**ECOLE POLYTECHNIQUE**
**Première composition de physique MP 2002**

**Mesure de l'activité sismique d'une étoile par interférométrie.**

## I Interférométrie

1a) La lame semi-réfléchissante divise l'amplitude de l'onde incidente en deux quantités égales formant ainsi deux faisceaux d'égale intensité sans introduire de différence de marche entre les deux (par la présence d'une lame compensatrice). La lentille *L* avec l'écran *E* placé dans son plan focal image permet de visualiser à distance finie les interférences à l'infini entre les deux faisceaux.

1b) Après réflexion sur les miroirs (1) et (2), les faisceaux retournent sur la lame semi-réfléchissante. La moitié seulement de chacun d'eux ira vers la lentille. Globalement, la moitié de l'intensité entrant dans le dispositif sera perdue.

2a) La tache centrale est brillante, comme elle correspond à l'angle $i = 0$, cela signifie que l'ordre au centre $p_0$ est un entier tel que $D = p_0\lambda$. Pour l'incidence $i$, la différence de marche est $\delta = D\cos i$. Compte tenu de la présence de la lentille, les angles doivent être petits afin de travailler dans les conditions de Gauss. On peut donc proposer un développement limité de la différence de marche :

$$\delta = D\left(1 - i^2/2\right) = p\lambda = p/\sigma_0$$

Le premier anneau sombre s'obtient pour $p = p_0 - ½$ car l'ordre décroît en partant du centre comme la différence de marche. Le rayon de l'anneau s'obtient en utilisant un rayon lumineux non dévié passant par le centre de la lentille *L*. On a alors :

$$r_1 = f'i = f'/\sqrt{D\sigma_0}$$

Sur l'écran, on observe des anneaux concentriques de centre *F'* dont les rayons se resserrent lorsqu'on s'éloigne du centre.

2b) On a globalement la même chose qu'avant mais comme le filtre n'est pas totalement monochromatique, il y a aura une perte de contraste et peut-être moins d'anneaux car l'angle d'incidence reste faible.

3a) L'amplitude envoyée par le chemin (1) est du type : $s_0 \exp(j\omega t)$, celle envoyée par le chemin (2) est déphasée : $s_0 \exp(j\omega t)\exp(j2\pi\sigma_0 D)$. L'addition des deux amplitudes donne :

$$s = s_0 \exp(j\omega t)\left[1 + \exp(j2\pi\sigma_0 D)\right]$$

Comme l'intensité lumineuse est du type : $I = \alpha s s^*$, on obtient facilement la formule traditionnelle :

$$I = I_0\left(1 + \cos 2\pi\sigma_0 D\right)$$

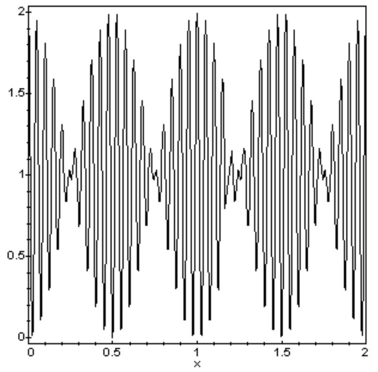
et donc la valeur du signal détecté proposée par l'énoncé.

3b) La période de l'interférogramme est la valeur de *D* telle que $D\sigma_0 = 1$.

4) Les deux raies du doublet ne sont pas cohérentes, les intensités de chacune vont s'ajouter, il en ira de même des signaux détectés :

$$S(D) = S_0\left(1 + \cos 2\pi\sigma_1 D\right) + S_0\left(1 + \cos 2\pi\sigma_1 D\right) = 2S_0\left(1 + \cos 2\pi\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)D \cos 2\pi\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)D\right)$$

Il y a une période rapide : $2/(\sigma_1 - \sigma_2) = 589{,}3\,\mathrm{nm}$ et une période lente : $2/(\sigma_1 + \sigma_2) = 1{,}158\,\mathrm{mm}$. Il est difficile de faire une représentation lisible de cette situation car le rapport des périodes est très élevé (2000). Pour la schématisation, on utilisera un rapport de 20.




**II Interférogramme d'une raie élargie**

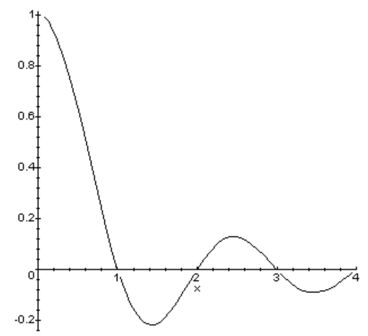
1a) Il faut comme dans la question précédente additionner les intensités à cause de l'incohérence entre les différentes longueurs d'onde. Toutefois, il faut conduire un raisonnement en considérant un intervalle de nombre d'onde infinitésimal de la largeur $d\sigma$. Le calcul de l'intensité est donc :

$$I = \int_{\sigma_0-\Delta\sigma/2}^{\sigma_0+\Delta\sigma/2} \frac{I_0}{\Delta\sigma}(1+\cos 2\pi\sigma D)d\sigma$$

Après calculs, on trouve que le signal détecté est de la forme :

$$S(D) = S_0\left(1+\frac{\sin \pi\Delta\sigma D}{\pi\Delta\sigma D}\cos 2\pi\sigma_0 D\right)$$

La visibilité en sinuscardinal va détériorer assez rapidement le contraste de la figure d'interférences lorsque $D$ va augmenter. La représentation très classique est :




1b) La plus petite valeur de $D$ qui annule la visibilité est : $D_{\Delta\sigma} = 1/\Delta\sigma$.

2a) On voit d'après la question précédente qu'il suffit que $D$ soit quelques fois plus grand que $1/\sigma_2\text{-}\sigma_1$ pour que la visibilité tende vers 0. En l'absence de la raie d'absorption, le signal serait uniforme : $S_C(D) = kI_C$.

2b) En modélisant le profil $I_\sigma$ par des fonctions carrées, l'intensité est donnée par :

$$I = \frac{I_C}{\sigma_2-\sigma_1}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}(1+\cos 2\pi\sigma D)d\sigma - \frac{I_a}{\Delta\sigma}\int_{\sigma_0-\Delta\sigma/2}^{\sigma_0+\Delta\sigma/2}(1+\cos 2\pi\sigma D)d\sigma$$

Après calculs, on trouve :

$$I = I_C\left(1+\frac{\sin \pi(\sigma_2-\sigma_1)D}{\pi(\sigma_2-\sigma_1)D}\cos 2\pi\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)D\right) - I_a\left(1+\frac{\sin \pi\Delta\sigma D}{\pi\Delta\sigma D}\cos 2\pi\sigma_0 D\right)$$

Si $D >> 1/(\sigma_2 - \sigma_1)$, alors $\dfrac{\sin \pi(\sigma_2 - \sigma_1)D}{\pi(\sigma_2 - \sigma_1)D} \to 0$. De la même façon, si $\Delta\sigma \to 0$ alors $\dfrac{\sin \pi\Delta\sigma D}{\pi\Delta\sigma D} \to 1$. L'expression de l'intensité est la suivante :

$$I = I_C - I_a - I_a \cos 2\pi\sigma_0 D$$

En négligeant l'intensité $I_a$ devant $I_C$, on obtient la formule demandée par l'énoncé avec $C = -I_a/I_C$.

**III Elargissement et décalage possibles des raies spectrales. Evaluation de la différence de marche optimale.**

1a) Cette vitesse est telle que : $\frac{1}{2} m_H V_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$.

1b) La valeur de $\cos\theta$ variant entre +1 et –1, on obtient après rapidement : $\Delta\sigma_K = \sigma_0 \dfrac{2V_T}{c}$.

1c) On trouve $V_T$ = 1,22.10$^4$m.s$^{-1}$ et $\Delta\sigma_K$ = 1,63.10$^2$m$^{-1}$.

2a) Si $\Psi$ = 0, on n'aura aucun effet, car toutes les vitesses seront dans un plan perpendiculaire à la direction d'observation. Par contre si $\Psi = \pi/2$, l'effet sera maximum car $\theta$ sera alors voisin de 0. On obtient un élargissement Doppler car toutes les vitesses sont représentées du centre vers la périphérie de l'étoile.

2b) Les valeurs extrémales de la vitesse sont $\pm V_{\text{rot}}$, donc on a : $\Delta\sigma_{\text{rot}} = \sigma_0 \dfrac{2V_{\text{rot}}}{c}$. Ce dernier terme sera comparable au précédent si $V_{\text{rot}} \cong V_T$.

2c) On trouve naturellement $V_{\text{rot}}$ = 1,22.10$^4$m.s$^{-1}$.

3a) Le nombre d'onde est maintenant une fonction du temps selon : $\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_0 \dfrac{\Delta v(t)}{c}$. On a donc : $S(D_0) = S_0\left(1 + C\cos 2\pi\sigma_0\left(1 + \dfrac{\Delta v(t)}{c}\right)D_0\right)$. Cela conduit immédiatement à la réponse proposée par l'énoncé.

3b) Comme le rapport $\Delta v/c$ est très petit devant 1, si l'on veut une détection optimale, il faut que la différence de marche $D_0$ soit grande. De plus, la fonction cosinus variant le plus rapidement au voisinage de $\pi/2$, il est important de ce placer à ce point de fonctionnement en choisissant la différence de marche telle que : $D_0 = (2p+1)\dfrac{1}{4\sigma_0}$. Pour que l'on puisse considérer le signal comme monochromatique, il ne faut pas que le contraste s'annule pour l'effet Doppler thermique. On peut proposer $D_0 \cong \dfrac{1}{2\Delta\sigma_K} = \dfrac{c}{4\sigma_0 V_T}$.

3c) Dans ces conditions le déphasage mesuré est bien de l'ordre de $\Delta v / V_T$.

4) Sur Terre, la vitesse varie sur $\pm \omega_T R_T \cos\lambda$ avec $\omega_T = 7{,}3.10^{-5}\,\text{rad.s}^{-1}$. L'amplitude de la vitesse est de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde. Cet effet est extrêmement important devant celui des oscillations sismiques, mais on dispose d'un atout : sa fréquence plus basse d'un facteur 100 par rapport à celle des ondes sismiques (10$^{-2}$s$^{-1}$). En utilisant un filtre passe-haut, on devrait pouvoir éliminer ce signal terrestre.

**IV Amélioration du montage interférométrique**

Cette partie du sujet soulève, à mon avis, des interrogations.

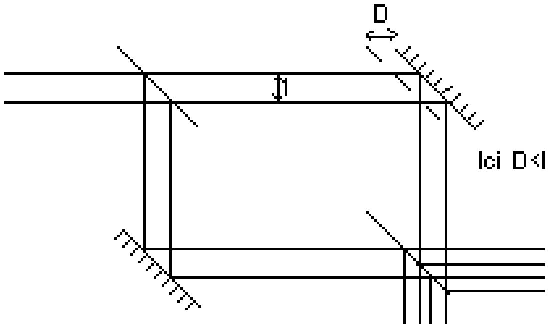
1a) Comme on travaille avec un faisceau de lumière parallèle monochromatique, on peut se poser des questions quant à l'origine du contraste $C$ figurant dans l'expression fournie par l'énoncé. Dans l'interféromètre les deux voies sont strictement équivalentes, ce qui tendrait à nous faire répondre que le signal détecté sur la deuxième voie est identique au premier. Cela ne correspond plus avec l'ensemble des questions proposées par l'énoncé. Comme l'énoncé nous pousse à écrire la conservation de l'énergie (ou du flux) lumineux, la réponse attendue est que la somme des deux intensités doit donner une valeur constante. Ainsi, le signal $S_2$ est :

$$S_2 = \frac{S_0}{2}\left(1 - C\cos\psi\right)$$

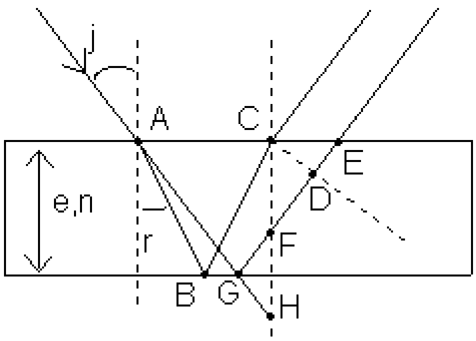
1b) Par addition et soustraction, on obtient facilement :

$$C\cos\psi = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$$

1c) Nous ne possédons pas d'informations sur le détecteur utilisé. S'il possède une optique visant à faire converger la lumière sur le capteur (comme par exemple une lentille convergente comme dans la partie (I)), la question du recouvrement ne se pose pas. Il faut donc supposer que le capteur ne possède pas d'optique… Si l'on se réfère au schéma suivant, cela signifie que si $D > l$ alors, il n'y a pas de recouvrement, si $D < l$ il y a recouvrement partiel, et enfin si $D = 0$ alors il y a recouvrement total. Si la différence de marche $D$ est nulle, il n'y a aura aucun effet de la question III3a), le dispositif est sans aucun intérêt. Dans tous les interféromètres de type Mach et Zender, c'est en disymétrisant les deux voies qu'on effectue des mesures.




2a) C'est bien ce que l'on réalise maintenant. L'énoncé propose uniquement d'interposer une lame contre l'un des miroirs. Le calcul de la différence de marche s'effectue sur le schéma suivant :




La différence de marche devrait être donnée par :

$$D = n\left(AB + BC\right) - AG - GD = \frac{2ne}{\cos r} - 2AG + DE$$

Or on a : $AG = \dfrac{e}{\cos j}$ et $DE = CE\sin j = \left(AE - AC\right)\sin j = 2e\left(\tan j - \tan r\right)\sin j$. En utilisant la relation de Descartes $\sin j = n\sin r$, il n'est pas possible d'obtenir la formule désirée… ?

On peut toutefois observer que si l'on considère la différence de marche $D = \dfrac{2ne}{\cos r} - AG - GF$, on aboutit au résultat car $AG + GF = AH = \dfrac{AC}{\sin j} = 2e\dfrac{\tan r}{\sin j} = \dfrac{2e}{n\cos r}$. Ce calcul me pose problème.

2b) A partir des valeurs numériques fournies, on trouve un angle $r$ = 27,2° et $e$ = 3,13mm.
2c) Le problème du recouvrement des faisceaux est du même type que celui que nous avons discuté avant. Toutefois, dans cette situation la réfraction dans la lame entraîne à la sortie un rayon parallèle à celui qui existait avant interposition de la lame mais décalé dans l'espace… Le problème du recouvrement ne m'apparaît pas très clair.

**V Effet de la turbulence atmosphérique**

1a) Avec un montage afocal, on conserve une image à l'infini pour l'objet situé à l'infini. L'éclairage s'effectue toujours en lumière parallèle par conséquent.
1b) En utilisant un rayon lumineux incliné sur l'axe qui passe par le foyer objet de la première lentille, qui se trouve parallèle à l'axe optique entre les deux lentilles et qui ressort en passant par le foyer image de la seconde, on démontre facilement le résultat très traditionnel :

$$G = f'_1 / f'_2 \text{ en valeur absolue.}$$

1c) En utilisant les triangles de la figure (6), on démontre aisément que :

$$\frac{b}{a} = \frac{f'_2}{f'_1} = \frac{1}{G}$$

L'application numérique conduit à $b$ = 2cm.
2a) Toujours en valeur absolue, on a $i = Gi_0$.
2b) Dans cette partie, on ne sait pas si l'on doit revenir à la différence de marche de la partie IV ou bien à celle du début du sujet… Si l'on regarde la question 3a), on s'aperçoit que le développement limité fait apparaître un angle $i$ au carré comme premier ordre non nul. On peut pressentir que la différence de marche est en cosinus… La réponse à la question est alors triviale :

$$D = D_0 \cos i = D_0\left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

Si on avait conservé la différence de marche de la partie IV, en effectuant un développement limité au voisinage de 45°, on aboutit à :

$$D = D_0\left(1 + \frac{i}{2n^2 - 1}\right)$$

ce qui ne correspond pas du tout à la forme proposée ensuite pour $\delta v / c$.
2c) Il faut donc que $D_0 \dfrac{i_{\max}^2}{2} = D_0 \dfrac{G^2 i_{0\max}^2}{2} < \dfrac{\alpha}{\sigma_0}$.
2d) Le grandissement angulaire (et non pas le grossissement) $G$ doit vérifier la condition suivante :

$$G < \sqrt{\frac{2\alpha}{D_0 \sigma_0 i_{0\max}^2}} = 516$$

3a) La fluctuation atmosphérique entraîne une contribution supplémentaire au déphasage $\varphi(t)$ de la question III3a). La contribution relative de la vitesse est du type $\delta v/c$, celle de la fluctuation du type $\delta D/D_0 = i^2/2$. On obtient ainsi la formule demandée.
3b) L'application numérique conduit à :

$$\delta v = c\frac{i^2}{2} \cong 100 \text{m.s}^{-1}$$

Les mesures de 10cm.s$^{-1}$ nécessitent de corriger par l'optique adaptative les fluctuations atmosphériques. Cela nous amène à trouver discutable l'introduction du sujet qui disait que l'appareil décrit était bien moins coûteux et encombrant. En effet, c'est vraisemblablement la partie optique adaptative qui va faire le prix de l'instrument.