

# Aspect de la propulsion spatiale

## Proposition de corrigé

### I Généralités

#### I.A - Le Lancement

On retrouve dans cette question le « classique » modèle de la fusée, les exégètes des nouveaux programmes retrouveront sans aucun doute dans cette série de questions la quintessence de l'esprit de renouveau véhiculé par cette réforme. Les adeptes du classicisme retrouveront les composantes de l'illustration de cours usuelle.

Ceux qui doutent du caractère novateur peuvent consulter Centrale PC 2014.

- 1) On raisonne sur le système fermé constitué de la fusée à l'instant  $t$  et de la fusée et de ses gaz éjectés à l'instant  $t+dt$ .

Pour la fusée, l'impulsion à  $t$  vaut  $\vec{p}_f(t) = (m \vec{v})(t)$ , à  $t + dt$  elle vaut  $\vec{p}_f(t + dt) = (m \vec{v})(t + dt)$ .

L'impulsion des gaz éjectés vaut  $\vec{p}_g(t + dt) = D dt (\vec{v} + \vec{u})$ .

On remarquera que  $m(t + dt) = m(t) - D_m dt$

- 2) Pour l'ensemble fusée+ gaz, l'impulsion au temps  $t$  vaut :  $\vec{p}(t) = \vec{p}_f(t) = (m \vec{v})(t)$ ,

au temps  $t + dt$ , l'impulsion totale vaut  $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_f(t + dt) + \vec{p}_g(t + dt)$

$$\vec{p}(t + dt) = (m \vec{v})(t + dt) + D_m dt (\vec{v} - u \vec{e}_z)$$

Les quantités complémentaires ne sont autres que les impulsions des gaz éjectés.

La différence nous donne :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = (m \vec{v})(t + dt) + D_m dt (\vec{v} - u \vec{e}_z) - (m \vec{v})(t)$$

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t + dt) - (m \vec{v})(t) - dt D u \vec{e}_z$$

car le terme en  $dM \vec{v}$  vaut  $-dt D \vec{v}$

Soit 
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - D_m u \vec{e}_z$$

Or sur ce système, la seule force appliquée est le poids :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -mg \vec{e}_z$$

On remplace pour obtenir :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = D_m u \vec{e}_z - mg \vec{e}_z$$

Soit en projetant sur l'axe 
$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg$$

- 3) De la force de poussée.

Dans l'expression précédente, il est aisé de prêter au débit d'impulsion le rôle désiré.

La force de poussée est égale à  $F_p = D_m u$ .

La fusée décollera si  $D_m u > mg$ .

- 4) L'impulsion spécifique (*specific impulse*) est le ratio de la force de poussée (débit d'impulsion) par le débit de poids du carburant au niveau du sol.

Soit : 
$$I_s = \frac{D_m u}{D_m g} = \frac{u}{g}$$

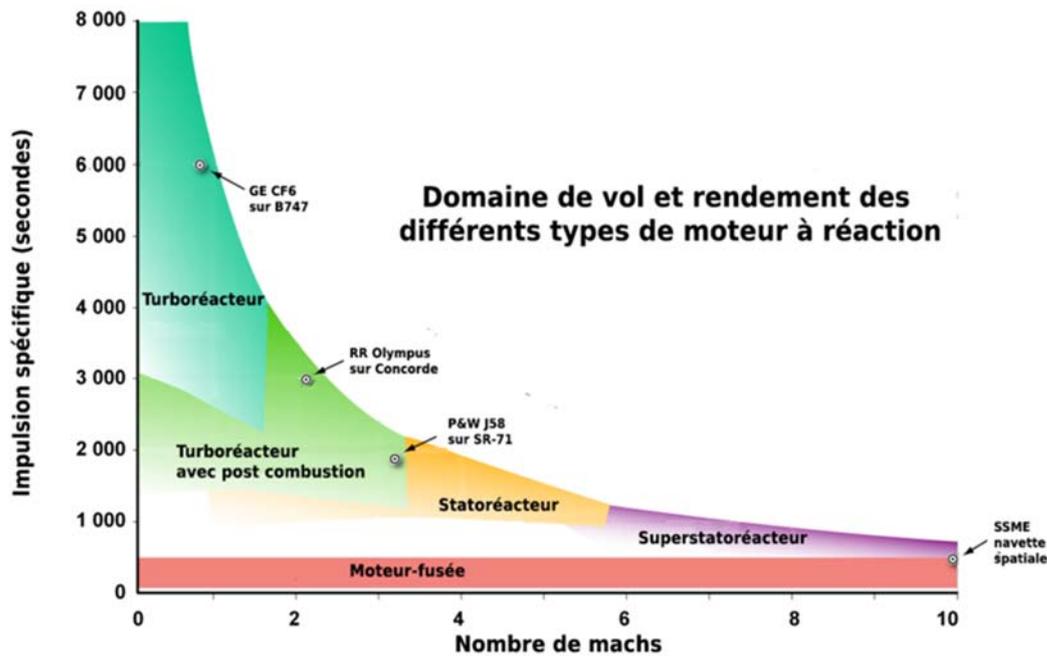
La notion est critiquable pour des engins spatiaux car intrinsèquement liée aux paramètres du champ gravitationnel terrestre, mais elle est communément exploitée et met en perspective la performance de ces engins par rapport aux réacteurs d'avions.

Exploitions la définition du sujet, le temps de fonctionnement du moteur vaut à poussée constante  $\tau = \frac{m}{D_m}$ , la poussée est égale au poids de  $m$  donc  $D_m u = mg$ , donc :

$$I_s = \tau = \frac{m}{D_m} = \frac{mu}{mg} = \frac{u}{g}$$

L'impulsion spécifique a la dimension d'un temps. Plus celui-ci est bref, plus la vitesse des gaz éjectés est faible. A débit massique égal un moteur sera d'autant plus performant que son impulsion spécifique est élevée.

Wikipédia nous donne le panel des Isp usuels :



<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Specific-impulse-kk-20090105-fr.png?uselang=fr>

5) De la cinématique de la fusée.

Nous avons :

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg$$

et

$$m = m_0 - D_m t.$$

donc

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u}{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-1} - g \quad \text{avec } \tau = \frac{m_0}{D_m}$$

Vu les hypothèses simplificatrices (champ de pesanteur uniforme, débit massique constant), on

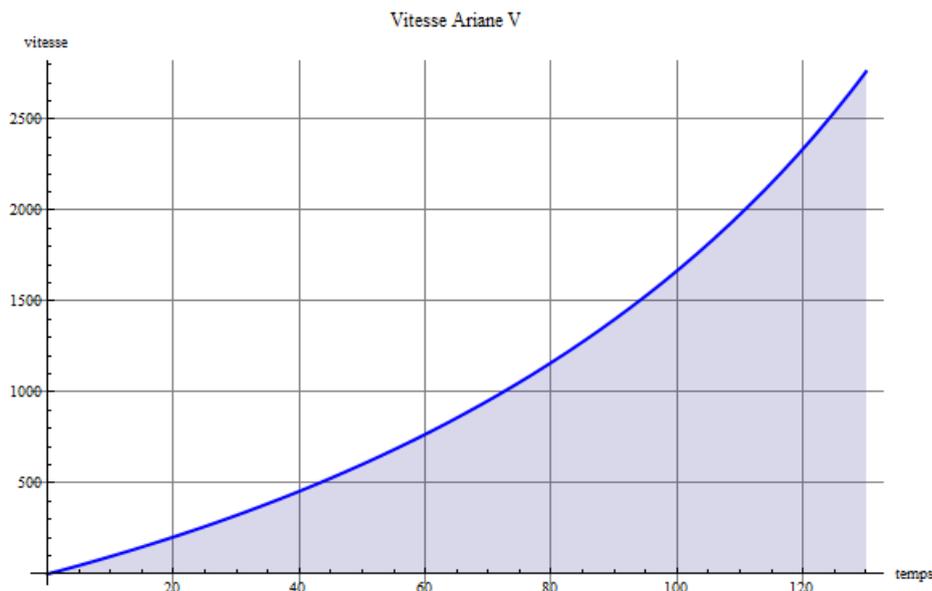
intègre simplement :

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{u}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}$$

$$v = -g_0 t - u \ln \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

L'énoncé ne le précise pas mais on supposera, dans cette question, la vitesse initiale nulle.

On obtient le profil de vitesse suivant pour une fusée de type Ariane V sur une durée de 120 s :



Soit une vitesse de  $2.76 \text{ km.s}^{-1}$ , soit près de  $10000 \text{ km.h}^{-1}$

6) Une mission interplanétaire.

On adapte l'équation dynamique :  $\frac{dv}{dt} = \frac{u}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}$  avec  $\tau = \frac{m_i}{D_m}$

on intègre  $v = v_i - u \ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$

Sur la durée  $\Delta t$  on obtient :  $\Delta V = v_f - v_i = -u \ln\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) = -u \ln\left(1 - \frac{D_m \Delta t}{m_i}\right) = u \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$

7) Intérêt d'une fusée à plusieurs étages.

Il s'agit d'une simple application numérique, nous avons dans le premier cas :

$$\Delta V_1 = 5.37 \text{ km.s}^{-1} \text{ et } \Delta V_2 = 7.17 \text{ km.s}^{-1}$$

Dans le deuxième cas, nous obtenons  $\Delta V = 8.76 \text{ km.s}^{-1}$ .

D'où la conclusion suggérée par l'énoncé... qui est ici aisément critiquable. Supposons en effet que le même moteur soit utilisé (celui de l'étage 2) et que la masse inerte finale ne soit que de 4 tonnes, nous trouvons alors  $\Delta V = 14.05 \text{ km.s}^{-1}$ , qui est supérieur à la somme des versions partitionnées.

En pratique la segmentation des étages correspond à des besoins en impulsion distincts, personne n'a envie d'utiliser un moteur à poudre pour manœuvrer (ils ne s'arrêtent pas une fois allumés) mais ils sont primordiaux pour booster le décollage.

8) Comparaison ionique et chimique.

Une nouvelle application numérique, on remarquera que la charge utile est particulièrement faible et qu'elle semble prendre en compte la masse du moteur de propulsion utilisé puisque l'énoncé suggère que le « reste » de masse n'est que du carburant... Sachant la masse usuelle de ces joujoux, l'utile doit être ici très virtuel !

On utilise la relation :  $m_c = m_u \left(\exp\left(\frac{\Delta v}{u}\right) - 1\right)$

Pour le chimique on obtient  $m_{c1} = 1245 \text{ kg}$

Pour le ionique on obtient..  $m_{c2} = 142 \text{ kg}$ .

La technologie du moteur ionique permet d'obtenir des impulsions spécifiques très élevées mais des forces de poussée très faibles. Elle constitue une option intéressante pour le vol spatial mais demande la maîtrise d'une technologie encore peu pratiquée (moins d'une dizaine de satellites et de sondes) et une ingénierie de vol complètement différente.

Les moteurs ioniques en raison de leur faible poussée doivent rester allumés pendant pratiquement toute la phase de vol contrairement aux moteurs chimiques qui fonctionnent par DeltaV. La technique classique des transferts de type Hohman ne peut leur être appliquée.

Les curieux pourront se renseigner à l'adresse suivante sur la mission Deep Space One qui utilise un moteur ionique à Xenon :

<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1998-061A>

## I.B - Aspect énergétique – Rendement propulsif du moteur

9) La masse de gaz éjectés a la vitesse  $v - u$ , son énergie cinétique vaut :  $dE_c = dm \frac{(v-u)^2}{2}$

L'énoncé nous invite alors à introduire la puissance cinétique :  $P_{jet} = D_m \frac{(v-u)^2}{2}$

C'est un artifice grossier.

La force de poussée vaut  $F_p = D_m u$ , la puissance reçue par le vaisseau vaut :  $P = F_p v = D_m u v$

10) Considérons le système fusée + gaz, à l'instant  $t$ , l'énergie cinétique vaut  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ , à l'instant

$t+dt$ , elle se répartit entre la fusée et les gaz éjectés et vaut  $E_c = \frac{1}{2} (m - dm) v'^2 + dm \frac{(v-u)^2}{2}$

L'accroissement d'énergie cinétique est selon l'énoncé l'illustration de l'énergie libérée par le vaisseau, elle vaut :  $\delta E_c = \frac{1}{2} (m - dm) v'^2 + dm \frac{(v-u)^2}{2} - \frac{1}{2} m v^2$

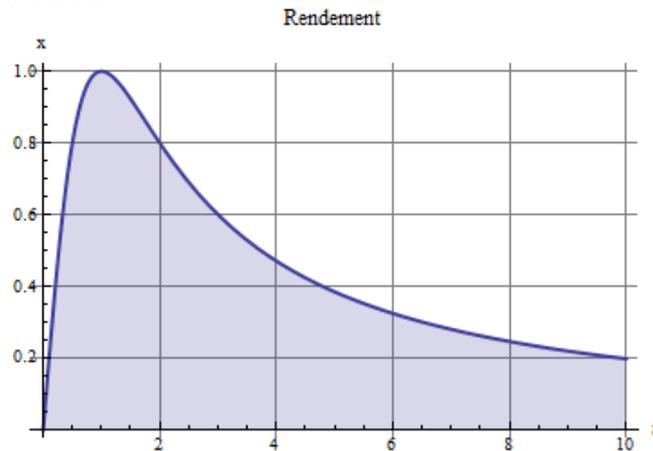
Le terme  $\frac{1}{2} (m - dm) v'^2 - \frac{1}{2} m v^2$  correspond à l'accroissement énergétique de la fusée qui est du à la force de poussée (pas de champ de pesanteur), il vaut  $\frac{1}{2} (m - dm) v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 = P dt$

Nous avons donc :  $\delta E_c = P dt + dm \frac{(v-u)^2}{2}$ , soit une puissance totale dépensée  $P_t = P + D_m \frac{(v-u)^2}{2}$ .

Nous en déduisons  $\eta = \frac{P}{P_t} = \frac{uv}{uv + \frac{(v-u)^2}{2}} = \frac{2uv}{u^2 + v^2} = \frac{2x}{1+x^2}$  avec  $x = u/v$

En pratique, vu le caractère symétrique de  $\eta$  on aurait aussi pu choisir l'inverse pour  $x$ .

- 11) Tracé de courbe.  
On obtient le profil suivant



Le rendement propulsif est maximal pour  $x = 1$ .

Cette situation correspond à l'arrêt des gaz dans le référentiel d'étude, elle est singulière (idiote) et d'évidence souligne un transfert cinétique uniquement à la fusée, l'énergie cinétique des gaz étant nulle.

Le rendement propulsif est nul pour  $x$  tendant vers l'infini ou zéro. Tout aussi subtile que le cas précédent, ici la puissance transférée à la fusée est nulle car  $u$  ou  $v$  sont nuls.

Comme on peut aisément le comprendre la notion de rendement telle que définie dans l'énoncé est ici sans intérêt.

L'énoncé évoque le caractère illimité de l'énergie fournie par des piles nucléaires ou des panneaux solaires. On se rappellera que l'Europe s'interdit l'envoi de sondes équipées de piles nucléaires et que la puissance d'un panneau solaire est généralement très faible, la gestion de la balance énergétique des équipements d'un satellite ou d'une sonde est primordiale et délicate, c'est l'un des critères majeurs.

## II Limites de la propulsion chimique

- 12) Question de cours (démonstration du premier principe pour un système ouvert)

Nous avons :  $W = (p_1 v_1 S_1 - p_2 v_2 S_2) dt + W'$  (forces de pression comprises)

Le premier principe s'écrit :  $\Delta E + (e_2 v_2 S_2 - e_1 v_1 S_1) dt = W + Q$  (énergies)

Nous utilisons les notations de l'énoncé qui n'utilisent pas les formes différentielles usuelles.

En régime stationnaire nous obtenons :  $D_m dt [e + pv]_1^2 = W' + Q$

Cette forme d'écriture n'étant pas des plus judicieuses, on lui préférera :

$$[e + pv]_1^2 = q + w'$$

où  $q, w'$  sont les grandeurs reçues par unité de masse,  $e$  est l'énergie massique totale.

forme compacte : « enthalpie totale »  $h_t = e + pv = u + pv + e_c + e_p = h + e_c + e_p$

- 13) Tuyère.

Il n'y a pas de travail autre que les forces de pression.

On retrouve le discours classique identifiant le contexte « transformation de Laplace », la détente est considérée comme rapide donc adiabatique, les échanges thermiques étant « lents ».

La phrase sur le caractère négligeable de la température de sortie doit *implicitement* suggérer qu'on négligera l'enthalpie massique du gaz en sortie par rapport à celle de l'entrée.

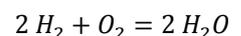
$$[e + pv]_1^2 = [h + e_c]_1^2 = q + w' = 0$$

$$\frac{v_s^2}{2} - c_p T_c = 0$$

$$\text{où } c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} r = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M} T_c}$$

- 14) Les ergols brûlent en produisant de la vapeur d'eau :



Le « gamma » du gaz n'est pas fourni, on supposera *implicitement* qu'il vaut celui d'un gaz diatomique dont les modes vibratoires sont actifs (théorème d'équipartition de l'énergie)  $\gamma = 9/7$  vu la température élevée. La masse molaire de l'eau est de  $M = 18 g \cdot mol^{-1}$ .

On obtient  $v_s = 2.50 km \cdot s^{-1}$

( $v_s = 2.50 km \cdot s^{-1}$  si vous prenez  $\gamma = 7/5$ )

L'impulsion spécifique vaut :

$$I_s = \frac{v_s}{g} \approx 255 s$$

### III Le moteur plasma micro-ondes

#### III.A - Principe de fonctionnement

15) Inventaire des forces appliquées.

Force éventuelle de gravité (négligeable).

Force d'interaction entre charges, à grande distance elle sera représentée par la force électromagnétique associée au champ EM modélisé, à courte distance un autre modèle doit être utilisé (chocs). Modèle de proximité négligé car « plasma non collisionnel »

Force électromagnétique dérivant du champ EM dynamique  $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \approx q\vec{E}$  car la vitesse des charges n'est pas relativiste, le terme  $q (\vec{v} \wedge \vec{B})$  étant alors négligeable.

Force magnétique dérivant de la composante de champ statique. A priori non négligeable, elle vaut  $\vec{F}_0 = q (\vec{v} \wedge \vec{B}_0)$ .

16) Vu le séquençage des questions, on supposera, dans cette partie, que le champ magnétique statique n'est pas présent, l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \approx q\vec{E}$$

Si on considère par ailleurs que la longueur d'onde du champ EM est grande devant le mouvement des charges, on peut négliger la dépendance spatiale du champ et considérer ce dernier comme localement constant. L'équation apparaît alors comme une équation différentielle linéaire dont la solution est :

$$\vec{v} = \frac{q}{m(i\omega)} \vec{E}$$

La densité volumique de courants s'en déduit aisément (la mobilité des ions est négligée) :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v} = n(-e)\vec{v} = \frac{ne^2}{m(i\omega)} \vec{E}$$

Nous pouvons introduire la « conductivité complexe » du plasma :

$$\underline{\sigma} = \frac{ne^2}{m(i\omega)}$$

17) Nous avons  $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ , l'équation de Maxwell-Gauss nous assure donc du caractère nul de la densité volumique de charges.

Nous exploitons les équations de Maxwell, la seule différence par rapport au vide se fait sur l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \left( \frac{ne^2}{m\varepsilon_0(i\omega)^2} + 1 \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On en déduit l'équation d'onde analogue à celle du vide à l'exception de cette modification.

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \left( \frac{ne^2}{m\varepsilon_0(i\omega)^2} + 1 \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

L'équation de dispersion s'écrit :

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \left( \frac{ne^2}{m\varepsilon_0(i\omega)^2} + 1 \right) \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$$
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right) \text{ avec}$$

18) L'onde ne pourra se propager que si la pulsation est supérieure à la pulsation plasma. Dans le cas contraire la solution ondulatoire est évanescence, l'énergie est absorbée par le milieu.

19) Etude en champ magnétique statique.

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0$ .

On introduit  $\vec{\Omega} = \frac{e\vec{B}_0}{m}$ , l'équation prend alors la forme  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ .

On reconnaît la forme classique des variations d'un vecteur de norme constante (cf cours sur la rotation-première année ou les changements de référentiels-deuxième année, pour les 5/2 cours de méca du solide). Le vecteur  $\vec{v}$  tourne autour de l'axe  $\vec{\Omega}$  à la vitesse angulaire  $\|\vec{\Omega}\| = \omega_c = \frac{eB_0}{m}$ .

Si la vitesse initiale est normale à  $\vec{\Omega}$ , l'ensemble du champ des vitesses reste dans le plan normal, la trajectoire est alors plane, circulaire, isochrone et uniforme.

Le rayon de courbure de la trajectoire vaut  $R = \frac{v}{\omega_c} = \frac{mv}{eB_0}$ .

Application numérique :  $\omega_c = 3.55 \cdot 10^{10} \text{ rad.s}^{-1}$

note : Les données numériques concernant l'électron ne sont pas rappelées. La mémoire organique ou de silicium aura été mise à profit.

20) Le champ EM seul ferait osciller les électrons selon l'axe y, le champ magnétique seul les ferait tourner autour de l'axe z mais ne leur communiquerait pas d'énergie.

On peut envisager une conjonction constructive des deux effets, il faut que le champ électrique soit positif quand l'électron a un mouvement vers les y négatifs et inversement, que le champ électrique soit négatif quand l'électron a un mouvement vers les y positifs. Autrement dit que la fréquence du champ EM soit égale à la fréquence cyclotron. On réalise alors un dispositif de *résonance électrique cyclotronique*.

Le passage du qualitatif au quantitatif n'est pas si simple...

21) Vu la richesse des données, on supposera que la résonance cyclotronique augmente la densité du plasma jusqu'à ce que ce dernier atteigne une pulsation plasma égale à la pulsation cyclotron.

$$\text{Nous avons alors } \omega_c = \frac{eB_0}{m} = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = \omega_p.$$

$$\text{Nous en déduisons la densité maximale possible } n = \frac{\epsilon_0 B_0^2}{m} = 3.93 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}.$$

22) L'énergie du photon associé à l'onde EM vaut :  $E = \hbar\omega_c = 3.56 \cdot 10^{-24} \text{ J}$ .

Elle est considérablement inférieure à l'énergie de première ionisation d'un atome de Xenon, la probabilité de photo ionisation est donc très faible.

### III.B - Poussée

23) Le courant électrique considéré est ici celui du aux ions. Ces ions sont les seules composantes du gaz éjecté par le vaisseau, on confondra donc leur débit massique avec celui du gaz.

La présentation du moteur ionique le suggère *implicitement*.

Il est un débit de charges, il suffit de le corrélérer au débit massique par la caractéristique des charges transportées (ion Xe<sup>+</sup>).  $I = \frac{D_m}{\mu} e$ .

24) On utilise la conservation de l'énergie :  $\Delta(E_c + E_p) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \mu u^2 = e V_a$$

$$u = \sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}}$$

$$\text{La force de poussée du moteur vaut } F_p = D_m u = \frac{\mu I}{e} \sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}} = I \sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}}$$

25) On utilise la loi de Child-Langmuir  $I = j S = j \pi \frac{D^2}{4} = \pi \epsilon_0 \frac{D^2}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{\mu}} V_a^{\frac{3}{2}}$

$$\text{Soit } F_p = I \sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}} = \pi \epsilon_0 \frac{2D^2}{9d^2} V_a^2$$

26) Le moteur dispose ici de N jets (autant qu'il y a de trous), la force de poussée vaut donc :

$$F_p = N \pi \epsilon_0 \frac{2D^2}{9d^2} V_a^2$$

$$\text{Application numérique : } F_p = 4.3 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$\text{Le débit massique vaut } D_m = N \frac{\mu I}{e} = N \pi \epsilon_0 \frac{D^2}{9d^2} \sqrt{\frac{2\mu}{e}} V_a^{\frac{3}{2}} \approx 1.33 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Soit au bout de 90 jours, près de  $m \approx 1.03 \text{ kg}$  de Xénon consommé.

27) Si on neutralise pas le jet d'ions issu du moteur il apparaîtra rapidement entre le moteur et les ions propulsés un champ électrique qui va s'opposer à l'éjection des ions (fusée à charge négative croissante et ions positifs) et qui neutralisera toute poussée.

## IV Application du moteur ionique au maintien d'un satellite en orbite basse

Gamme de fonctionnement : Le moteur ionique a une force de poussée très faible, il n'est exploitable que dans la mesure où cette force est dominante et que le processus dispose d'un temps conséquent. Il ne peut être considéré comme pertinent au décollage.

Principe de fonctionnement : Si la pression de l'air est supérieure à celle du gaz injecté, l'air va remplacer le gaz de la chambre d'ionisation et il ne s'ionisera pas aussi facilement. Le dispositif ne peut fonctionner qu'à de très faibles pressions.

### 28) Satellite terrestre en orbite basse.

La question est ici « brutale » et suggère beaucoup d'*implicite* !

On considère dans un premier temps que le satellite est en orbite circulaire uniforme.

Le principe fondamental de la dynamique nous donne  $\frac{v^2}{r} = \frac{GM_T}{r^2} = g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$

Soit  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r} = -\frac{E_p}{2}$ , nous avons donc :  $E_m = E_c + E_p = -E_c$

Freinage du satellite :

Si on maintient cette « relation » dans le cadre d'un freinage peu efficace on constatera une augmentation de la vitesse pour une perte d'énergie totale. La décroissance de l'énergie potentielle est ici dominante...

### 29) Application numérique.

En conservant l'hypothèse d'orbites quasi-circulaires (perte de 20 m sur 300 km), nous exploiterons l'expression de l'énergie totale d'un satellite en orbite circulaire :  $E_t = -\frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r}$ .

La variation de hauteur entraîne donc la variation d'énergie

$$\Delta E_t \approx \frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \Delta h .$$

AN :  $\Delta E_t = 22,4 \text{ kJ}$

### 30) Estimons la force de frottement moyenne de l'air sur notre satellite sur un tour, nous avons

$$F_{air} = \frac{\Delta E_t}{2\pi r} \approx 5.2 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Nous obtenons une force plus faible que celle que peut produire notre moteur témoin, il devrait donc être en mesure de compenser ces frottements et de stabiliser notre satellite.

# Fin