Concours Commun Mines Ponts 2020

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II-MP

E. Azouhri
Lycée Med V Casablanca
azouhrielhoussine@gmail.com

La loi de Wiedemann-Franz

I.— Détermination expérimentale de la conductivité électrique du cuivre

☐ **1** — Le calibre le plus adéquat est 500Ω, il présente la résolution qui permet d'évaluer notre résistance.

La résolution est la plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible de l'indication délivrée par l'instrument.

L'incertitude est :

$$\Delta R = \frac{0,003.0,1 + 3.0,1}{\sqrt{3}} = 0,2$$

Donc ,

$$R = 0.1 \pm 0.2\Omega$$

La valeur trouvée n'est pas précise.

☐ **2** — L'erreur systématique du montage (1) est :

$$\varepsilon_1 = \frac{R_1 - R}{R}$$

Or : $\dfrac{U_1}{I_1} = R + R_A$. D'où :

$$\varepsilon_1 = \frac{R_A}{R}$$

L'erreur systématique du montage (2) est :

$$\varepsilon_2 = \frac{R - R_2}{R}$$

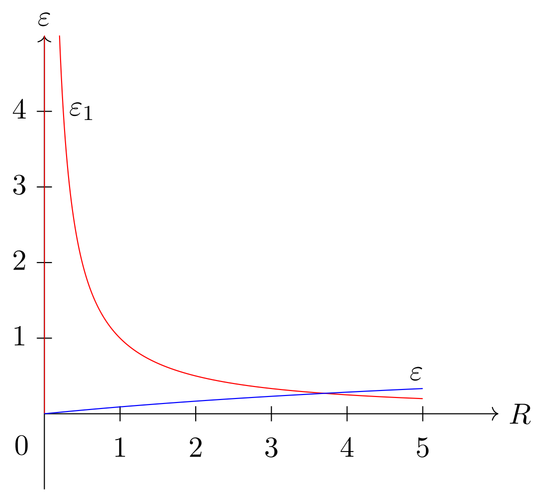
Or :

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{RR_v}{R + R_v}$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_2 = 1 - \frac{R_v}{R + R_v} = \frac{R}{R + R_v}$$

L'allure de ces erreurs systématiques en fonction de R est :



On a intérêt à ce que l'erreur systématique soit faible.
La valeur de la résistance R est petite.
On constate que le cas du montage 2 fournit une erreur faible lorsque la résistance R est petite.

☐ **3** — La résistance du fil est donc :
On a :
$U = 287.5mV$ et $\Delta U = \dfrac{0,003.287,5 + 2.0,1}{\sqrt{3}} = 0,7mV;$
Quelque soit le calibre utilisé , la précision est la même.

$I = 5,23A$ et $\Delta I = \dfrac{0,01.5,23 + 3.0,01}{\sqrt{3}} = 0,05A.$
Car le calibre utilisé est celui de $10A - DC$.
La valeur de la résistance est :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{287.5}{5.23}10^{-3} = 54,97.10^{-3}\Omega$$

L'incertitude sur la résistance est :

$$\Delta R = R\sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = 0,5.10^{-3}\Omega$$

D'où :

$$(R = 55,0 \pm 0,5)\,.10^{-3}\Omega$$

☐ **4** — L'expression de la conductivité :
Soit :
ℓ : la longueur du fil; $\ell = 10.0m$:
S sa section , $S = \pi r^2$ avec r : le rayon du fil ; $r = 1.0mm$;
On a :

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{S} \Rightarrow \gamma = \frac{l}{RS} = \frac{l}{R\pi r^2}$$

$$\gamma = \frac{10.0}{55.10^{-3}\pi\left(10^{-3}\right)^2} = 5,8.10^7 Sm^{-1}$$

II.— Relation entre conductivités thermique et électrique dans un métal

☐ **5** — On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel lié au laboratoire :

$$-e\overrightarrow{E} - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{v} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$$

Après un régime transitoire, la vitesse de l'électron atteint une valeur limite correspondant à $\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}$ nulle. L'expression de cette vitesse limite est :

$$\overrightarrow{v} = -\frac{e\tau}{m}\overrightarrow{E}$$

L'expression de la densité volumique du courant est :

$$\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v} = -ne\overrightarrow{v}$$

D'où :

$$\overrightarrow{j} = -ne\frac{-e\tau}{m}\overrightarrow{E} = \frac{ne^2\tau}{m}\overrightarrow{E}$$

La conductivité électrique du matériau est alors :

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

☐ **6** — Si la i-ème particule ne subissait pas de collision, alors sous l'effet de la force de Coulomb, on aura :

$$\overrightarrow{p}_i(t+dt) = \overrightarrow{p}_i(t) + \overrightarrow{f}_C dt$$

Si la i-ème particule ne subissait que la collision alors :

$$\overrightarrow{p}_i(t+dt) = \overrightarrow{p}^{+}_{i,0}$$

On tient compte du fait que la particule subit une collision avec une probabilité de $\dfrac{dt}{\theta}$, et la probabilité pour qu'elle ne subisse pas de collision est : $\left(1 - \dfrac{dt}{\theta}\right)$.

On aura donc :

$$\overrightarrow{p}_i(t+dt) = \frac{dt}{\theta}\overrightarrow{p}^{+}_{i,0} + \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right)\left[\overrightarrow{p}_i(t) + \overrightarrow{f}_C dt\right]$$

☐ **7** — On développe la relation précédente :

$$\overrightarrow{p_i}(t+dt) - \overrightarrow{p_i}(t) = \frac{dt}{\theta}\overrightarrow{p}^{+}_{i,0} + \overrightarrow{f}_C dt - \frac{dt}{\theta}\overrightarrow{p}_i(t) - \frac{dt}{\theta}\overrightarrow{f}_C dt$$

Donc :

$$\frac{\overrightarrow{p_i}(t+dt) - \overrightarrow{p_i}(t)}{dt} = \frac{1}{\theta}\overrightarrow{p}^{+}_{i,0} + \overrightarrow{f}_C - \frac{1}{\theta}\overrightarrow{p}_i(t) - \frac{1}{\theta}\overrightarrow{f}_C dt$$

En remarquant, lorsque dt tend vers zéro que :

$$\frac{\overrightarrow{p_i}(t+dt) - \overrightarrow{p_i}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{p}_i(t)}{dt}$$

On s'intéresse à toutes les particules, en sommant sur les N électrons , on obtient avec dt qui tend vers 0, $\overrightarrow{f}_C$ et θ qui sont finis :

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\overrightarrow{p}_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\theta}\overrightarrow{p}^{+}_{i,0} + N\overrightarrow{f}_C - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{p}_i(t) - 0$$

Donc :

$$N\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{p}_{i,0}^{+}+N\overrightarrow{f}_{C}-\frac{1}{\theta}N\overrightarrow{p}\,(t)$$

D'où :

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}=\frac{1}{N\theta}\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{p}_{i,0}^{+}+\overrightarrow{f}_{C}-\frac{1}{\theta}\overrightarrow{p}\,(t)$$

Le terme $\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\overrightarrow{p}_{i,0}^{+}$, est la moyenne des quantités de mouvement après le choc , cette valeur moyenne est nulle car les différentes directions sont équiprobables.

D'où le résultat :

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}=\overrightarrow{f}_{C}-\frac{1}{\theta}\overrightarrow{p}\,(t)$$

On en déduit que :

$$\theta=\tau$$

☐ **8** — La probabilité $\Pi(t+dt)$,qu'un électron n'ait pas subi de collision entre $t=0$ et $t+dt$ est la probabilité pour que l'électron n'ait pas subi de collision ni entre $t=0$ et t, ni entre t et $t+dt$.

La probabilité $\Pi(t+dt)$ est doc égale au produit des deux probabilités :

$$\Pi\,(t+dt)=\Pi\,(t)\left(1-\frac{dt}{\theta}\right)=\Pi\,(t)\left(1-\frac{dt}{\tau}\right)$$

Donc :

$$\Pi\,(t+dt)-\Pi\,(t)=-\Pi\,(t)\,\frac{dt}{\tau}$$

Par conséquent :

$$\frac{d\Pi}{dt}+\frac{\Pi}{\tau}=0$$

On intègre :

$$\Pi\,(t)=\Pi\,(0)\,e^{-\dfrac{t}{\tau}}$$

L'électron a subi sa dernière collision à l'instant $t=0^{-}$.

La probabilité qu'un électron n'ait pas subi de collision à l'instant $t=0$ est donc 1.

D'où :

$$\Pi\,(t)=e^{-\dfrac{t}{\tau}}$$

☐ **9** — Prenons une tranche comprise entre $x-\tau v$ et $x+\tau v$.

L'énergie traversant la section droite située à l'abscisse x dans le sens des x croissant est :

$$dE_1=\varepsilon\left(T\left(x-v\tau\right)\right)\frac{n}{2}Sv\tau$$

$\frac{1}{2}$ car une particule a la même probabilité de se déplacer vers la gauche ou vers la droite.

L'énergie traversant la section droite située à l'abscisse x dans le sens des x décroissant est :

$$dE_2=\varepsilon\left(T\left(x+v\tau\right)\right)\frac{n}{2}Sv\tau$$

$$j_q=\left[\varepsilon\left(T\left(x-v\tau\right)\right)-\varepsilon\left(T\left(x+v\tau\right)\right)\right]\frac{n}{2}Sv\tau\frac{1}{S\tau}$$

D'où :

$$j_q=\frac{n}{2}v\left[\varepsilon\left(T\left(x-v\tau\right)\right)-\varepsilon\left(T\left(x+v\tau\right)\right)\right]$$

☐ **10** —

$$j_q = -\frac{nv}{2}\frac{d\varepsilon}{dT}\frac{dT}{dx}2\tau v = -n\tau v^2 C_v \frac{dT}{dx}$$

La conductivité thermique est alors, d'après la loi de Fourier :

$$\lambda = n\tau v^2 C_v$$

☐ **11** — L'énergie cinétique associée à une particule astreinte à se déplacer uniquement suivant l'axe des x est :

$\varepsilon = \frac{1}{2}k_B T$

D'où :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k_B T \Rightarrow C_v = \frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{1}{2}k_B$$

Par conséquent :

$$\lambda = n\tau v^2 C_v = n\tau \frac{k_B}{2}\frac{k_B T}{m} = \frac{n\tau k_B^2 T}{2m}$$

☐ **12** —

$$\gamma = \frac{n\tau e^2}{m}$$

$$\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{n\tau k_B^2 T}{2m}\frac{m}{n\tau e^2 T} = \frac{k_B^2}{2e^2}$$

Dans le cas tridimensionnel, la probabilité pour qu'un électron ait le sens des x croissant est $\frac{1}{6}$ et non $\frac{1}{2}$; il faut donc diviser la formule trouvée de λ par 3 :

$$\lambda = \frac{1}{3}n\tau v^2 C_v$$

D'autre part, l'énergie cinétique de l'électron est :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow C_v = \frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{3}{2}k_B \quad et \quad v^2 = \frac{3k_B T}{m}$$

On remplace :

$$\lambda = \frac{1}{3}n\tau v^2 C_v = \frac{1}{3}n\tau \frac{3k_B}{2}\frac{3k_B T}{m} = \frac{3n\tau k_B^2 T}{2m}$$

Par conséquent :

$$\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{3k_B^2}{2e^2}$$

☐ **13** — Les expressions des conductivités thermique et électrique en tenant compte des résultats précédents.

$$\lambda = \frac{n\tau v^2 C_v}{3} \quad ; \quad \gamma = \frac{n\tau e^2}{m}$$

. Le coefficient le Lorenz est donc :

$$\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{n\tau v^2 C_v m}{3n\tau e^2 T} = \frac{n\tau m}{3n\tau e^2 T}\frac{2e_F}{m}\frac{\pi^2}{2}\frac{k_B^2 T}{e_F}$$

Alors :

$$\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{\pi^2}{3}\frac{k_B^2}{e^2}$$

☐ **14** — Dans le cas classique,

$$\kappa_{classique} = \frac{3k_B^2}{2e^2}$$

Dans le cas quantique,

$$\kappa_{quantique} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2}$$

$$\kappa_{quantique} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2} = \frac{2}{9}\pi^2 \kappa_{classique} \simeq 2\kappa_{classique}$$

L'ordre de grandeur du C_v est :

$$C_v = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right) k_B \simeq \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{40} k_B \simeq \frac{1}{8} k_B$$

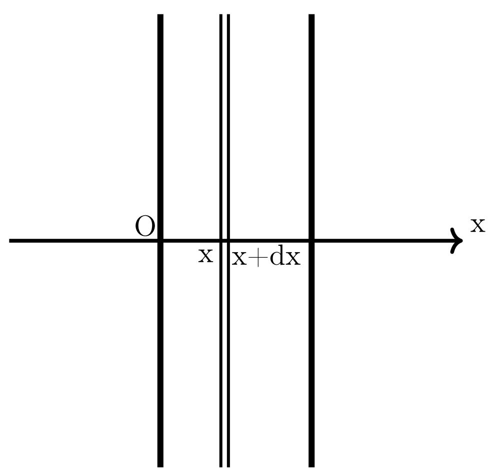
Cette valeur est différente de la valeur classique : $C_v \simeq \frac{3}{2} k_B$.

III.— Détermination expérimentale de la conductivité thermique du cuivre

☐ **15** — On peut déterminer la masse volumique du cuivre en mesurant la masse d'un échantillon de cuivre à l'aide d'une balance et son volume à l'aide d'une éprouvette graduée.

On peut aussi déterminer la capacité thermique du cuivre en utilisant un calorimètre. On introduit une eau de température fixée et un échantillon de cuivre chaud de température connue. En mesurant la température de l'équilibre lorsqu'on introduit le morceau de cuivre dans le calorimètre, on peut en déduire la capacité du métal.

☐ **16** — La plaque du cuivre est caractérisé par :
c : Capacité thermique massique supposée constante;
ρ : Masse volumique supposée constante;
λ : Conductivité thermique



Le bilan thermique dans la couche comprise entre x et $x + dx$ permet d'écrire :

$$j_{th}(x)Sdt - j_{th}(x+dx)Sdt = \rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Donc :

$$-\frac{\partial j_{th}}{\partial x} S dx dt = \rho S c dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

On utilise la loi de Fourier :

$$\overrightarrow{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)$$

On en déduit :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

☐ **17** — Les fonctions f et g vérifient donc les équations différentielles :

$$f(x)g'(t) = Df''(x)g(t)$$

Donc :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = D\frac{f''(x)}{f(x)}$$

La fonction $f(x)$ ne dépend que de la variable x, alors que la fonction $g(t)$ ne dépend que de la variable t. Les deux termes sont donc égaux à une constante β.

D'où :

$$g'(t) = \beta g(t) \qquad et \qquad f''(x) = \frac{\beta}{D}f(x)$$

La solution de l'équation différentielle vérifiée par la fonction g est :

$$g(t) = a_1 e^{\beta t}$$

La solution $g(t)$ ne doit pas diverger, la constante β doit donc être négative.

On posera : $\beta = -\alpha^2 = -Dk^2$.

D'où

$$g(t) = a_1 e^{-Dk^2 t}$$

La solution de l'équation différentielle vérifiée par la fonction f est :

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0$$

$$f(x) = b_1 \cos(kx) + d_1 \sin(kx)$$

D'où l'expression de T(x,t) :

$$T(x,t) = e^{-\alpha t}\left(b\cos(kx) + d\sin(kx)\right)$$

☐ **18** — solution proposée vérifie bien l'équation différentielle :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

☐ **19** —

$$T(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(u_n \cos(k_n x) + w_n \sin(k_n x)\right)$$

Le profil de la température est tel que :

Le flux surfacique entrant en $x = 0$ est :

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x=0) = 0$$

Or :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-u_n k_n \sin(k_n x) + w_n k_n \cos(k_n x)\right)$$

Ceci est vrai en $x = 0$, pour tout mode n donc :

$$w_n = 0$$

D'où :

$$T(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(u_n \cos(k_n x)\right)$$

Et :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-u_n k_n \sin\left(k_n x\right)\right)$$

Le flux surfacique entrant en $x = L$ est :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x = L) = 0$$

pour tout mode n donc :

$$k_n L = n\pi$$

D'où :

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

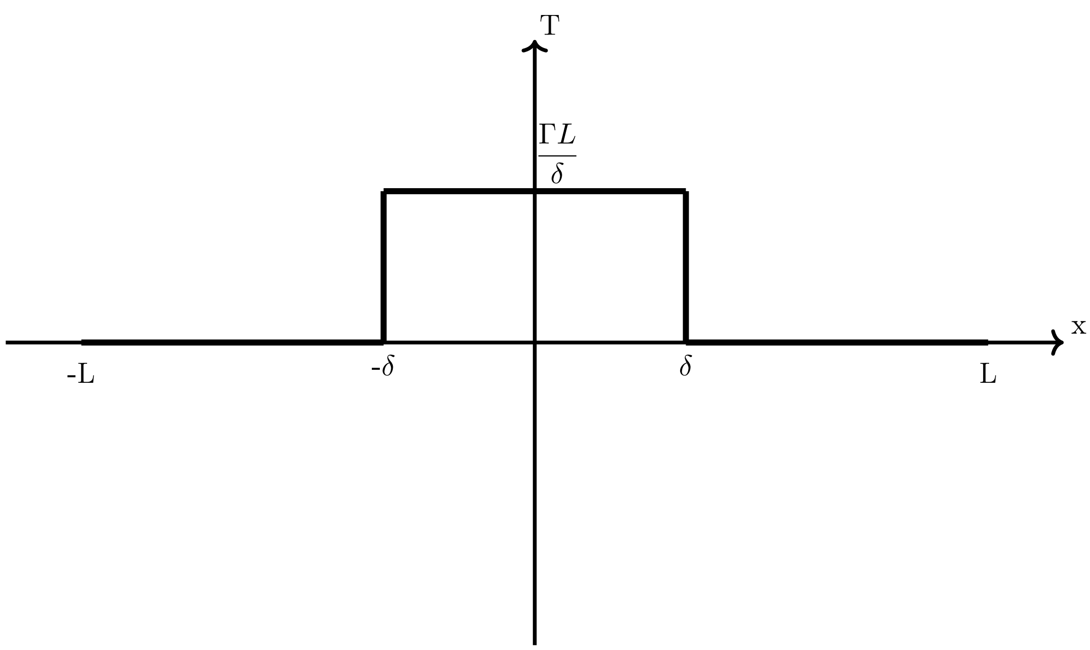
La relation entre α_n et k_n est telle que : $k_n^2 = \dfrac{\alpha_n}{D}$.
Par conséquent :

$$\alpha_n = n^2 \frac{\pi^2 D}{L^2}$$

☐ **20** — On obtient donc à $t = 0$:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$$

L'expression est celle d'une décomposition e série de Fourier d'une fonction périodique paire de période spatiale : $2L$.



La décomposition en série de Fourier de cette fonction permet d'avoir les résultats :

$$u_0 = \frac{2}{2L}\int_0^{\delta} \frac{\Gamma L}{\delta} dx = \Gamma$$

$$u_n = 2\frac{2}{2L}\int_0^{\delta} \frac{\Gamma L}{\delta} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\frac{\Gamma L}{\delta}\frac{L}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^{\delta}$$

Par conséquent :

$$u_n = \frac{2\Gamma L}{n\pi\delta}\sin\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right) = 2\Gamma\frac{\sin\left(\dfrac{n\pi\delta}{L}\right)}{\dfrac{n\pi\delta}{L}}$$

En utilisant ces résultats , on peut donc écrire, avec $\alpha_n = \dfrac{n^2\pi^2 D}{L^2}$:

$$T(x,t) = \Gamma + \sum_{n=1}^{\infty} 2\Gamma \frac{\sin\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right)}{\frac{n\pi\delta}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha_n t}$$

☐ **21** — On fait un développement de la fonction lorsque $\dfrac{\delta}{L} << 1$.

$$\frac{\sin\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right)}{\frac{n\pi\delta}{L}} \simeq 1$$

D'où :

$$T(L,t) = \Gamma + \sum_{n=1}^{\infty} 2\Gamma \cos(n\pi)\, e^{-\alpha_n t} = \Gamma \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\alpha_n t}\right]$$

☐ **22** — Cherchons la relation entre α_1 et t_1 :

$$\xi\left(t_{1/2}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\alpha_1 t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\alpha_1 t_{1/2}} = -\frac{1}{4}$$

D'après le graphe, à $\alpha_1 t = 4$, on est à 95% de la valeur finale.
On peut confondre la somme avec son premier terme.

$$e^{-\alpha_1 t_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_1 t_{\frac{1}{2}} = Ln\,(4) \simeq 1.4$$

☐ **23** — La valeur maximale de $T(L,t)$ est $7ua$.
Le temps $t_{1/2}$ est donc égal à $12ms$.
Or :

$$\alpha_1 = \frac{\pi^2 D}{L^2} = \frac{1.4}{t_{1/2}}$$

Par conséquent :

$$D = \frac{1.4L^2}{\pi^2 t_{1/2}}$$

On en déduit la conductivité thermique :

$$\lambda = \rho c D = \rho c \frac{1.4L^2}{\pi^2 t_{1/2}}$$

AN :

$$\lambda = 410 W m^{-1} K^{-1}$$

☐ **24** — On utilise les valeurs trouvées précédemment :

$$\frac{\lambda}{\gamma T} = \kappa = 23.10^{-9} SI$$

$$\kappa_{quantique} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2} = 25.10^{-9} SI$$