

# Interaction laser plasma à haut éclairement

Filière MP

Mohamed Afekir (cpgeafek@gmail.com)

Mes remerciements à Mr :

Thami Elhalkouj : Lydex Ben Guerir  
pour la lecture du corrigé

## I. – Génération d’harmoniques dans les gaz

### I.A – Champ laser et champ coulombien

- 1– La force électrique coulombienne subie par l’électron :

$$\vec{F}_c = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

$\vec{F}_c$  est colinéaire à  $\vec{r}$  ⇒ force centrale !

$$\vec{F}_c = -\vec{\text{grad}}W_p = -\frac{dW_p(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \frac{dW_p(r)}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow W_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} ; \quad \left(\lim_{r \rightarrow \infty} W_p(r) = 0\right)$$

- 2– L’énergie mécanique :

$$W_m = W_c + W_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l’électron ; avec  $\vec{v} = v\hat{u}_\theta$  :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \left( \frac{dv}{dt} \hat{u}_\theta - \frac{v^2}{r} \hat{u}_r \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

$$\Rightarrow m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow W_c = -\frac{W_p}{2}$$

Soit :

$$W_m = \frac{W_p}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$mvr = n\hbar \Rightarrow \frac{n^2 \hbar^2}{mr^3} = \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} n^2 = a_0 n^2 \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = \frac{\epsilon_0 h}{\pi m e^2}$$

Lorsque l’électron est dans son état fondamental :  $n = 1$  et  $r_1 = a_0 \simeq 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

$$-W_o = \frac{W_p}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \simeq 13,4 \text{ eV}$$

- 3– On donne  $a_0 = \frac{1}{2} 10^{-10} \text{ m}$

$$\vec{F}_c = -e\vec{E}_c \Rightarrow E_c = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \simeq 5,7 \cdot 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$$

La puissance  $P$  de l'impulsion laser :

$$P = \frac{W_T}{T} = \begin{cases} P_{\text{gaz}} = \frac{10^{-3}}{50 \cdot 10^{-15}} = 20,0 \text{ GW} & \text{sur une cible gazeuse} \\ P_{\text{solide}} = \frac{1}{30 \cdot 10^{-15}} = 33,3 \cdot 10^3 \text{ GW} & \text{sur une cible solide} \end{cases}$$

L'amplitude du champ électrique laser :

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{\pi R^2} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E^2 \Rightarrow E(z) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2P}{c \epsilon_0 \pi}} = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{2P}{c \epsilon_0 \pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}} \quad (\text{Au voisinage du foyer } O)$$

Soient :

$$E_\ell = E(z = -f') = \sqrt{\frac{2P}{c \epsilon_0 \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}} = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{2P}{c \epsilon_0 \pi}} \quad \text{et} \quad E_f = E(z = 0) = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{2P}{c \epsilon_0 \pi}}$$

Application numérique : on a  $\tan \alpha = \frac{D}{2f'} = \frac{\lambda_0}{\pi R_0}$  et  $P = P_{\text{gaz}} = 20 \text{ GW}$  ;

$$\Rightarrow E_f = \frac{\pi D}{2f' \lambda_0} \sqrt{\frac{2P_{\text{gaz}}}{c \epsilon_0 \pi}} \simeq 5,1 \cdot 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$$

$$\frac{E_c}{E_f} \simeq 1,1 \Rightarrow E_c \simeq E_f !$$

La focalisation du faisceau laser a, donc, permet l'ionisation de la matière.

### I.B – Un mécanisme en trois étapes

□ 4– Sous l'action de  $\vec{E}(z, t)$ , l'électron se déplace suivant  $x$ ; le mouvement suivant  $x$  est, donc, négligeable !

À l'échelle atomique,  $z$  est de l'ordre de  $1 \text{ \AA}$  :

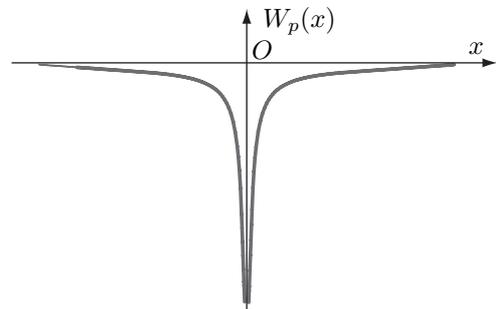
$$k_0 z = \frac{2\pi}{\lambda_0} z \simeq 7,85 \cdot 10^{-4} \ll 1 \Rightarrow \vec{E}(z, t) \simeq E_f \cos(\omega_0 t) \hat{u}_x$$

□ 5– Énergie potentielle d'interaction :

$$W_p(x) = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 |x|} + C$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} W_p(x) = 0 = C$$

Elle correspond bien à l'allure donnée sur la figure II.a



□ 6–

○ Force de Lorentz :

$$\vec{f}_{\text{lor}} = -e \left( \vec{E}(z, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(z, t) \right)$$

○ Relation de structure :

$$\vec{B}(z, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(z, t)}{\omega}$$

○ La force de Lorentz  $\vec{f}_{\text{lor}}$  est conservative si la contribution magnétique est négligeable !

- L'énergie potentielle  $W_{p,las}(x, t)$  :

$$\delta W(\vec{f}_{lor}) = \vec{f}_{lor} \cdot d\vec{r} = -e\vec{E}(z, t) \cdot \hat{u}_x dx = -eE_f dx \cos(\omega_o t) = -dW_{p,las}(x, t)$$

Soit :

$$W_{p,las}(x, t) = exE_f \cos(\omega_o t) \quad (\text{on prend l'origine de l'énergie potentielle en } x = 0)$$

- L'énergie potentielle totale :

$$W_{p,tot}(x, t) = exE_f \cos(\omega_o t) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o|x|}$$

D'après la figure **II.b**, le champ électrique est suivant le sens des  $x$  décroissant !

□ **7-** Dans la figure **II.b**, la courbe en pointillés correspond à  $W_{p,las}(x, t)$  qui est une droite de pente négative : le terme  $eE_f \cos(\omega_o t)$  est, alors, négatif ! L'énergie potentielle totale est :

$$W_{p,tot}(x, t_o) = -exE_f - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o|x|} \quad \text{tel que} \quad \cos(\omega_o t_o) = -1 \quad \text{ou} \quad t_o = \frac{\pi}{\omega_o}$$

L'autre instant possible est celui où le champ électrique laser change de sens. L'énergie potentielle totale est :

$$W_{p,tot}(x, t_1) = +exE_f - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o|x|} \quad \text{tel que} \quad \cos(\omega_o t_1) = +1 \quad \text{ou} \quad t_1 = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

- À l'instant  $t_o = \frac{\pi}{\omega_o} = \frac{T_o}{2}$ , l'électron, accéléré par le champ laser, s'éloigne du noyau !
- À l'instant  $t_1 = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2t_o = T_o$ , l'électron, décéléré par le champ laser, se rapproche du noyau !

La position  $\tilde{x}_o$  correspondant au maximum de  $W_{p,tot}(x, t)$  :

- À l'instant  $t_o$  où ( $\tilde{x}_o > 0$ ) :

$$W_{p,tot}(x) = -exE_f - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o|x|}$$

$$\left(\frac{dW_{p,tot}(x)}{dx}\right)_{x=\tilde{x}_o} = 0 \Leftrightarrow \tilde{x}_o^2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_o E_f}, \quad \text{ou} \quad \tilde{x}_o = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_o E_f}}$$

- Condition d'ionisation :  $W_{p,tot}(\tilde{x}_o) = -W_o$  et  $E_f = E_{f,i}$

$$-W_o = W_{p,tot}(\tilde{x}_o) = -eE_f \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_o E_{f,i}}} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_o E_{f,i}}{e}} = -2\sqrt{\frac{E_{f,i} e^3}{4\pi\epsilon_o}}$$

$$\Leftrightarrow E_{f,i} = \frac{\pi\epsilon_o W_o^2}{e^3} \simeq 3, 2 \cdot 10^{10} \text{ Vm}^{-1}$$

La valeur trouvée n'est pas loin de celle de  $E_c$  : possibilité d'ionisation de la matière pour  $E_f = E_{f,i}$ .

- **8-** La RFD appliquée à l'électron dans les hypothèses d'étude :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -eE_f \cos(\omega_o t) \hat{u}_x \Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{-eE_f}{m} \cos(\omega_o t)$$

Solutions :

$$\dot{x}(t) = \frac{-eE_f}{m\omega_o} \sin(\omega_o t) + K_1 \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{eE_f}{m\omega_o^2} \cos(\omega_o t) + K_1 t + K_2$$

Conditions initiales :  $\dot{x}(t = t_i) \simeq 0$  et  $x(t = t_i) \simeq x_o \simeq 0$ . Soient :

$$\dot{x}(t) = \frac{-eE_f}{m\omega_o} [\sin(\omega_o t) - \sin(\omega_o t_i)] \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{eE_f}{m\omega_o^2} [\cos(\omega_o t) - \cos(\omega_o t_i)] + \frac{eE_f}{m\omega_o} (t - t_i) \sin(\omega_o t_i)$$

□ 9-

- L'énergie cinétique  $W_c$  lors de la recombinaison :

$$W_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{e^2 E_f^2}{2m\omega_o^2} [\sin^2(\omega_o t) - 2 \sin(\omega_o t) \sin(\omega_o t_i) + \sin^2(\omega_o t_i)]$$

- Valeur moyenne :

$$\langle W_c \rangle = \frac{e^2 E_f^2}{2m\omega_o^2} \left[ \frac{1}{2} + \sin^2(\omega_o t_i) \right]$$

Aux instants privilégiés  $t_o$  et  $t_1$ ,  $\sin^2(\omega_o t_i) = 0$  :

$$\Rightarrow \langle W_c \rangle = \frac{e^2 E_f^2}{4m\omega_o^2}$$

- Durée de l'impulsion :

$$W_{c,\max} + W_o = h\nu \simeq \frac{h}{\delta T} \Rightarrow \delta T \simeq \frac{h}{W_{c,\max} + W_o} = \frac{h}{3,2 \langle W_c \rangle + W_o} = 0,022 \text{ fs}$$

□ 10- Le signal étant périodique, il pourra être décomposé en somme de signaux trigonométriques ! (Fourier).

$$s_+(x, t) = s_+(0, t-x/c) = S_o \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \quad \text{et} \quad s_-(x, t) = -s_-(0, t-x/c) = -S_o \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x - \frac{\omega_o T_o}{2}\right)$$

$$s(x, t) = s_+(x, t) + s_-(x, t) = -2S_o \sin\left(\frac{\omega T_o}{4}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x - \frac{\omega T_o}{4}\right)$$

Le signal est d'amplitude maximale pour :

$$\sin\left(\frac{\omega T_o}{4}\right) = +1 \Leftrightarrow \frac{\omega T_o}{4} = \frac{\pi\omega}{2\omega_o} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = (2n+1)\omega_o \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Le spectre du train d'impulsions est un spectre de raies.

## II. – Génération d'harmoniques sur un miroir plasma

### II.A Pulsation propre

□ 11-

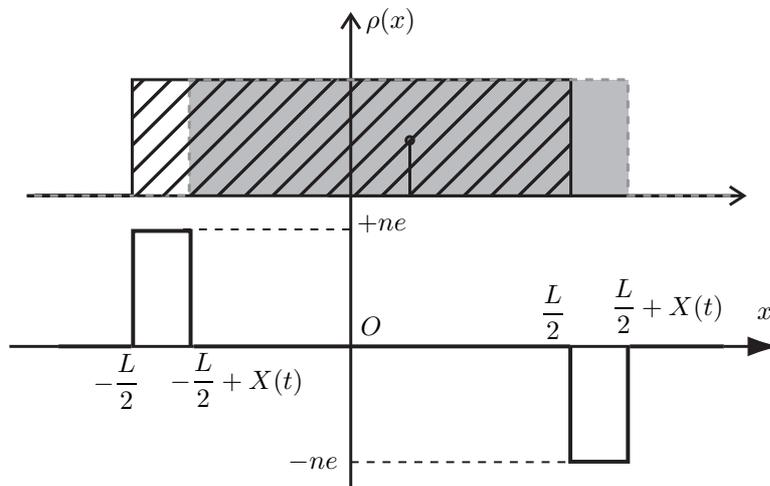
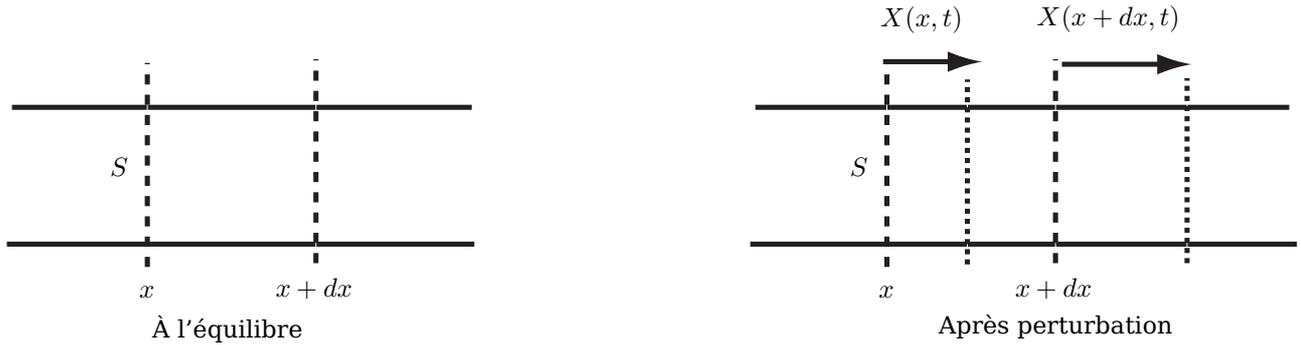


Figure 1 Profil de la densité de charge  $\rho(x)$

- Densité de charges  $\rho(x)$  :

Considérons une tranche élémentaire  $dx$  du plasma, délimitée par une section  $S$ , de volume  $V_o = Sdx$ .



Après perturbation, le volume de la tranche est :

$$V = S[(X(x + dx, t) + x + dx) - (X(x, t) + x)] = V_o \left(1 + \frac{\partial X}{\partial x}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial X}{\partial x} \ll 1$$

La densité de charge est :

$$\rho(x) = n_+(+e) + n_-(-e) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_-(-e)V = n(-e)V_o & \text{conservation de la charge électrique} \\ n_+ = n & \text{plasma neutre initialement} \end{cases}$$

Soit :

$$n_- = n \frac{V_o}{V} \simeq n \left(1 - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$\text{D'où : } \rho(x) = n(+e) + n(-e) \left(1 - \frac{\partial X}{\partial x}\right) = ne \frac{\partial X}{\partial x}$$

○ Champ électrique :  $\vec{E} = E(x, t)\hat{u}_x$

$$\text{L'équation de Maxwell : } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_o} \Rightarrow \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{ne}{\epsilon_o} \frac{\partial X}{\partial x} \quad \text{ou} \quad E(x, t) = \frac{ne}{\epsilon_o} X(x, t) + K(t)$$

Conditions initiales :  $X(0) = X_o$  et  $E(x, 0) = 0 \Rightarrow K(t) = -X_o$

$$\Rightarrow E(x, t) = \frac{ne}{\epsilon_o} (X(x, t) - X_o)$$

○ Équation du mouvement et pulsation propre : La RFD appliquée à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} + \frac{ne^2}{m\epsilon_o} (X(x, t) - X_o) = 0$$

Le mouvement est oscillatoire à la pulsation

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_o}}$$

la propagation n'est possible dans le plasma si  $k$  est complexe ou  $k^2 < 0$  :

## II.B Propagation dans un plasma homogène

□ 12- Équations de Maxwell :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_o \vec{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La conductivité complexe  $\underline{\gamma}$  du milieu :

$$\underline{j} = \rho_m \underline{v} = -ne \underline{v} \quad \text{avec} \quad m \frac{d\underline{v}}{dt} = -e \underline{E}$$

on pose  $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  :

$$\Rightarrow \quad i m \omega \vec{v} = -e \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{j} = \underbrace{-i \frac{n e^2}{m \omega}}_{\gamma} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = -i \frac{n e^2}{m \omega}}$$

Plasma localement neutre et de conductivité complexe  $\gamma$ , les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= 0 & \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

De l'identité vectorielle  $\text{rot} [\text{rot} \vec{E}] = -\Delta \vec{E} + \text{grad}[\text{div} \vec{E}]$ , on en déduit l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Relation de dispersion : on remplace  $\vec{E}$  dans l'équation

$$-k^2 = \mu_0 \left( -i \frac{n e^2}{m \omega} \right) (i \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{n e^2}{m \varepsilon_0} + k^2 c^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2}$$

La propagation n'est possible dans le plasma tant que  $k$  est imaginaire ou  $k^2 < 0$  :

$$\Rightarrow \quad \omega < \omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{m \varepsilon_0}} \quad \text{ou} \quad \boxed{n > n_c = \frac{m \varepsilon_0 \omega^2}{e^2}}$$

L'onde devient évanescente !!

□ 13- pour  $n = n_c$  :

$$n_c = n_{\max} \exp(x_c/L) \quad \Rightarrow \quad x_c = L \times \text{Ln} \left( \frac{n_c}{n_{\max}} \right) = L \times \text{Ln} \left( \frac{m \varepsilon_0 \omega^2}{n_{\max} e^2} \right)$$

□ 14- Dans le demi-espace  $x < 0$ , le champ électrique est la superposition d'un champ incident  $\vec{E}_i$  et d'un champ réfléchi  $\vec{E}_r$  :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{oi} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = \vec{E}_{or} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{k}_i = k_{ix} \hat{u}_x + k_{iy} \hat{u}_y \\ \vec{k}_r = k_{rx} \hat{u}_x + k_{ry} \hat{u}_y \end{cases}$$

Dans le demi-espace  $x > 0$ , le champ électrique est nul. La continuité de la composante tangentielle du champ électrique au voisinage de l'interface ( $x = 0$ ) se traduit par :

$$(\vec{E} \cdot \hat{u}_y)(x = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{oiy} e^{i(\omega t - y k_{iy})} + E_{ory} e^{i(\omega t - y k_{ry})} = 0$$

l'égalité est vraie si les deux phases sont en accord, soit :  $k_{iy} = k_{ry}$ , on a, donc, invariance de la composante  $k_y$  qui est égale à  $k \sin \beta$ .

Cette invariance permet d'écrire :  $k_y = k_{vide} \sin \beta = \frac{\omega}{c} \sin \beta$  :

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2(k_x^2 + k_y^2) = \omega_p^2 + c^2 k_x^2 + k_{vide}^2 c^2 \sin^2 \beta \quad \text{ou} \quad \omega^2 \cos^2 \beta = \omega_p^2 + k_x^2 c^2$$

La nouvelle densité critique  $n_r$  est telle que  $\omega \cos \beta < \omega_p$  ou  $n_e > n_r = \frac{m \varepsilon_0 \omega^2}{e^2} \cos^2 \beta$ .

Pour  $n_e = n_r$  :

$$\begin{aligned} n_r &= n_{\max} \exp(x_r/L) \quad \text{et} \quad n_r = n_c \cos^2 \beta \\ \Rightarrow \quad &\boxed{x_r = x_c + 2 \text{Ln} \cos \beta} \end{aligned}$$

### II.C Excitation d'ondes plasma à la surface

□ 15- Expression de  $t_o(x)$  :  $\vec{v} = v\hat{u}_x$

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x(t) = vt - 3L \quad (x(t=0) = -3L)$$

$$t_o(x) = \frac{x + 3L}{v}$$

Expression de la phase :

$$\begin{aligned} \text{on a : } X(x, t) &= X_o \cos \phi(x, t) \quad \text{et} \quad \ddot{X}(x, t) + \omega_p^2(x)(X(x, t) - X_o) = 0 \\ &\Rightarrow -\ddot{\phi}(x, t) \sin \phi(x, t) - \omega_p^2(x) = 0 \quad \text{et} \quad \phi^2(x, t) = \omega_p^2(x) \\ &\Rightarrow \phi(x, t) = \omega_p(x)t + K \quad \text{et} \quad \phi(x, t_o(x)) = 0 \Rightarrow K = -\omega_p(x)t_o(x) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\phi(x, t) = \omega_p(x)[t - t_o(x)]$$

D'autre part :

$$\omega_p^2(x) = \frac{n_e(x)\epsilon^2}{m\epsilon_o} = \underbrace{\frac{n_{\max}\epsilon^2}{m\epsilon_o}}_{\omega_{\max}^2} \exp(x/L) \Rightarrow \omega_p(x) = \omega_{\max} \exp(x/2L)$$

Soit :

$$\phi(x, t) = \omega_{\max}[t - t_o(x)]e^{x/2L} = \omega_{\max} \left[ t - \frac{x + 3L}{v} \right] e^{x/2L}$$

□ 16-

$$\begin{aligned} \vec{k}_p &= -\vec{\text{grad}}\phi(x, t) = -\left(\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x}\right)\hat{u}_x \Rightarrow \vec{k}_p \cdot \hat{u}_x = -\left(\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x} &= \frac{\omega_{\max}}{2L} e^{x/2L} \left[ t - \frac{x + 3L}{v} - \frac{2L}{v} \right] = \frac{\omega_{\max}}{2L} e^{x/2L} \left[ t - \frac{x + 5L}{v} \right] \neq 0 \quad \text{pour } t = t_o(x) \end{aligned}$$

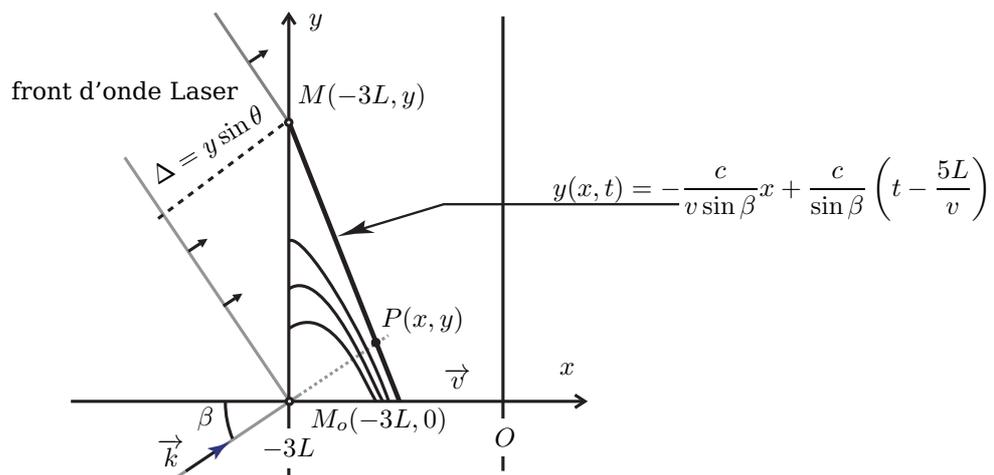
Voyons voir s'il existe un instant  $t_e$  tel que  $\left(\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x}\right)_{t_e}$  est nul...

$$\left(\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x}\right)_{t_e} = 0 \Leftrightarrow t_e = \frac{x + 5L}{v} > 0 \quad \text{donc il existe.}$$

Plus précisément :  $t_e = t_o + \frac{2L}{v} > 0 \Rightarrow t_e > t_o$ . D'où possibilité d'émission de rayonnement par les oscillations plasma !

Si l'excitation parvient d'un paquet d'électrons qui se déplace dans le sens contraire :  $v$  sera négative, il n'y aura, donc, pas de possibilité d'émission de rayonnement par les oscillations plasma.

□ 17-



- Le décalage temporel  $\Delta t$  entre les arrivées des fronts d'onde laser aux points  $M_o$  et  $M$  est tel que :

$$\begin{aligned} \omega \Delta t &= \vec{k} \cdot \overrightarrow{M_o M} \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c} (\cos \beta \hat{x} + \sin \beta \hat{y}) \\ &= ky \sin \beta \\ &= \frac{\omega}{c} y \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{y \sin \beta}{c} = \frac{\Delta}{c} \end{aligned}$$

- Le temps du passage du paquet d'électron en  $P(x, y)$  (dans la zone hétérogène de surface) :

$$t_o(x, y) = \Delta t + \frac{x + 3L}{v} = \frac{y \sin \beta}{c} + \frac{x + 3L}{v}$$

- Expression de  $\phi(x, y, t)$  :

$$\phi(x, y, t) = \omega(x) [t - t_o(x, y)] = \omega_{\max} e^{x/2L} \left[ t - \frac{y \sin \beta}{c} - \frac{x + 3L}{v} \right]$$

$$\vec{k}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi(x, y, t) = -\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} \hat{u}_x - \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial y} \hat{u}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_p \cdot \hat{u}_x = -\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\omega_{\max}}{2L} e^{x/2L} \left[ t - \frac{y \sin \beta}{c} - \frac{x + 3L}{v} \right] + \omega_{\max} e^{x/2L} \left[ -\frac{1}{v} \right] = \frac{\omega_{\max}}{2L} e^{x/2L} \left[ t - \frac{y \sin \beta}{c} - \frac{x + 5L}{v} \right]$$

- Points d'émission :

$$\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t - \frac{y \sin \beta}{c} - \frac{x + 5L}{v} = 0$$

$$\text{ou} \quad y(x, t) = -\frac{c}{v \sin \beta} x + \frac{c}{\sin \beta} \left( t - \frac{5L}{v} \right)$$

Pour  $\beta$  et  $v$  donnés, les points d'émission sont, alors, localisés sur la droite d'équation  $y = -Ax + f(t)$  de pente négative et d'ordonnée à l'origine négative : ce qui est conforme au réseau représenté dans la zone hétérogène de surface.

La différence de phase entre deux points de la droite est stationnaire : on parle, alors, de l'Emission Cohérente de Sillage (ECS).

La connaissance du spectre permet d'avoir accès à  $L$  et, donc, à l'épaisseur de la zone hétérogène.

### III. Interaction d'une impulsion avec une feuille mince

□ 18-

- L'énergie cinétique moyenne d'un électron du plasma est estimée à  $\frac{3}{2} k_B \theta_e = \frac{1}{2} m (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle)$  : isotropie de la direction des vitesses et chaque direction est équiprobable.
- Si la température  $\theta_e$  est assez élevée, l'énergie de l'électron est purement cinétique. Les interactions entre les électrons sont faibles (*distance moyenne grande devant la portée des forces inter-électroniques*).
- On pourra, donc, modéliser le plasma comme un gaz parfait.

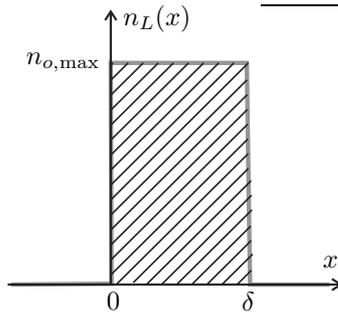
On assimile l'expansion du plasma (*hétérogène*) dans le vide à une détente d'un gaz parfait dans le vide. Si on suppose que le plasma n'échange ni de l'énergie thermique ni du travail avec l'extérieur alors cette expansion est assimilable à une détente de Joule-Gay Lussac qui est une détente isoénergétique : c'est à dire que l'énergie interne  $U_{\text{plasma}}$  est constante.

$$\text{Or :} \quad U_{\text{plasma}} = \sum_i \langle \epsilon_i \rangle = \frac{3}{2} \times \underbrace{N_e}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{d'électrons} \\ \text{du plasma}}} \times k_B \theta_e = \underline{\text{constante}} \quad \Rightarrow \quad \theta_e = \underline{\text{constante}}$$

□ 19- Profil de  $n_L(x)$

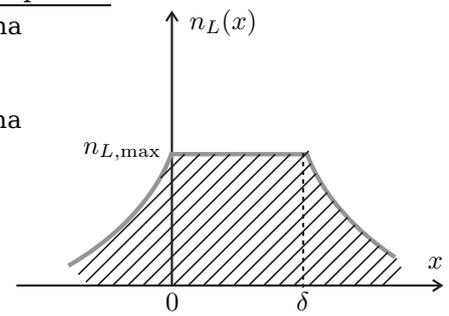
Conservation du nombre de particules du plasma :

Le nombre d'électrons du plasma  
avant expansion  
||  
au nombre d'électrons du plasma  
après expansion  
||  
 $N_e$



Avant expansion

$$n_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ n_{o,\max} & \text{pour } 0 < x < \delta \\ 0 & \text{pour } \delta < x \end{cases}$$



Après expansion

$$n_L(x) = \begin{cases} n_{L,\max}e^{x/L} & \text{pour } x < 0 \\ n_{L,\max} & \text{pour } 0 < x < \delta \\ n_{L,\max}e^{-(x-\delta)/L} & \text{pour } \delta < x \end{cases}$$

Pour une section  $\Sigma$  du plasma, le nombre d'électrons :

- Avant expansion :

$$N_{e,\text{avant}} = \int_0^\delta n_L(x)\Sigma dx = n_{o,\max}\Sigma\delta$$

- Après expansion :

$$\begin{aligned} N_{e,\text{après}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} n_L(x)\Sigma dx \\ &= \Sigma \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^0 n_{L,\max}e^{x/L} dx}_{Ln_{L,\max}} + \underbrace{\int_0^\delta n_{L,\max} dx}_{n_{L,\max}\delta} + \underbrace{\int_\delta^{+\infty} n_{L,\max}e^{-(x-\delta)/L} dx}_{Ln_{L,\max}} \right] \\ &= n_{L,\max}(2L + \delta)\Sigma \end{aligned}$$

Soit :

$$N_e = n_{o,\max}\Sigma\delta = n_{L,\max}(2L + \delta)\Sigma \Rightarrow \boxed{n_{L,\max} = \frac{n_{o,\max}\delta}{2L + \delta}}$$

De même, avec  $\omega_p \propto \sqrt{n}$ , on a :

$$\boxed{\omega_{L,\max} = \omega_{o,\max} \sqrt{\frac{\delta}{2L + \delta}}}$$

□ 20-

$$L = c_s T = T \sqrt{\frac{Zk_B\theta_e}{m_i}} \Rightarrow \theta_e = \frac{m_i L^2}{T^2 Z k_B} = \frac{m_i L^2}{6T^2 k_B}$$

$$L = \frac{\delta}{2} \left[ \left( \frac{\omega_{o,\max}}{\omega_{L,\max}} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\delta}{2} \left[ 349,69 \left( \frac{\omega_o}{\omega_{L,\max}} \right)^2 - 1 \right] \Rightarrow \theta_e = \frac{m_i \delta^2}{24T^2 k_B} \left[ 349,69 \left( \frac{\omega_o}{\omega_{L,\max}} \right)^2 - 1 \right]^2$$

$\theta_e$  étant supposée indépendante de  $\delta$ , on pourra choisir une valeur quelconque de cette épaisseur.

Pour  $\begin{cases} \delta = 50 \text{ nm} \\ \omega_{L,\max} = 17,5 \omega_o \end{cases}$  on trouve  $\boxed{\theta_e \simeq 3,3 \cdot 10^6 \text{ K}}$

□ 21- En utilisant les résultats des questions □ 18- et □ 19-, on peut écrire :

$$\frac{3}{2} N_e k_B \theta_e = \frac{3}{2} k_B n_{o,\max} \delta \theta_e = \text{constante} \Rightarrow \delta \times \theta_e = \text{constante}$$

La température électronique du plasma  $\theta_e$  est, donc, inversement proportionnelle à l'épaisseur  $\delta$ .

Comme  $\theta_e = \frac{m_i L^2}{T^2 Z k_B} = \frac{m_i L^2}{6T^2 k_B}$  (Cf. □ 20-) :  $L^2$  est, alors, inversement proportionnelle à l'épaisseur  $\delta$ .

$$L^2 \times \delta = \text{constante} = L_o^2 \times \delta_o \quad \Rightarrow \quad L = L_o \sqrt{\frac{\delta_o}{\delta}}$$

Soit (Cf. □ 19-) :

$$\omega_{L,\max} = \omega_{o,\max} \sqrt{\frac{\delta}{2L + \delta}} = \omega_{o,\max} \sqrt{\frac{\delta}{2L_o \sqrt{\frac{\delta_o}{\delta}} + \delta}}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\left( \frac{\omega_{L,\max}}{\omega_o} \right) \simeq 18,7 \sqrt{\frac{\delta}{2L_o \sqrt{\frac{\delta_o}{\delta}} + \delta}}$$

On constate que lorsque  $\delta$  augmente,  $\left( \frac{\omega_{L,\max}}{\omega_o} \right)$  augmente : résultat en accord avec le spectre de la figure **IV.b**.