Etude du dispositif de propulsion du lanceur Arian 5

1. Analyse préliminaire

1. On considère le système fermé de vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel d'étude supposé galiléen, constitué à l'instant *t* de la masse $m(t)$ de la fusée et à l'instant *t+dt* de sa masse $m(t+dt)$ et de la masse *dm* éjectée entre *t* et *t+dt*.

On a : $\vec{P}(t)=m\vec{v}(t)$ et $\vec{P}(t+dt)=(m(t)-dm)\vec{v}(t+dt)+dm(\vec{v}(t+dt)+\vec{v}_s) \Rightarrow d\vec{P}(t)=m(t)d\vec{v}(t)+dm\vec{v}_s$

$\dfrac{d\vec{P}(t)}{dt}=\sum\vec{F}_{ex}=m\dfrac{d\vec{v}}{dt}+D\vec{v}_s$. de la forme : $m(t)\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}=\sum\vec{F}_{ex}+\vec{F}$. Avec: $\vec{F}=-D\vec{v}_s$: force de poussée.

2. la vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait en équilibre à la température T_0 dont l'énergie est purement cinétique (interactions entre molécules négligeables). le champ de vitesse est en plus isotrope. D'après le théorème de l'équipartition de l'énergie on a :

$$\frac{1}{2}m\left\langle \vec{v}^2\right\rangle=\frac{3}{2}m\left\langle v_x^2\right\rangle=\frac{3}{2}k_BT_0 \Rightarrow \left\langle \vec{v}^2\right\rangle=\frac{3k_BT_0}{m}=\frac{3RT_0}{M_{H_2O}}=3rT_0.$$

3. $F_{th}=Dv_{th}=\rho_0A_0v_{th}^2=\rho_0A_0\times 3rT_0=3P_0A_0$.

4. AN : $F_{th}\#6,5.10^6N$. F_{th} est inférieure au poids de la fusée sur terre ($m_{F0}g_0\#7,8.10^6N$), donc insuffisante, d'où la nécessité de la tuyère.

5. La loi de Laplace, pour une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, s'écrit :

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=cst \Rightarrow \frac{dp}{p}=\gamma\frac{d\rho}{\rho}\Rightarrow c^2=\frac{dp}{d\rho}=\frac{\gamma p}{\rho}=\gamma rT.$$

6. $D=\rho_0v_0A_0 \Rightarrow v_0=\dfrac{DA_0}{\rho_0}=\dfrac{DA_0P_0}{rT_0}$. AN : $v_0\#330m.s^{-1}$.

7. $c_0=\sqrt{\gamma rT_0}\#1450m.s^{-1}$. $M_0=\dfrac{v_0}{c_0}\#0,23<1$: écoulement subsonnique.

2. Relation de Hugoniot

8. en régime stationnaire, le débit massique $D=\rho vA$ est constant.

9. $\rho vA=cst \Rightarrow \dfrac{d\rho}{\rho}+\dfrac{dv}{v}+\dfrac{dA}{A}=0 \Rightarrow \dfrac{dA}{A}=-\dfrac{d\rho}{\rho}-\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{d\rho dp}{\rho dp}-\dfrac{dv}{v}$. Or : $\dfrac{d\rho}{dp}=\dfrac{1}{c^2}$ et $\dfrac{dp}{\rho}=-vdv$.

Donc : $\dfrac{dA}{A}=\dfrac{vdv}{c^2}-\dfrac{dv}{v}=\left(\dfrac{v^2}{c^2}-1\right)\dfrac{dv}{v}=\left(M^2-1\right)\dfrac{dv}{v}$ (5).

10. pour $M<1$, $\dfrac{dv}{v}>0 \Rightarrow \dfrac{dA}{A}<0$: la tuyère (a),divergente ne convient pas (décroissance de *v* dans (a))

11. pour $M<1$, $\dfrac{dv}{dA}<0$:dans une tuyère de Lavale, la vitesse croit dans la partie convergente et décroit dans la partie divergente. Elle est maximale au col de section minimale.

12. Avions supersoniques ($M>1$).

3. Dépendance des grandeurs avec le nombre de Mach

13. on a : $M^2=\dfrac{v^2}{c^2}=\dfrac{v^2}{\gamma rT} \Rightarrow \dfrac{dM}{M}=\dfrac{dv}{v}-\dfrac{dT}{2T}$ (5').

14. évolution adiabatique réversible du gaz parfait: $c^2=\dfrac{\gamma p}{\rho}$ et $p^{1-\gamma}T^{\gamma}=cst$ $\left(\dfrac{dp}{\gamma p}=-\dfrac{dT}{(1-\gamma)T}\right)$. Et

d'après(4) on a : $dp=-\rho v dv \Rightarrow \dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dp}{\rho v^2}=-\dfrac{\gamma p}{\rho v^2}\dfrac{dp}{\gamma p}=-\dfrac{1}{M^2}\dfrac{dp}{\gamma p}$. Soit : $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{1}{(1-\gamma)M^2}\dfrac{dT}{T}$ (5'').

15. (5') et (5'') $2\dfrac{dM}{M}=\dfrac{2dv}{v}-\dfrac{dT}{T}=\left(\dfrac{2}{(1-\gamma)M^2}-1\right)\dfrac{dT}{T}=\left(\dfrac{2-(1-\gamma)M^2}{(1-\gamma)M^2}\right)\dfrac{dT}{T}$ et d'après (5) et (5'')

$\dfrac{dA}{A}=(M^2-1)\dfrac{dv}{v}=\dfrac{(M^2-1)}{(1-\gamma)M^2}\dfrac{dT}{T}=\dfrac{(M^2-1)}{(1-\gamma)M^2}\times\dfrac{2(1-\gamma)M^2}{2-(1-\gamma)M^2}\dfrac{dM}{M}$. Soit :

$\dfrac{dA}{A}=\dfrac{M^2-1}{1+\dfrac{(\gamma-1)}{2}M^2}\dfrac{dM}{M}=\dfrac{M^2-1}{1+\alpha M^2}\dfrac{dM}{M}$. Avec : $\alpha=\dfrac{\gamma-1}{2}$.

16. $\forall M, \dfrac{C_1}{M}+\dfrac{C_2+C_3M}{(1+\alpha M^2)}=\dfrac{(\alpha C_1+C_3)M^2+C_2M+C_1}{M(1+\alpha M^2)}=\dfrac{M^2-1}{(1+\alpha M^2)}\Rightarrow C_1=-1; C_2=0; C_3=\alpha+1$.

17. $\dfrac{dA}{A}=-\dfrac{dM}{M}+\dfrac{(\alpha+1)}{2\alpha}\dfrac{2\alpha MdM}{(1+\alpha M^2)}\Rightarrow \dfrac{dA}{A}+\dfrac{dM}{M}-\beta\dfrac{2\alpha MdM}{(1+\alpha M^2)}=0\Rightarrow \ln\left[\dfrac{AM}{(1+\alpha M^2)^{\beta}}\right]=cst$.

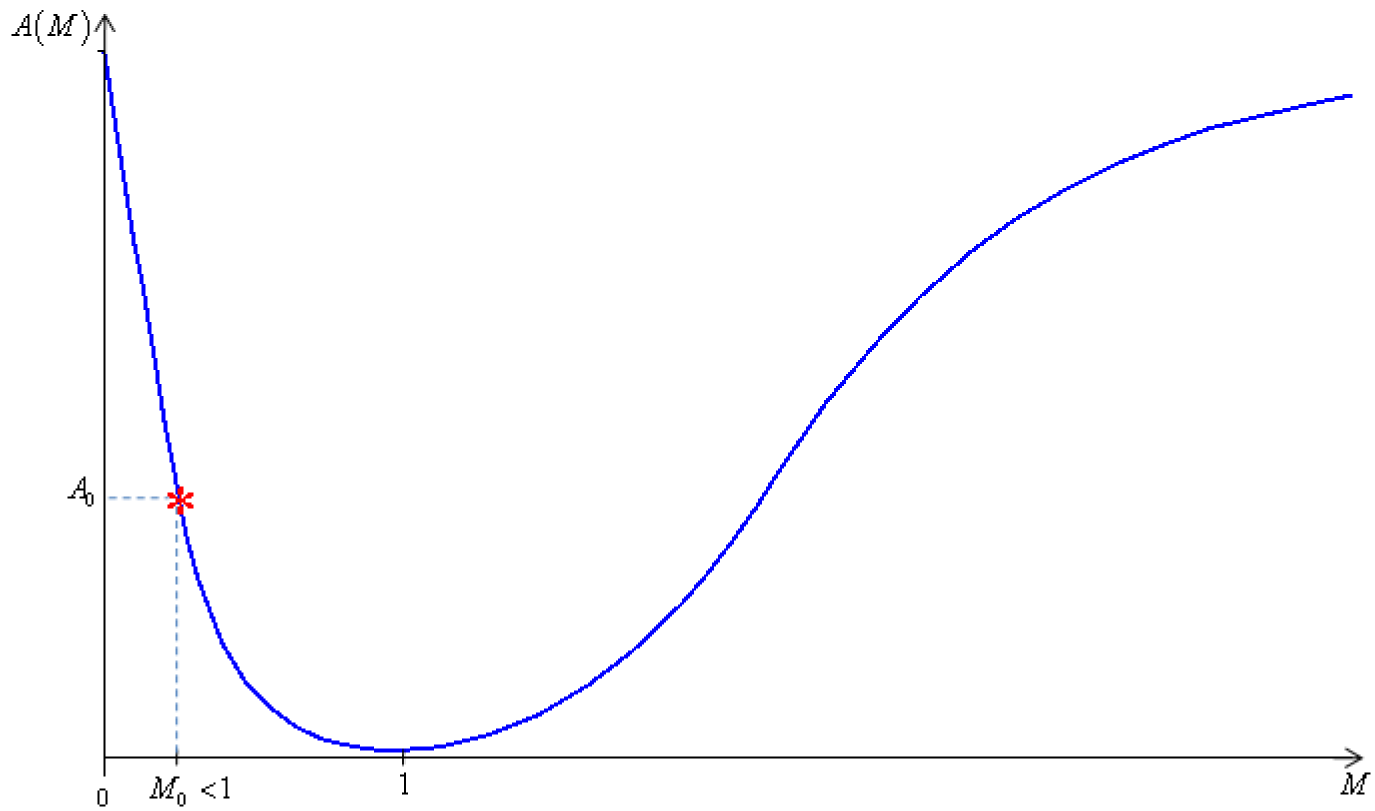
Soit : $Af(M)=cst$. Avec : $f(M)=\dfrac{M}{(1+\alpha M^2)^{\beta}}$. On a bien : $\lim\limits_{M\to 0}\dfrac{f(M)}{M}=1$.

18. on a : $Af=cst$. A est minimale au col, donc f y est maximale.

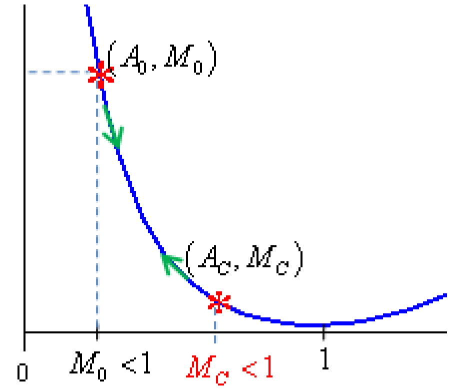
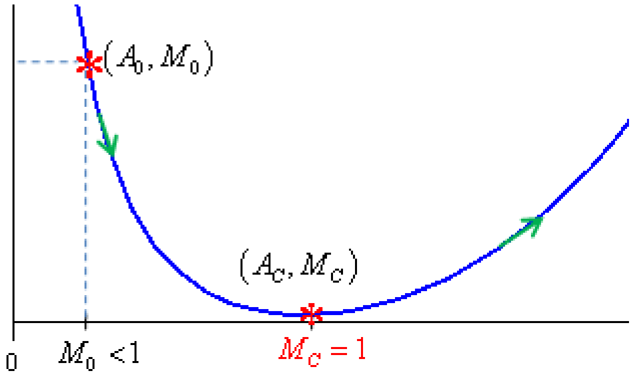
19. on a : $f(0)=0$. $\lim\limits_{M\to\infty} f(M)=0$. $(1+\alpha M^2)^{2\beta}$ $f'(M)=(1+\alpha M^2)^{\beta}-2\alpha\beta M^2(1+\alpha M^2)^{\beta-1}$.

$f'(M)=0\Rightarrow 1+\alpha M^2=2\alpha\beta M^2\Rightarrow M=\sqrt{\dfrac{1}{\alpha(2\beta-1)}}=1$ ($2\beta=1+1/\alpha$) : Donc f est maximale en M_c.

A y est minimale. $\lim\limits_{M\to+\infty} A(M)=+\infty$. $\lim\limits_{M\to+\infty} A(M)=+\infty$.



20.

1ier cas : $M < 1$ au col.	2ième cas : $M = 1$ au col
	
M Diminue quand A augmente	M est croissant dans toute la conduite

21. pour une conduite amorcée, M augmente avec x au long de la conduite.

22. pour un nombre de Mach $M_0^{'} < M_0 < 1$, on aura $M_C < 1$. Donc M croit dans le convergent et décroit dans le divergent.

4. *Caractérisation de la situation au sol*

23. $k_{c0} = \frac{A_c}{A_0} = \frac{f_0}{f_c} = M_0\left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha M_0^2}\right)^{\beta}$. Le rapport k_{c0} diminue avec M_0: plus M_0 est grand plus il faut réduire la section au col de la conduite pour qu'elle soit amorcée.

24. $\alpha \# 0{,}15, \beta \# 3{,}83$ et $M_0 \# 0{,}23 \Rightarrow k_{c0} \# 0{,}83$ et $A_c \# 0{,}075 m^2$.

Graphiquement, pour $M_0 \# 0{,}23$ $A_0 / A_c \simeq 2{,}5 \Rightarrow k_{c0} \# 0{,}4$.

5. *Adaptation en pression*

25. si $p_s = p_e$, le jet ne sera pas déformé. si la pression extérieure est supérieure à celle du gaz, le jet sera comprimé vers l'intérieur. D'où l'association : (a) : $p_s = p_e$; (b) : $p_s < p_e$; (c) : $p_s > p_e$.

26. (5)'' $\Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{1}{(1-\gamma)M^2}\frac{dT}{T} \Rightarrow vdv = \frac{c^2}{(1-\gamma)}\frac{dT}{T} = \frac{\gamma r T}{(1-\gamma)}\frac{dT}{T} = \frac{\gamma r}{(1-\gamma)}dT$.

Soit : $\frac{\gamma r}{(\gamma-1)}dT + vdv = 0$ (6). (6) $\Rightarrow d\left(c_p T + \frac{v^2}{2}\right) = 0$. Soit $h + e_c = cst$. $h = \frac{\gamma r}{(\gamma-1)}T + cst$:enthalpie massique du gaz. $\frac{v^2}{2}$: son énergie cinétique massique.

27. d'après ''13.'' $\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{dT}{2T} \Rightarrow MdM = M^2\frac{dM}{M} = \frac{v^2}{c^2}\frac{dv}{v} - M^2\frac{dT}{2T} = \frac{vdv}{\gamma r T} - M^2\frac{dT}{2T}$. Or d'après ''26.'' $vdv = -\frac{\gamma r T}{(\gamma-1)}\frac{dT}{T}$. Donc : $2MdM = -\left(\frac{2}{(\gamma-1)} + M^2\right)\frac{dT}{T} \Rightarrow 2\alpha MdM = -(1+\alpha M^2)\frac{dT}{T} \Rightarrow$

$\frac{2\alpha MdM}{(1+\alpha M^2)} + \frac{dT}{T} = 0 = d\ln\left[T(1+\alpha M^2)\right]$. Soit : $T(1+\alpha M^2) = cst$.

28. $T(1+\alpha M^2) = cst \Rightarrow \frac{p}{\rho}(1+\alpha M^2) = cst$. On a en plus : $\frac{p}{\rho^{\gamma}} = cst$.

Donc : $\frac{p}{p^{1/\gamma}}(1+\alpha M^2) = p^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}(1+\alpha M^2) = cst$. Ou encore : $p^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}(1+\alpha M^2) = cst$.

29. $\left(1+\alpha M_s^2\right)=\left(\dfrac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}\left(1+\alpha\right)\Rightarrow M_s=\left[\dfrac{\left(1+\alpha\right)}{\alpha}\left(\dfrac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}-\dfrac{1}{\alpha}\right]^{1/2}$

30. Au décollage, $p_e=10^5 Pa$. $\dfrac{p_e}{p_0}\#9.10^{-3}$. D'après la figure 4, $M_s\approx 3,6$.

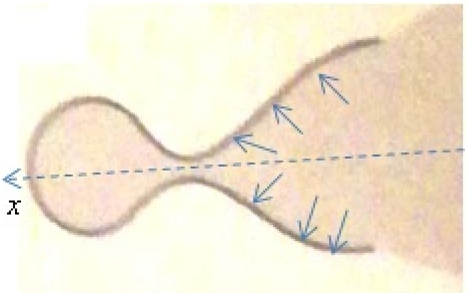
31. D'après la figure 2, pour $M_s\approx 3,6$, $k_{sc}=\dfrac{A_s}{A_c}\approx 11$.

32. D'après la figure 5, $\dfrac{T_s}{T_0}\approx 0,35\Rightarrow T_s\#1225K;c_s=\sqrt{\gamma r T_s}\#860m.s^{-1};v_s=M_s c_s\#3090m.s^{-1}$. Donc:

$F_s=Dv_s\#8.10^5N$. $F_s<F_{th}<m_{F0}g$:en régime adapté, la force de poussée est insuffisante au décollage.

33. pour une valeur de plus élevée de k_{sc} que dans le cas adapté, M_s est plus élevé (figure 2). Donc $p_s>p_e$ (29.) : régime sous détendu.

34. (voir schéma ci-contre)
La surface est le courant doivent présenter un symétrie de révolution autour de Ox.

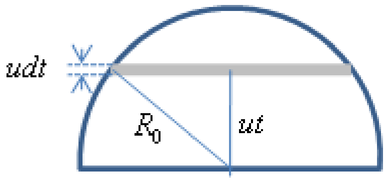


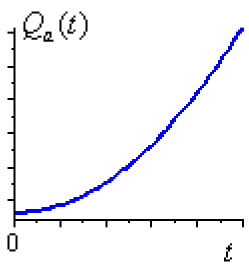
35. l'évolution ne peut pas être supposée réversible pour un écoulement supersonique.

6. *Propulseur d'appoint*

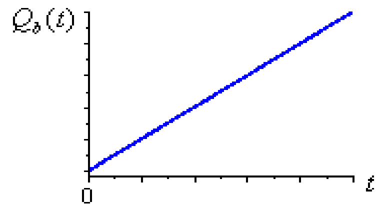
36.

$Q_a=2\mu H u\sqrt{\left(R_0^2+u^2t^2\right)}$:





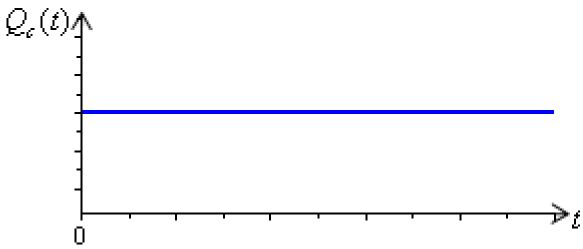
$Q_b=2\pi\mu u H\left(R_{i0}+ut\right)$: variation affine avec t.



37. $Q=\dfrac{dm}{dt}=\dfrac{\mu d\tau}{dt}.d\tau=2\pi\left(R_e+R_i\right)Hudt$. Avec : $R_i=\dfrac{R_0}{2}-ut$ et $R_e=\dfrac{R_0}{2}+e_0+ut$.

Donc : $Q=2\pi\mu H\left(R_0+e_0\right)u\simeq 2\pi\mu R_0 H u$.

38. Représentation graphique :



39. Le canal annulaire est le mieux approprié car il présente un débit contrôlable instantanément établi. Dans les cas (a) et (b) le débit est variable, initialement faible et peut être destructif lorsqu'il est assez important.

40. canal à section en étoile.

41. la pente de variation de v est plus que deux fois plus grande avant t^* qu'après malgré le largage des boosters après t^*: la contribution des boosters à la propulsion au démarrage est plus importante que celle du moteur Vulcain. $F\approx\dfrac{\Delta m}{t^*}v^*\#9,8.10^6N$.

Le pourcentage de la contribution du moteur Vulcain à la poussée totale est de 8% .