Solution de M. El Haouari,
professeur en CPGE de TANGER. Envoyer vos remarques et commentaires à l'adresse électronique suivante: elhaouarimed@yahoo.fr.

I: Diffusion des rayons X aux petits angles

I.1: Interaction d'une onde électromagnétique avec un électron libre

1. Sous l'action du champ électrique de l'onde incidente, l'électron est mis en oscillation forcée, son déplacement $\overrightarrow{\delta}(t)$, d'après le principe fondamental de la dynamique, vérifie l'équation différentielle:

$$m_e\ddot{\overrightarrow{\delta}}(t) = -e\overrightarrow{E}$$

Soit en notation complexe:

$$-m_e\omega^2\overrightarrow{\delta} = -eE_0e^{i\omega t}\overrightarrow{e}_z$$

Donc:

$$\overrightarrow{\delta}(t) = \frac{eE_0}{m_e\omega^2}e^{i\omega t}\overrightarrow{e}_z = \delta_0 e^{i\omega t}\overrightarrow{e}_z$$

2. On a: $\delta_0 = \frac{e\lambda^2}{4m_e\pi^2c^2}\sqrt{\frac{2I_0}{\epsilon_0 c}} = 2.10^{-22}m$!!! et $\frac{\delta_0}{\lambda} = 2.10^{-12} <<< 1$. Donc le retard de phase est très faible:

$$\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{r} = 2\pi\frac{r}{\lambda} \leq 2\pi\frac{\delta_0}{\lambda} << 1$$

On peut donc considérer le champ électromagnétique est uniforme sur un domaine d'espace d'extensio de l'ordre de δ_0

3. Évaluons, le rapport des deux pulsations:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 10^3$$

La pulsation de l'onde électromagnétique, est différente de la pulsation de résonance de l'atome : l'électron peut être considéré comme libre, en effet l'équation différentielle du mouvement de l'électron en tenant de la force exercée par le noyau et la force de frottement visqueux($-\alpha\overrightarrow{v}$), dans le modèle de l'électron elastiquement lié:

$$m_e\frac{d^2(\overrightarrow{\delta}+\overrightarrow{r_0})}{dt^2} + \alpha\frac{d(\overrightarrow{\delta}+\overrightarrow{r_0})}{dt} + m_e\omega_0^2\overrightarrow{\delta} = -e\overrightarrow{E}$$

$\overrightarrow{r}_0$ est la position d'équilibre de l'électron relativement au noyau en l'absence de l'onde, d'où:

$$-m_e\omega^2\overrightarrow{\delta} + i\omega\alpha(\overrightarrow{\delta}) + m_e\omega_0^2\overrightarrow{\delta} = -eE_0e^{i\omega t}\overrightarrow{e}_z$$

donc:

$$\overrightarrow{\delta}(t) = \frac{eE_0}{m_e(\omega^2-\omega_0^2 - i\frac{\alpha\omega}{m_e})}e^{i\omega t}\overrightarrow{e}_z = \frac{\delta_0}{1-\frac{(\omega_0^2+i\frac{\alpha\omega}{m_e})}{\omega^2}}e^{i\omega t}\overrightarrow{e}_z$$

Ansi pour $\omega >> \omega_0$:

$$\overrightarrow{\delta}(t) \simeq \delta_0 e^{i\omega t}\overrightarrow{e}_z$$

4. Les expressions proposées sont valables dans l'approximation dipôlaire c-à-d: la distance r est très grand devant l'excursion spatiale de l'électron autour du noyau atomique, et pour un point M situé dans la zone de rayonnement: $r >> \lambda$. La dépendance en $(t-\frac{r}{c})$ tient compte du retard dû à la propagation de l'onde diffusée entre le centre diffuseur et le point d'observation M.

5. Le champ électrique rayonné est:

$$\overrightarrow{E}_1(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}(t-\frac{r}{c})}{r}sin(\theta)\overrightarrow{e}_\theta$$

Où

$$p(t) = -e\delta(t) = -e\delta_0 e^{i\omega t}$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{p} = e\delta_0\omega^2 e^{i\omega t}$$

Qui donne l'expression du champ électrique:

$$\overrightarrow{E}_1(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\delta_0\omega^2 e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}sin(\theta)\overrightarrow{e}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^2}{m_e}E_0\frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}sin(\theta)\overrightarrow{e}_\theta$$

D'où:

$$b = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e}$$

On trouve de même:

$$\overrightarrow{B}_1(M) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{e^2}{m_e}E_0\frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}sin(\theta)\overrightarrow{e}_\varphi$$

6. La longueur de diffusion Thomson relative au noyau atomique de charge (Ze) et de masse (M_n) est:

$$b' = \frac{\mu_0(Ze)^2}{4\pi M_n}$$

Le champ créé par le noyau est négligeable devant le champ de l'électron au même point d'observation (M), en effet:

$$\frac{|E_1'|}{|E_1|} = \frac{b'}{b} = Z^2\frac{m_e}{M_n} <<< 1$$

I.2: Diffusion par un ensemble d'électrons

1. Le champ résultant en M s'écrit:

$$\overrightarrow{E}(M) = \sum_{j=1}^{N}\frac{bsin(\theta_j)\overrightarrow{e}_{\theta_j}}{\| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j \|}e^{i(\omega t - k\|(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_j)\| - \overrightarrow{k}\overrightarrow{r}_j)}$$

Le point d'observation M est situé à grande distance par rapport à l'ensemble d'électrons $(r >> r_j)$, la distance $(\| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j \|)$ peut être remplacée par r dans le dénominateur de l'expression précédente, ansi que θ_j par θ. Par contre dans l'argument de l'exponentielle, et à cause de la petitesse de la longueur d'onde λ, un calcul approché s'avère nécessaire:

$$\| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j \| \simeq r - \overrightarrow{r}_j\overrightarrow{e}_r$$

On tire le résultat demandé, en introduisant le vecteur de diffusion: $\overrightarrow{q} = k\overrightarrow{e}_r - \overrightarrow{k}$:

$$\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}_1 \sum_{j=1}^{N} e^{i\overrightarrow{q}\overrightarrow{r}_j}$$

On a de même:

$$\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{e}_r \wedge \frac{\overrightarrow{E}_1}{c}\sum_{j=1}^{N} e^{i\overrightarrow{q}\overrightarrow{r}_j}$$

2. On a: $q = \frac{4\pi|sin(\frac{\beta}{2})|}{\lambda}$

3. La puissance reçue par le détecteur, de surface $ds = r^2\delta\Omega$, est égale à:

$$\delta\mathcal{P} = <\overrightarrow{\Pi}> \overrightarrow{ds} = <\overrightarrow{\Pi}> ds\overrightarrow{e}_r$$

   où la valeur moyenne du vecteur de Poynting est:

$$<\overrightarrow{\Pi}> = \frac{1}{2}\mathcal{R}(\frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}^*}{\mu_0})$$

   On tire la section efficace différentielle:

$$\sigma(\overrightarrow{q}) = (bsin(\theta))^2 \mid \sum_{j=1}^{N} e^{i\overrightarrow{q}\overrightarrow{r}_j} \mid^2$$

4. La section efficace différentielle s'écrit aussi:

$$\sigma(\overrightarrow{q}) = (bsin(\theta))^2(\sum_{j=1}^{N} e^{i\overrightarrow{q}\overrightarrow{r}_j})(\sum_{k=1}^{N} e^{-i\overrightarrow{q}\overrightarrow{r}_k}) = (bsin(\theta))^2 \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} e^{i\overrightarrow{q}\overrightarrow{r}_{jk}}$$

   Que l'on peut écrire aussi:

$$\sigma(\overrightarrow{q}) = (bsin(\theta))^2(\sum_{j=1}^{N} e^{i\overrightarrow{q}\overrightarrow{r}_j})(\sum_{k=1}^{N} e^{-i\overrightarrow{q}\overrightarrow{r}_k}) = (bsin(\theta))^2 \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} cos(\overrightarrow{q}\overrightarrow{r}_{jk})$$

5. Pour un grand nombre d'électrons répartis aléatoirement, la section efficace différentielle tend: Si $r_{jk} << q^{-1}$:

$$\sigma(\overrightarrow{q}) = (Nbsin(\theta))^2$$

   Et pour $r_{jk} >> q^{-1}$:

$$\sigma(\overrightarrow{q}) = N(bsin(\theta))^2$$

   Cas d'un diffusuer élémentaire: $r_{jk} << q^{-1}$, il y a additivité des amplitudes: la diffusion est cohérente. Donc la mesure l'intensité diffusée permet de tirer des informations sur la structure des éléments. L'intensité diffusée qui depend de q, donc l'angle de diffusion β, nous permis de tirer des renseignements sur les tailles des particules formant un échantillon donné.

6. Les valeurs des angles (β) qui permettent de tirer des informations sur un échantillon comportant des particules de taille de l'ordre de d sont telles que:

$$qd << 1$$

   Soit:

$$\beta << \frac{\lambda}{2\pi d} \approx 9.10^{-2}deg$$

   D'où le nom de la technique d'analyse étudiée dans cette première partie du problème: Diffusion des rayons X aux petits angles. La difficulté réside dans la mesure du signal diffusé qui est généralement faible.....

I.3: Diffusion par suspension diluées de nanoparticules

1. Sachant la modélisation et les hypothèses considérées, on obtient aisément le résultat demandé:

$$J(\overrightarrow{q}) = \frac{n}{V}b^2(\Delta\rho)^2|g(\overrightarrow{q})|^2$$

2. On a:

$$g(\overrightarrow{q}) = \int\int\int_{V_P} exp(i\overrightarrow{q}\overrightarrow{r})r^2 dr sin(\psi)d\psi d\phi = \int\int\int_{V_P} exp(ircos(\psi))r^2 dr sin(\psi)d\psi d\phi$$

$$= \frac{4\pi}{q^3}(sin(qR) - qRcos(qR))$$

3. En utilisant les développements limités des fonctions trigonométriques, on tire la loi de Guinier, pour $qR << 1$:

$$J_G(\overrightarrow{q}) = \frac{n}{V}b^2(\Delta\rho)^2 V_P^2 \times exp(-\frac{qR}{5})$$

4. Loi de Porod: Si $qR >> 1 \Rightarrow$

$$g(\overrightarrow{q}) = \frac{4\pi}{q^3}(sin(qR) - qRcos(qR)) \simeq \frac{4\pi}{q^3} \times (-qRcos(qR))$$

D'où:

$$J(\overrightarrow{q}) = \frac{n}{V}b^2(\Delta\rho)^2|g(\overrightarrow{q})|^2 \simeq \frac{n}{V}b^2(\Delta\rho)^2(\frac{4\pi}{q^3} \times (-qRcos(qR)))^2$$

$$= 4\pi\frac{n}{V}b^2(\Delta\rho)^2\frac{4\pi R^2}{q^4} \times (cos(qR))^2$$

$$J(\overrightarrow{q}) = \frac{4\pi}{V}b^2(\Delta\rho)^2\frac{S}{q^4} \times (cos(qR))^2$$

5. Pour une solution de particules réelles (de grand nombre de particules), de tailles différentes, l'intensité observée est la valeur moyenne de l'expression précédente sur l'échantillon irradié. Le terme oscillant, se moyenne, et on obtient ansi la loi Porod: $J(\overrightarrow{q})$ proportionnel à $\frac{1}{q^4}$

6. D'après l'encart de la figure 2, les nanoparticules de la silice s'agrègent en amas, la courbe donnant les variations de $J(\overrightarrow{q})$, on distingue de 3 régimes de diffusions dépendant des tailles des différentes particules formant l'échantillon :
Deux régimes de type Porod, correspondant aux parties de la courbe quasi-linéaire de pente -4:
Pour l'amas formé par les nano agglomérats de nanoparticules de silice:

$$q < 3.10^{-3}(nm)^{-1}$$

Et pour les nanoparticules de silice de rayon(R):

$$5.10^{-2}(nm)^{-1} < q < 10.(nm)^{-1}$$

Un régime de diffusion de type Guinier pour nanoparticules de silice (de rayon R), pour:

$$q < 5.10^{-2}(nm)^{-1}$$

La loi de Guinier et le tracé experimental permet d'estimer la valeur de R, j'ai trouvé une valeur de l'ordre $30nm$.

Solution proposée par M. El Haouari,
Docteur et Agrégé de Physique, professeur en CPGE de TANGER. Envoyer vos remarques et commentaires à l'adresse électronique suivante: elhaouarimed@yahoo.fr.