

## CORRIGÉS 2

### Physique en arctique [PHYSIQUE I-CCMP-MP]

#### I.- Pôles géographiques et magnétiques

##### I.A.- Boussole, champ géomagnétique et dipôle central

□ 1- L'aiguille est aimantée et possède un pôle nord qui sera attiré par le pôle sud de la terre situé au pôle nord géographique. Le dipôle s'aligne donc avec les lignes du champ magnétique terrestre. Cela correspond à un équilibre stable car l'énergie potentielle  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  est minimale.

□ 2- On applique le théorème du moment cinétique à la boussole:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B} = I \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

$$\vec{m} \wedge (\vec{B}_H + \vec{B}_V) = I \ddot{\alpha} \vec{e}_r$$

On projette suivant  $\vec{e}_r$ , sachant que  $\vec{B}_V$  est porté par ce vecteur unitaire, on obtient:

$$-mB_H \sin(\alpha) = I \ddot{\alpha}$$

D'où l'équation différentielle vérifiée par la variable  $\alpha$  tenant compte du fait que l'aiguille est légèrement écartée :

$$\ddot{\alpha} + \frac{mB_H}{I} \alpha = 0$$

La pulsation propre est donc:

$$\omega_0^2 = \frac{mB_H}{I} = \frac{4\pi^2}{\tau^2}$$

La composante horizontale est donc:

$$B_H = \frac{4\pi^2 I}{m\tau^2}$$

□ 3- Le champ géomagnétique en un point de la surface de la terre est obtenu en utilisant la formule :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2\vec{M}}{R^5}$$

avec  $\vec{M} = M_0(\sin(\lambda)\vec{e}_r - \cos(\lambda)\vec{e}_\theta)$ .

$$\frac{\mu_0}{4\pi R^5} [3R\vec{e}_r [RM_0\vec{e}_r(\sin(\lambda)\vec{e}_r - \cos(\lambda)\vec{e}_\theta) - M_0R^2(\sin(\lambda)\vec{e}_r - \cos(\lambda)\vec{e}_\theta)]]$$

On aboutit à:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R^3} (2\sin(\lambda)\vec{e}_r + \cos(\lambda)\vec{e}_\theta)$$

□ 4- A l'équateur le champ géomagnétique est dirigé vers le nord donc il est porté par  $-\vec{e}_\theta$ . En prenant  $\lambda = 0$ , l'expression du champ sera:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R^3} \vec{e}_\theta = -\frac{\mu_0 M_0}{4\pi R^3} \vec{e}_z$$

$M_0$  est donc négatif.

Au pôle nord,  $\lambda = +\frac{\pi}{2}$ , alors :

$$\vec{B}_N = \frac{\mu_0 M_0}{2\pi R^3} \vec{e}_r = \frac{\mu_0 M_0}{2\pi R^3} \vec{e}_z$$

Au pôle sud,  $\lambda = -\frac{\pi}{2}$ , alors:

$$\vec{B}_S = -\frac{\mu_0 M_0}{2\pi R^3} \vec{e}_r = -\frac{\mu_0 M_0}{2\pi R^3} \vec{e}_z$$

Dans les deux cas, le champ B a le même module:  $\frac{\mu_0 M_0}{2\pi R^3}$  et il est dirigé suivant l'axe polaire de la terre du pôle nord vers le pôle sud.

AN:

$$B_e = \frac{\mu_0 |M_0|}{4\pi R^3} \Rightarrow |M_0| = \frac{4\pi R^3 B_e}{\mu_0} = 7,9 \cdot 10^{22} \text{ A.m}^2$$

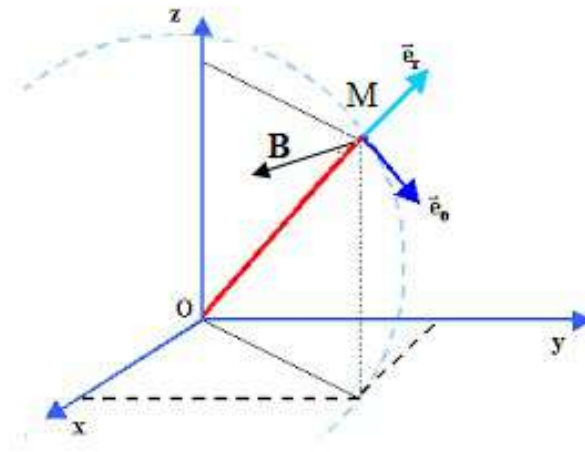
□ 5- L'hémisphère nord correspond à  $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$  par conséquent, puisque  $M_0$  est négative  $B_r < 0$  et  $B_\theta < 0$

La déviation est donc négative.

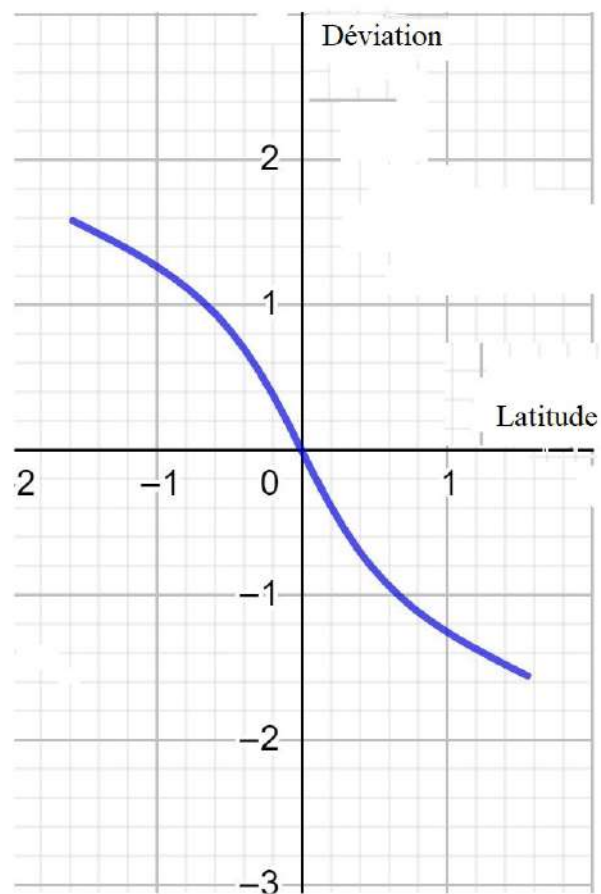
$$\tan D = -\frac{B_r}{B_\theta} = -2 \tan(\lambda)$$

L'hémisphère sud correspond à  $-\frac{\pi}{2} < \lambda < 0$  par conséquent, puisque  $M_0$  est négative  $B_r > 0$  et  $B_\theta < 0$  La déviation est donc positive. Dans les deux cas :

$$\tan D = -\frac{B_r}{B_\theta} = -2 \tan(\lambda)$$



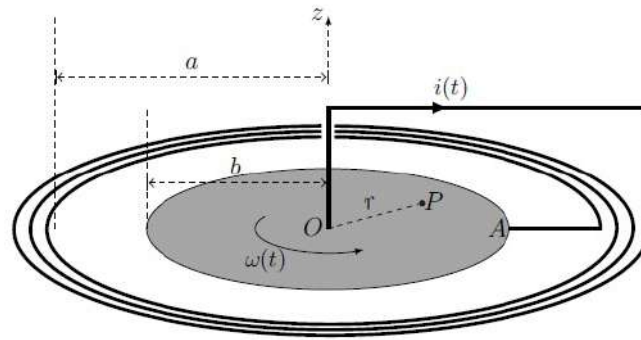
FIGURE



A proximité des pôles, la composante horizontale est nulle et c'est cette composante qui fait tourner la boussole.

#### I.B.- Modèle autodynamo et fluctuations du champ

□ 6- En utilisant le bonhomme d'Ampère, le champ créé par les  $N$  spires  $\vec{B}(P)$  est porté par  $-\vec{e}_z$



FIGURE

Le champ électromoteur dû à la rotation est :  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ .

La vitesse au point  $P$  est portée par  $\vec{e}_\theta$  et le champ magnétique est porté par  $-\vec{e}_z$ , donc le champ électromoteur est porté par  $-\vec{e}_r$ . Donc le courant  $i(t) > 0$ .

Exprimons  $M_{rmax}$ :

$$M_{rmax} = -\frac{1}{i} \int_0^{rmax} r \vec{e}_z \cdot B(P) (-\vec{e}_z) dr = \frac{1}{i} \int_0^{rmax} r B(P) dr$$

Par conséquent  $M > 0$ . De plus  $a > b$  donc  $M_a < M_b$ .

Calculons le flux propre du champ magnétique à travers le disque:

$$\Phi_p = \iint_{circuit} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint 2\pi r dr (-\vec{e}_z) B(-\vec{e}_z)$$

On a donc :

$$\Phi_p = 2\pi \int_0^a r B dr$$

On remplace et on obtient :  $\Phi_p = 2\pi M_a i$ , l'inductance propre du circuit est alors :

$$L = 2\pi M_a$$

□ 7- La force de Laplace qui s'exerce sur un élément de longueur du segment AO est :  $d\vec{F}_L = i dr (-\vec{e}_r) \wedge B(-\vec{e}_z)$ . Cette force est donc:

$$d\vec{F}_L = -i B dr \vec{e}_\theta$$

Le moment des forces de Laplace est alors:  $d\vec{\Gamma}_L = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L = r \vec{e}_r \wedge -i B dr \vec{e}_\theta$ .

L'expression de l'élément du moment est :  $d\vec{\Gamma}_L = -i B r dr \vec{e}_z$

Par intégration on détermine le moment :  $\Gamma_L = -i \int_0^b B(P) r dr$ .

Le moment des forces de Laplace est alors:

$$\Gamma_L = -M_b i^2$$

□ 8- En utilisant la conservation électromécanique, on peut écrire :  $\mathcal{P}_{elec} + \mathcal{P}_{mec} = 0$ , soit  $\Gamma_L \omega + ei = 0$ . Cela donne :

$$e = M_b \omega i$$

□ 9- L'équation mécanique est obtenue en utilisant le théorème du moment cinétique:  
 $\Gamma_0 - M_b i^2 = I \frac{d\omega}{dt}$ , donc:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Gamma_0}{I} - \frac{M_b}{I} i^2$$

L'équation électrique est obtenue en utilisant la loi des mailles :  $e = Ri + L \frac{di}{dt}$ , soit  
 $M_b \omega i = Ri + L \frac{di}{dt}$ .

Par conséquent :

$$\frac{di}{dt} = \left[ \frac{\omega M_b}{L} - \frac{R}{L} \right] i$$

Par identification :

$$\alpha = \frac{M_b}{L}, \quad \beta = \frac{R}{L}, \quad \gamma = \frac{\Gamma_0}{I}, \quad \delta = \frac{M_b}{I}$$

□ 10- Calculons  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt} + Li \frac{di}{dt} - \frac{L\Gamma_0}{M_b i} \frac{di}{dt} - \frac{IR}{M_b} \frac{d\omega}{dt}$$

En utilisant les résultats de la question 9 et on trouve :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$$

$\mathcal{H}$  est une constante du système.

Le gradient de  $\mathcal{H}$  s'annule si  $\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \right)_i = 0$ , et  $\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i} \right)_\omega = 0$ ,

cela correspond à :  $i_e^2 = \frac{\Gamma_0}{M_b} = \frac{\gamma}{\delta}$  et  $\omega_e = \frac{R}{M_b} = \frac{\beta}{\alpha}$ .

□ 11- Les positions d'équilibre correspondent à  $\omega = c\text{onstante}$  et  $i = c\text{onstante}$ .  
 Les équations de la question □ 8- peuvent s'écrire:

$$\frac{di}{dt} = \alpha i (\omega - \omega_e) \quad (1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \delta (i_e^2 - i^2) \quad (2)$$

- Si  $\omega$  augmente à partir d'une position d'équilibre alors  $\frac{di}{dt} > 0$ , le courant *croît* donc.
- A partir de la relation (2):  $\frac{d\omega}{dt} < 0$  et donc  $\omega$  *diminue*.
- Si  $\omega$  diminue à partir d'une position d'équilibre alors  $\frac{di}{dt} < 0$ , le courant *décroit* donc.

- A partir de la relation (2):  $\frac{d\omega}{dt} > 0$  et donc  $\omega$  *croît*. Cela correspond à un équilibre stable.

## II.- La glace de la banquise

### II.A.- Un traîneau sur la glace

- 12- On applique le théorème de la résultante cinétique sur un élément de la corde de direction (Ox):

$$\vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) = \mu dx \vec{a}$$

La corde est de masse négligeable par conséquent:  $\frac{\partial \vec{T}}{\partial x} = \vec{0}$ . La tension est donc constante le long de la corde.

- 13- Si le trajet se fait à l'horizontale, le théorème de la résultante cinétique appliqué au traîneau s'écrit:

$$\vec{T} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + M\vec{g} = M\vec{a}$$

- Par projection suivant la verticale, on obtient :  $R_N = Mg$ .
- Par définition du coefficient de frottement , on obtient :  $R_T = \mu_d R_N$ .
- Par projection suivant l'horizontale , on obtient :  $T - \mu_d Mg = Ma$ .
- Si le trajet se fait sur une faible pente ascendante , le théorème de la résultante cinétique appliqué au traîneau s'écrit:

$$\vec{T} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + M\vec{g} = M\vec{a}$$

- Par projection suivant la perpendiculaire à la trajectoire, on obtient :  $R_N = Mg \cos(\alpha)$ .
- Par projection suivant la trajectoire , on obtient :  $T - \mu_d Mg \cos(\alpha) - Mg \sin(\alpha) = Ma$ , qu'on réécrit sous la forme:

$$T - Mg(\mu_d \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) = Ma$$

On voit donc que tout se passe comme si le trajet est horizontale à condition de remplacer  $\mu_d$  par  $\mu_d' = \mu_d \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$ .

- 14- Pour qu'il y'ait démarrage, et sur une ligne horizontale , il faut que l'intensité de la force soit supérieure à la force de frottement: Au démarrage  $v = 0$  et donc  $F_0$  doit être supérieure à  $\mu_s Mg$ . La valeur minimale est donc

$$F_0 = \mu_s Mg$$

□ 15- On applique le théorème de la résultante cinétique sur un trajet horizontal. Par projection suivant la ligne de la trajectoire on obtient:  $F - \mu_d Mg = Ma$ . Soit:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{M}v = \frac{F_0}{M} - \mu_d g$$

En régime stationnaire,  $\frac{dv}{dt} = 0$ , par conséquent

$$v_0 = \frac{F_0}{\beta} - \mu_d \frac{Mg}{\beta}$$

La solution de l'équation différentielle donne comme résultat :

$$v(t) = A \exp\left(-\frac{\beta}{M}t\right) + v_0$$

En utilisant les conditions initiales,  $v(0) = 0$  on aura  $A = -v_0$ .

D'où la solution:

$$v(t) = v_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\beta}{M}t\right)\right)$$

A  $t = t_1$ ,  $v = 0.95v_0$ , par conséquent  $\ln\left(\frac{5}{100}\right) = -\frac{\beta}{M}t_1$ . D'où:

$$\beta = \frac{M}{t_1} \ln(20) \approx 3 \frac{M}{t_1}$$

On utilise l'expression de  $v_0$  on obtient :

$$F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg$$

AN:  $\beta = 300 \text{ kg/s}$        $F_0 = 1150 \text{ N}$ .

□ 16- on applique à nouveau le TRC sur le traineau lorsqu'il aborde le trajet circulaire.

$$\vec{T} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + M\vec{g} = M\vec{a}$$

Le mouvement est circulaire uniforme.

• Par projection suivant la tangentielle on obtient :  $T \cos(\theta) - R_T = 0$ .

• Par projection suivant la normale on obtient :  $T \sin(\theta) = M \frac{v_0^2}{R}$ .

• D'autre part:  $R_T = \mu_d Mg$ , par conséquent :

$$T = M \sqrt{\left(\mu_d^2 g^2 + \frac{v_0^4}{R^2}\right)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{v_0^2}{\mu_d g R}$$

## II.B.- Croissance hivernale de l'épaisseur de glace

□ 17- On considère la tranche de glace d'épaisseur  $dz$ , et on effectue un bilan thermique:

$$j_{th}(z, t)Sdt - j_{th}(z + dz, t)Sdt = \rho_g S dz c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} dt$$

Soit:

$$-\frac{\partial j_{th}}{\partial z} = \rho_g c_g \frac{\partial T_g}{\partial t}$$

En utilisant la loi de Fourier :  $j_{th} = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial z}$  on obtient:

$$\frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2} = \frac{\rho_g c_g}{\lambda_g} \frac{\partial T_g}{\partial t}$$

□ 18- Si  $L$  désigne une distance caractéristique des variations spatiales de la température et  $T$  une durée caractéristique de ses variations temporelles, à partir de l'équation de la chaleur, on peut écrire que :  $L^2 = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} T$  et donc :

$$\Delta t = \frac{(\Delta z)^2 \rho_g c_g}{\lambda_g}$$

On peut supposer que la température de la glace est pratiquement constante si ce temps  $\Delta t$  est très petit devant la durée caractéristique des variations de la température.

□ 19- En régime stationnaire, la température  $T_g$  varie avec  $z$  selon la relation :  $T_g = \frac{T_2 - T_0}{z_g} z + T_0$ .

La résistance thermique est définie par :  $R_{th} = \frac{T_0 - T_2}{\Phi_{th}}$ .

$\Phi_g = S j_{th} = -S \lambda_g \frac{\partial T}{\partial z}$ , d'où

$$R_g = \frac{z_g}{\lambda_g S}$$

De la même façon:

$$R_e = \frac{e}{\lambda_e S}$$

□ 20- La puissance échangée est :  $\mathcal{P} = hS(T_0 - T_s)$ . La résistance thermique est donc:

$$R_i = \frac{1}{hS}$$

□ 21- En régime quasi-permanent de croissance de la couche de glace, la puissance thermique traversant la couche de glace est la même que celle traversant la surface supérieure.



La puissance thermique traversant la couche d'eau est:  $\Phi_e = \frac{T_1 - T_0}{R_e}$ .

La puissance thermique traversant la couche de glace est égale à La somme de la puissance thermique traversant la couche d'eau et la puissance thermique créée par la formation de la glace

On écrit donc :  $\Phi_g = \frac{T_1 - T_0}{R_e} + \Phi$ .

$\Phi$  étant le flux fournie par la solidification de la glace et dont l'expression est:  $\ell_f \rho_g S \frac{dz_g}{dt}$ .

En régime quasi - permanent on écrit donc:

$$\frac{T_1 - T_0}{R_e} + \ell_f \rho_g S \frac{dz_g}{dt} = \frac{T_0 - T_s}{R_g} = \frac{T_s - T_2}{R_i}$$

Sans faire apparaitre  $T_s$ , la relation peut aussi être formulée:

$$\frac{T_1 - T_0}{R_e} + \ell_f \rho_g S \frac{dz_g}{dt} = \frac{T_0 - T_2}{R_g + R_i}$$

□ 22- Écrivons l'équation différentielle vérifiée par  $z_g$ .

$$\frac{T_1 - T_0}{\frac{e}{\lambda_e S}} + \ell_f \rho_g S \frac{dz_g}{dt} = \frac{T_0 - T_2}{\frac{z_g}{\lambda_g S} + \frac{1}{hS}}$$

En tenant compte de l'approximation proposée, il reste:

$$\ell_f \rho_g \frac{dz_g}{dt} = \frac{T_0 - T_2}{\frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}}$$

L'équation différentielle est donc:

$$\left( \frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h} \right) dz_g = \frac{T_0 - T_2}{\ell_f \rho_g} dt$$

On intègre en prenant pour  $t = 0$ , le début de la formation c'est à dire  $z_g = 0$  à  $t = 0$ .

$$\frac{1}{2\lambda_g} z_g^2 + \frac{1}{h} z_g = \frac{T_0 - T_2}{\ell_f \rho_g} t$$

Autrement :

$$\frac{1}{2\lambda_g} \left( z_g^2 + 2 \frac{\lambda_g}{h} z_g \right) = \frac{T_0 - T_2}{\ell_f \rho_g} t$$

Par identification on trouve:

$$\ell_g = 2 \frac{\lambda_g}{h}$$

l'expression précédente s'écrit donc:

$$\frac{2\lambda_g \ell_f \rho_g}{h^2 (T_0 - T_2)} (z_g^2 + \ell_g z_g) = \ell_g^2 t$$

Par identification on a donc:

$$\tau_g = \frac{2\lambda_g \ell_f \rho_g}{h^2 (T_0 - T_2)}$$

□ 23- Écrivons l'équation précédente sous la forme de ::  $z_g^2 + \ell_g z_g - l_g^2 \frac{t}{\tau} = 0$ .

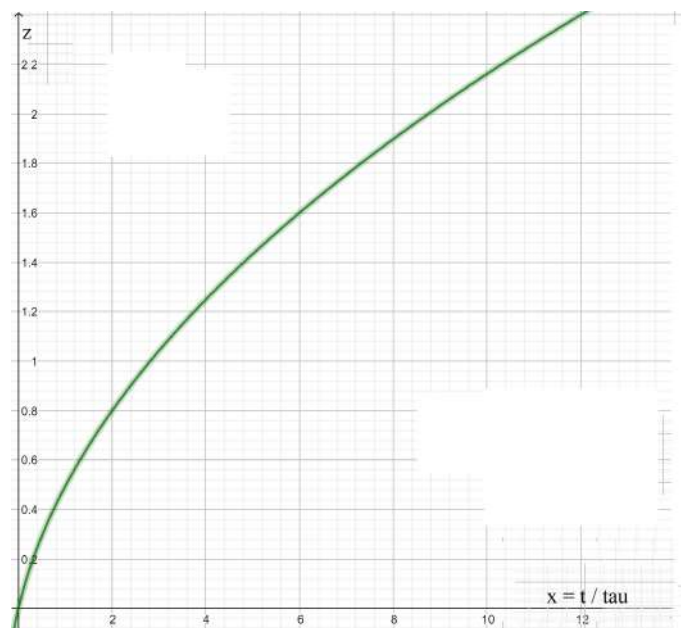
Exprimons  $z_g$  en fonction de  $x = \frac{t}{\tau}$ .

$$\Delta = \ell_g^2 + 4\ell_g^2 x.$$

La solution est donc:

$$z_g = -\frac{l_g}{2} + \frac{l_g}{2} \sqrt{1 + 4x}$$

L'allure de la courbe est:



FIGURE

On voit très bien que :

Si  $x \ll 1$  alors  $z_g$  varie avec le temps, en faisant un DL au voisinage de zéro selon la relation:

$$z_g = l_g x = l_g \frac{t}{\tau}$$

si  $x \gg 1$ , alors l'évolution de  $z_g$  avec le temps suit la loi:

$$z_g = -\frac{l_g}{2} + l_g \sqrt{\frac{t}{\tau}}$$