac{-e\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)}{m_e}$$

20. Solution en régime établi $\underline{\overrightarrow{r}}_e(t) = \underline{\overrightarrow{r}}_{e,0}\exp(-i\omega t)$; en représentation complexe :

$$\frac{d^2\underline{\overrightarrow{r}}_e}{dt^2} + \Gamma\frac{d\underline{\overrightarrow{r}}_e}{dt} + \omega_o^2\underline{\overrightarrow{r}}_e = \frac{-e\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r},t)}{m_e}$$

$$(-\omega^2 + \omega_o^2 - i\omega\Gamma)\underline{\overrightarrow{r}}_e(t) = \frac{-e\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r},t)}{m_e} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\overrightarrow{r}}_e(t) = \frac{\dfrac{-e\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r},t)}{m_e}}{-\omega^2 + \omega_o^2 - i\omega\Gamma}$$

Soient :

$$\underline{\overrightarrow{r}}_{e,0} = \frac{\dfrac{-e\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r})}{m_e}}{-\omega^2 + \omega_o^2 + i\omega\Gamma} \qquad \text{et} \qquad \underline{\overrightarrow{d}}_{at} = -e\underline{\overrightarrow{r}}_e = \frac{+e^2}{m_e}\left(\frac{\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r})}{-\omega^2 + \omega_o^2 + i\omega\Gamma}\right)\exp(-i\omega t)$$

IV.B. Moment dipolaire d'une sphère diélectrique et indice optique

21. Le vecteur polarisation :

$$\underline{\overrightarrow{P}}(\overrightarrow{r},t) = N\,\underline{\overrightarrow{d}}_{at} = \frac{Ne^2}{m_e}\left(\frac{\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r})}{-\omega^2+\omega_o^2+i\omega\Gamma}\right)\exp(-i\omega t) = \underline{\overrightarrow{P}}(\overrightarrow{r})\exp(-i\omega t)$$

$$\underline{\overrightarrow{P}}(\overrightarrow{r}) = \varepsilon_o(n^2-1)\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r}) \quad \Rightarrow \quad n^2 = 1 + \left(\frac{\dfrac{Ne^2}{m_e\varepsilon_o}}{-\omega^2+\omega_o^2+i\omega\Gamma}\right)$$

22. Pour une valeur de ω comprise ente 2.10^{15} et 5.10^{15} rad.s^{-1} ; $\omega_o \gg \omega$. En plus $\omega_o \gg \Gamma$:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_o\omega_o^2}$$

23. Le moment dipolaire $\underline{\overrightarrow{d}}_{at}$ de chaque atome :

$$\underline{\overrightarrow{d}}_{at} = \frac{e^2\underline{\overrightarrow{E}}}{m_e\omega_o^2} = \frac{e^2}{m_e\omega_o^2}\left(\underline{\overrightarrow{E}}_o + \frac{\underline{\overrightarrow{P}}}{3\varepsilon_o}\right)$$

$$n^2-1 = \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_o\omega_o^2} \quad \text{et} \quad \underline{\overrightarrow{P}} = N\,\underline{\overrightarrow{d}}_{at} \quad \Rightarrow \quad \underline{\overrightarrow{P}} = (n^2-1)\varepsilon_o\left(\underline{\overrightarrow{E}}_o + \frac{\underline{\overrightarrow{P}}}{3\varepsilon_o}\right)$$

Soit :

$$\underline{\overrightarrow{P}} = 3\varepsilon_o\frac{n^2-1}{n^2+2}\underline{\overrightarrow{E}}_o$$

24. Le moment dipolaire $\underline{\overrightarrow{D}}$ de la sphère :

$$\underline{\overrightarrow{P}} = \frac{d\underline{\overrightarrow{D}}}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad \underline{\overrightarrow{D}} = \int_{\text{sphère}}\underline{\overrightarrow{P}}d\tau = 3\varepsilon_o\frac{n^2-1}{n^2+2}\underline{\overrightarrow{E}}_oV_{\text{sphère}} = 3\varepsilon_o\frac{n^2-1}{n^2+2}\underline{\overrightarrow{E}}_o\frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\underline{\overrightarrow{D}} = 4\pi\varepsilon_o a^3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)\underline{\overrightarrow{E}}_o$$

V Principe d'une pince optique

V.A. Forces optiques subies par la bille

V.A.a. Force radiative de diffusion

25. L'énergie $d\mathcal{E}$ de la lumière diffusée sur une durée dt :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P} \qquad \Rightarrow \qquad d\mathcal{E} = \frac{4\pi^3}{3}\frac{cn_s}{\varepsilon_o\lambda^4}D_{b,0}^2dt$$

Le nombre $d\mathcal{N}$ de photons diffusés :

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{N}E_{ph} = \hbar\omega d\mathcal{N} \qquad \Rightarrow \qquad d\mathcal{N} = \frac{4\pi^3}{3}\frac{cn_s}{\varepsilon_o\lambda^4\hbar\omega}D_{b,0}^2dt = \frac{2\pi^2}{3}\frac{n_s}{\varepsilon_o\lambda^3\hbar}D_{b,0}^2dt$$

26. La force de diffusion $\overrightarrow{F}_d$:

$$d\overrightarrow{p} = d\mathcal{N}\hbar\overrightarrow{k} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{F}_d = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \hbar\overrightarrow{k}\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{\omega}\overrightarrow{k} = \frac{\mathcal{P}n_s}{c}\overrightarrow{e}_z$$

La force de diffusion repousse la bille de la source de lumière. Cette force a la direction et le sens de propagation du faisceau laser. C'est une force répulsive.

V.A.b. Force de gradient

27. Force de LORENTZ $\overrightarrow{F}_{Lor}$:

$$\overrightarrow{F}_{Lor} = \overrightarrow{F}_{Lor}(\overrightarrow{r}_-,t) + \overrightarrow{F}_{Lor}(\overrightarrow{r}_+,t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overrightarrow{F}_{Lor}(\overrightarrow{r}_-,t) = -q\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_-,t) - q\overrightarrow{v}_- \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}_-,t) \\ \overrightarrow{F}_{Lor}(\overrightarrow{r}_+,t) = q\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_+,t) + q\overrightarrow{v}_+ \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}_+,t) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{F}_{Lor} = q\left[\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_+,t) - \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_-,t) + \overrightarrow{v}_+ \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}_+,t) - \overrightarrow{v}_- \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}_-,t)\right]$$

- Les charges positives étant fixes : $\overrightarrow{v}_+ = \overrightarrow{0}$,
- $\overrightarrow{D}_b = q(\overrightarrow{r}_+ - \overrightarrow{r}_-) = q\overrightarrow{\delta} \qquad \Rightarrow \qquad q\overrightarrow{v}_- = -\dfrac{d\overrightarrow{D}_b}{dt}$
- $\overrightarrow{\delta}$ est peu important : $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}_-,t) \approx \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}_+,t) = \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}_o,t)$,
- $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_+,t) - \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_-,t) = (\overrightarrow{\delta}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_o,t) = \dfrac{1}{q}(\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_o,t)$.

Soit :

$$\overrightarrow{F}_{Lor} = (\overrightarrow{D}_b\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}_o,t) + \frac{d\overrightarrow{D}_b}{dt}\wedge\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}_o,t) \tag{24}$$

28. Autre forme de $\overrightarrow{F}_{Lor}$:

$$\overrightarrow{D}_b = A\overrightarrow{E} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{E}^2) = 2(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E} + 2\overrightarrow{E}\wedge(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E})$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_{Lor} = (\overrightarrow{D}_b\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E} + \frac{d\overrightarrow{D}_b}{dt}\wedge\overrightarrow{B} &= A(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E} + A\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\wedge\overrightarrow{B} \\
&= A\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{E}^2) - \overrightarrow{E}\wedge(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E})\right]\overrightarrow{E} + A\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\wedge\overrightarrow{B} \\
&= A\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{E}^2) - \overrightarrow{E}\wedge\left(-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right)\right]\overrightarrow{E} + A\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\wedge\overrightarrow{B} \\
&= \frac{A}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{E}^2) + A\underbrace{\left[\overrightarrow{E}\wedge\left(\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)\wedge\overrightarrow{B}\right]}_{\partial(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B})/\partial t}
\end{aligned}$$

Soit ;

$$\overrightarrow{F}_{Lor} = \frac{A}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{E}^2) + A\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}\right)$$

29. Force de gradient $\overrightarrow{F}_g$. En notation réelle :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_o\cos\left(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t\right) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_o\cos\left(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t\right)$$

$$\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B} = \overrightarrow{E}_o\wedge\overrightarrow{B}_o\cos^2\left(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}\right) = \omega\overrightarrow{E}_o\wedge\overrightarrow{B}_o\sin\left(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - 2\omega t\right)$$

$$\left\langle\sin\left(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - 2\omega t\right)\right\rangle_{\mathcal{T}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}\right)\right\rangle_{\mathcal{T}} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{F}_g = \left\langle\overrightarrow{F}_{Lor}\right\rangle_{\mathcal{T}} = \left(\frac{A}{2}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\left[\left\langle\overrightarrow{E}^2\right\rangle_{\mathcal{T}}\right]$$

V.B. Piégeage d'une bille diélectrique

30. Force de diffusion et force de gradient :

$$\overrightarrow{F}_g = \left(\frac{A}{2}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\left[\left\langle \overrightarrow{E}^2\right\rangle_{\mathcal{T}}\right] = 2\pi\varepsilon_o n_s^2 a^3\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\left[\frac{I}{n_s\varepsilon_o c}\right] = \frac{2\pi n_s a^3}{c}\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\,(I)$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_d = \frac{\mathcal{P} n_s}{c}\overrightarrow{e}_z &= \frac{4\pi^3}{3}\frac{n_s^2}{\varepsilon_o\lambda^4}D_{b,0}^2\overrightarrow{e}_z \\
\overrightarrow{D}_b = A\overrightarrow{E} \quad &\Rightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{D}_b^2\right\rangle_{\mathcal{T}} = A^2\left\langle \overrightarrow{E}^2\right\rangle_{\mathcal{T}} = \frac{D_{b,0}^2}{2} \\
&\Rightarrow \quad D_{b,0}^2 = 2A^2\left\langle \overrightarrow{E}^2\right\rangle_{\mathcal{T}} = \frac{2A^2 I}{n_s\varepsilon_o c} \\
\overrightarrow{F}_d &= \frac{8\pi^3}{3}\frac{n_s^2}{\varepsilon_o\lambda^4}\frac{A^2 I}{n_s\varepsilon_o c}\overrightarrow{e}_z = \frac{8\pi^3}{3}\frac{n_s}{\varepsilon_o^2\lambda^4 c}\left[4\pi\varepsilon_o n_s^2 a^3\frac{m^2-1}{m^2+2}\right]^2 I\overrightarrow{e}_z
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{F}_d = \frac{128\pi^5}{3}\frac{n_s^5 a^6}{c\lambda^4}\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)^2 I\overrightarrow{e}_z \quad \text{(en moyenne.)}$$

31. Pour piéger la bille de façon stable au voisinage du centre du faisceau :

- la force du gradient $\overrightarrow{F}_g$ doit être largement supérieure à la force de diffusion $\overrightarrow{F}_d$ afin de limiter l'effet de cette dernière. On pourra peser à exposer la bille à deux faisceaux de même direction et de sens opposés, comme ca la force de diffusion résultante va être nulle,
- Un autre facteur dû au mouvement brownien affectera également fortement la stabilité du piégeage lorsque les particules sont très petites. Pour bien piéger le potentiel des particules, induit par les forces de rayonnement, il doit être suffisamment profond pour surmonter l'énergie cinétique de la particule due à la fluctuation thermique.

32. $\dfrac{F_d}{F_g} \propto \dfrac{a^3}{\lambda^2} \ll 1$: possibilité de piéger la bille.

Les forces optiques étant proportionnelles à l'intensité du faisceau lumineux. Il est, donc, nécessaire d'augmenter cette dernière. Seulement si le faisceau est trop intense,il peut "*détruire*" la bille.

L'enjeu est donc d'améliorer la force de gradient ou de diminuer la force de diffusion tout en conservant une intensité optique *suffisamment* faible.

Cette approche permet non seulement de limiter la force de diffusion, mais également de confiner la lumière à une échelle bien inférieure à la limite de diffraction et, donc, focaliser le faisceau.

33. $W_o \sim \dfrac{\lambda}{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad z_R = \pi\dfrac{W_o^2}{\lambda} = \dfrac{\lambda}{\pi} = W_o = 191$ nm

34.

☐ L'intensité I_o dans le plan focal image de la lentille :

$$I_o = \frac{\mathcal{P}}{\pi\left(\dfrac{W_o}{2}\right)^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2}\mathcal{P} = 1,40\times 10^8 \text{ W.cm}^{-2}.$$

☐ $F_g = 1\ pN\ >\ F_d = 0,2$ pN : il est, donc, possible de piéger la bille.

35. Force élastique :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_g &= \frac{2\pi n_s a^3}{c}\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\,(I) \\
&= \frac{2\pi n_s a^3}{c}\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)\left[\frac{\partial I}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \frac{\partial I}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \frac{\partial I}{\partial z}\overrightarrow{e}_z\right] \\
&= \frac{2\pi n_s a^3}{c}\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)\left(-\frac{4I_o}{W_o^2}\right)\left[x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y + \frac{\lambda^2}{\pi^2 W_o^2}z\overrightarrow{e}_z\right]
\end{aligned}$$

$$W_o \sim \frac{\lambda}{\pi} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r} = x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y + z\overrightarrow{e}_z \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F}_g \approx -\frac{8\pi^3 n_s a^3}{\lambda^2 c}\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right) I_o \overrightarrow{r} = -k_g \overrightarrow{r}$$

$\overrightarrow{F}_g$ est, alors, une force harmonique de constante de raideur associée :

$$k_g = \frac{8\pi^3 n_s a^3}{\lambda^2 c}\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right) I_o = 8,55 \times 10^{-5} \text{ N.m}^{-1}$$

36. Ordres de grandeurs des forces de diffusion et de gradient :

- pour des billes de silice de rayon $a = 200\ nm$;

$$\frac{F_d}{a^6} = Cte \quad \text{et} \quad \frac{F_g}{a^3} = Cte \quad \Rightarrow \quad \text{pour } a = 200\ nm \quad \begin{cases} F_d = \left(\dfrac{200}{100}\right)^6 \times 0,2 = 12,8 \text{ pN} \\ F_g = \left(\dfrac{200}{100}\right)^3 \times 1 = 8 \text{ pN} \end{cases}$$

- pour des billes en polystyrène de rayon $a = 100$ nm ;

$$\text{pour } n = 1,63 \quad \begin{cases} F_d = \left(\dfrac{0,14}{0,02}\right)^2 \times 0,2 = 9,8 \text{ pN} \\ F_g = \left(\dfrac{0,14}{0,02}\right) \times 1 = 7 \text{ pN} \end{cases}$$

- pour mieux piéger une particule de diamètre d, il suffit que $\lambda \gg d$.

37. Pour une bille de silice de rayon $a = 100\ nm$, la force subie le long de l'axe (Ox) est la force élastique (Cf. 35.) :

$$\overrightarrow{F}_{g,x} = -k_g x_b^2 \overrightarrow{e}_x$$

Cette force dérive d'une énergie potentielle :

$$\mathcal{U}_{g,x} = \frac{1}{2} k_g x_b^2$$

À l'équilibre thermique, la valeur moyenne de $\mathcal{U}_{g,x}$ est égale à $\frac{1}{2}k_B T$ (*Théorème de l'équipartition de l'énergie*). L'écart-type :

$$\sigma_x = \sqrt{< x_b^2 > - < x_b >} = \sqrt{< x_b^2 >} = \sqrt{\frac{2 < \mathcal{U}_{g,x} >}{k_g}} = \sqrt{\frac{k_B T}{k_g}}$$

Application numérique : $\sigma_x = 7,00$ Å. Cette valeur est très négligeable devant W_o, le piège est alors satisfaisant.