

Le dragster

Proposition de corrigé

I Mesure de l'accélération par un système embarqué

I.A - Analyse du mouvement mécanique

Incohérence du sujet : La masse glisse sans frottement mais l'une des forces introduite est une force de frottement fluide que le sujet caractérise spontanément par un « coefficient de frottement ». L'ensemble est source de confusion et n'est pas des plus heureux pour débiter ce problème.

- 1) Exigence « Exprimer » - nulle démonstration requise.

On pourra donc écrire directement :

$$\vec{F}_r = -2k L \vec{e}_x$$

de même :

$$\vec{F}_a = -2f \frac{dL}{dt} \vec{e}_x$$

- 2) Le principe fondamental (théorème de la résultante dynamique plutôt) s'écrit en projection sur l'horizontale \vec{e}_x :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -2k L - 2f \frac{dL}{dt}$$

or $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2(x-x_e+x_e)}{dt^2} = a + \frac{d^2L}{dt^2}$, soit : $\frac{2k}{m} L + \frac{2f}{m} \frac{dL}{dt} + \frac{d^2L}{dt^2} = -a$

- 3) Le correcteur a quelques difficultés à imaginer une accélération de Dragster sinusoïdale.. Considération d'autant plus délicate que la q2 évoquait un $a > 0$...

Peut-être aurait-il mieux valu simplement préciser que l'étude de l'équation précédente se faisait dans le domaine fréquentiel (Fourier) nonobstant la réalité du mouvement de l'engin.

Nous utiliserons la notation $p = j\omega$, l'équation précédente s'écrit :

$$\left(\frac{2k}{m} + \frac{2f}{m} p + p^2 \right) L = -a$$

soit $\left(\omega_0^2 + \omega_0 f \sqrt{\frac{2}{mk}} p + p^2 \right) L = -a = (\omega_0^2 + 2\mu\omega_0 p + p^2) L$ et

$$T = \frac{L}{a} = -\frac{G}{1+j2\mu\xi-\xi^2}$$

On retrouve la fonction de transfert classique d'un passe-bas d'ordre deux, on pourra s'étonner des notations, la quantité μ n'étant autre que le classique coefficient d'amortissement usuellement noté dans la littérature ξ .

La question suivante est dans l'absolu dépourvue de sens, si on connaît la fréquence d'excitation (la commande), il est aisé d'inverser la relation donnée par T pour à partir de L obtenir a.

Il est toutefois probable que l'auteur du sujet ait ici préféré entendre ou lire le discours suivant : « en basses fréquences pour $\xi \ll 1$, le ratio d'amplitude est constant et vaut G, nous aurons dans ce mode de fonctionnement $A = L/G$ » mais c'est très convenu...vu les hypothèses.

Vu le mode d'utilisation du Dragster, rien puis « à fond les manettes » une commande de type Heaviside est plus proche de la réalité, on choisira alors le réglage industriel du coefficient d'amortissement pour optimiser le temps de réponse du circuit $1/\sqrt{2}$.

Attention : on remarquera qu'en BF $\frac{L}{a} = -G$.

I.B - Mesure du déplacement

- 4) Le circuit étant linéaire, on peut l'analyser en régime sinusoïdal permanent pour obtenir l'équation différentielle le caractérisant.

On applique alors le théorème de Millman au nœud v_3 , soit :

$$v_3 \left((C_1 + C_2)p + \frac{2}{R} \right) = C_1 p v_1 + C_2 p v_2 + \frac{1}{R} V_s$$

La conversion classique de l'espace de Fourier à l'espace temporel nous donne l'équation différentielle recherchée.

ou encore $\frac{R}{2} (C_1 + C_2) \frac{dv_3}{dt} + v_3 = \frac{R}{2} C_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{R}{2} C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{2} V_s$

or $\frac{dv_2}{dt} = -\frac{dv_1}{dt}$

donc $\frac{R}{2} (C_1 + C_2) \frac{dv_3}{dt} + v_3 = \frac{R}{2} (C_1 - C_2) \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{2} V_s$

en remplaçant $\tau \frac{dv_3}{dt} + v_3 = \tau\omega V_2 \cos(\omega t) + \frac{1}{2} V_s$

- 5) Pour la résolution, on sépare l'analyse en RSP et en contrainte constante :
 $V_3 = \frac{1}{2}V_s$ (contrainte constante), $V_3 = \frac{j\tau\omega}{1+j\tau\omega} V_2$ (contrainte sinusoïdale), ce sont les régimes forcés plus communément appelées solutions particulières chez nos collègues mathématiciens, soit une forme générale : $v_3(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{2}V_s + \frac{V_2}{\sqrt{1+\frac{1}{(\tau\omega)^2}}} \cos(\omega t - \arg(1 + j\tau\omega))$

La notion de régime libre fait référence au régime transitoire, il est à rajouter aux deux solutions particulières liées aux commandes constante et sinusoïdale.

Il n'est pas certain que ce vocabulaire soit maîtrisé par tous les candidats.

Rmq : la fonction arg (argument) peut être ici remplacée par la fonction arctangente mais c'est un comportement à éviter dans le cas général.

Phase à l'origine : $\varphi = -\arg(1 + j\tau\omega)$ et amplitude $\frac{V_2}{\sqrt{1+\frac{1}{(\tau\omega)^2}}}$.

- 6) Vu les valeurs numériques $\tau\omega \gg 1$, donc $v_3(t) \approx \frac{1}{2}V_s + V_2 \cos(\omega t - \arg(j\tau\omega)) \approx \frac{1}{2}V_s + V_2 \sin(\omega t)$

- 7) Question de cours : Symétrie – Théorème de Gauss – Champ nul dans le métal.

On obtient $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$

- 8) On utilise le résultat précédent et on l'adapte aux références de l'énoncé :

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d+L}, C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{d-L}$$

- 9) On remplace pour obtenir $v_3(t) \approx \frac{1}{2}V_s + V_2 \sin(\omega t) = \frac{1}{2}V_s - \frac{L}{d} V_1 \sin(\omega t)$

- 10) Déterminons $s_1(t) = h v_1(t)$ $v_3(t) = h \left(\frac{V_s^2}{4} + \frac{V_1 V_s}{2} \left(1 - \frac{L}{d} \right) \sin \omega t - \frac{L}{d} V_1^2 \sin^2 \omega t \right)$

or $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$, soit si on effectue un filtrage passe-bas de $s_1(t)$:

$$s(t) = \frac{h}{4} \left(V_s^2 - \frac{2L}{d} V_1^2 \right)$$

L'expression est obtenue en considérant que le passe-bas est capable de discriminer les pulsations ω et 2ω . Elle fait fi de la notion évoquée dans l'énoncé concernant la variabilité de a et de L car il est bien évident que si a(t), L(t) sont inconnus le résultat du filtrage ne peut être déterminé.

On a $L = -Ga$ (attention à la confusion avec la relation des amplitudes), soit $L = -\frac{m}{2k} a$.

Donc $s(t) = \frac{h}{4} \left(V_s^2 - \frac{2L}{d} V_1^2 \right) = \frac{h}{4} \left(V_s^2 + \frac{ma}{kd} V_1^2 \right)$.

II Propulsion de l'engin par un réacteur d'avion

II.A - Premier principe pour un système ouvert

Un système ouvert, un de plus ...mais étudié comme un système fermé.

Pas vraiment officiellement au programme, mais tellement courant dans les épreuves de concours qu'il est, et reste incontournable.

Vu les réformes à venir, il est à craindre que ces « fenêtres de proximité » se multiplient...

- 11) Soit le système considéré dans l'énoncé, la masse se conserve donc

$$dm_e + m_{pc}(t) = dm_s + m_{pc}(t + dt)$$

en régime permanent $m_{pc}(t) = m_{pc}(t + dt)$, donc $dm_e = dm_s = D_e dt = D_s dt$.

Le débit entrant est donc égal au débit sortant.

Confusion : Notation dans l'énoncé douteuse, les grandeurs U_e, U_s devraient être soit des grandeurs intensives et dénommées comme telles (énergie interne massique) ou des grandeurs caractérisant l'énergie des masses entrante et sortante, elles sont alors de nature différentielles et devraient être notées dU_e, dU_s .

Vu les questions qui suivent nous pencherons pour cette dernière solution.

- 12) Les parois étant calorifugées l'apport de flux thermique est nul, nous ne considérerons que l'apport de travail.

Nous avons
$$d\mathcal{E} = d(U_s + E_{p_s} + E_{c_s}) - d(U_e + E_{p_e} + E_{c_e})$$

car l'énergie de la partie commune ne varie pas.

du coté du travail il faut ajouter le travail de circulation et le travail indiqué

$$\delta W_{cir} = (P_e S_e dl_e - P_s S_s dl_s) : \text{travail de circulation}$$

et δW_i : travail indiqué

d'où un travail total
$$\delta W = \delta W_{cir} + \delta W_i = (P_e S_e dl_e - P_s S_s dl_s) + \delta W_i$$

et une relation non réduite qui s'écrit sous la forme :

$$d(U_s + E_{p_s} + E_{c_s}) - d(U_e + E_{p_e} + E_{c_e}) = (P_e S_e dl_e - P_s S_s dl_s) + \delta W_i$$

- 13) L'énoncé va enfin passer aux grandeurs massiques, vu les écritures, il suggère « implicitement » que l'énergie potentielle se limite à l'énergie de pesanteur.

Nous avons donc
$$d(U_s + E_{p_s} + E_{c_s}) = dm_s (u_s + gz_s + \frac{c_s^2}{2})$$
 et $P_s S_s dl_s = P_s v_s dm_s$

En remplaçant, nous obtiendrons :
$$(u_s + P_s v_s + gz_s + \frac{c_s^2}{2}) - (u_e + P_e v_e + gz_s + \frac{c_s^2}{2}) = \frac{\delta W_i}{dm} = \omega_i.$$

Si nous introduisons l'enthalpie massique nous obtenons $h_i = u_i + P_i v_i$ et :

$$(h_s + gz_s + \frac{c_s^2}{2}) - (h_e + gz_s + \frac{c_s^2}{2}) = \omega_i$$

A peu de choses près (q transfert thermique en moins) c'est le premier principe des systèmes ouverts en régime permanent.

Pas vraiment au programme en MP même si nous sommes nombreux à le traiter.

II.B - Force de poussée du réacteur – Etude de la tuyère

Grand moment de solitude sur la précaution oratoire de l'énoncé puisque selon l'œuvre « la première partie est une partie active qui comprime l'air et le chauffe » et « l'écoulement du gaz dans la tuyère est permanent, adiabatique et réversible ». Bref on chauffe sans chauffer, les schizophrènes y trouveront leur bonheur.

Bien sur le chauffage correspond à la combustion carburant + comburant et est un apport thermique qui n'est pas considéré dans la partie 12-13.

Une erreur de lecture peut ici couter fort cher à un étudiant pressé, mais nous pouvons sans doute ici deviner les premières mesures de l'Analyse de Document Scientifique annoncées dans les programmes de lycée.

- 14) Nous sommes dans la tuyère, nous avons $\omega_i = 0$, soit pour le premier principe :

$$(h_s - h_e) = c_p \Delta T = -\frac{c_s^2}{2}$$

Par ailleurs nous supposons la transformation isentropique soit $T_s = T_e \left(\frac{P_e}{P_s}\right)^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}$.

Application numérique : $T_s = 820 \text{ K} = 547^\circ\text{C}$.

- 15) On utilise le premier principe $c_s = \sqrt{2 c_p (T_e - T_s)} = 841 \text{ m.s}^{-1}$

- 16) D'après la formulation de l'énoncé $\vec{F} = -D (\vec{c}_s - \vec{c}_e)$.

Cette traduction immédiate n'est pas évidente pour les béotiens du domaine.

Le dragster démarre à l'arrêt soit avec $c_e = 0 \text{ m.s}^{-1}$ (pas de vent !), donc $F = D c_s = 67.3 \text{ kN}$.

- 17) L'accélération vaut (TRC) $a = \frac{F}{m} = 63.5 \text{ m.s}^{-2}$, soit $\frac{a}{g_0} = 6.47$.

Bien sûr, il faut ici négliger toute autre force (pas de frottement, ni de l'air, ni des contacts sols, pas de déformation des roues etc..)

- 18) La force de poussée dépend normalement de la vitesse de la masse d'air par rapport au réacteur, cette dernière étant variable, il faudrait logiquement la prendre en compte mais l'énoncé nous invite à croire en son caractère constant.

Croyance à laquelle nous adhérons pour suivre la démarche proposée, nous avons alors

$$x = a \frac{t^2}{2} \text{ ou encore } t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = 3.09 \text{ s}$$

III Contrôle d'épaisseur de certaines pièces

III.A - Contrôle d'épaisseur d'un dépôt métallique

19) Le système correspond à un coin d'air tout à fait classique si on fait abstraction du décrochage.

Le « déterminer » n'exigeant pas la différence de marche, on peut postuler cette dernière en se rappelant du cours correspondant $\delta = 2h = 2\epsilon x$ où h est la hauteur entre les deux plaques au point considéré et où x est la distance à l'axe de coincidence des plans.

L'interfrange s'obtient pour une variation unité de l'ordre d'interférence ou pour une variation de longueur d'onde de la différence de marche. $i = \frac{\lambda_0}{2\epsilon}$.

Sur l'écran, cette interfrange est agrandie du facteur $|\gamma|$, soit $d_i = |\gamma|i = |\gamma| \frac{\lambda_0}{2\epsilon}$.

20) Le décroché correspond à une variation de différence de marche égale à $\Delta\delta = 2e$, on sait qu'une longueur d'onde correspond à d_i , donc $u = d_i \frac{2e}{\lambda_0} = |\gamma| \frac{\lambda_0}{2\epsilon} \frac{2e}{\lambda_0} = |\gamma| \frac{e}{\epsilon}$.

Vu les données nous avons $|\gamma| = \frac{50}{4} - 1 = 11.5$ donc $e = \frac{u\epsilon}{|\gamma|} = 89.5 \text{ nm}$, soit une portion de la longueur d'onde ce qui est cohérent.

L'interfrange initiale valait $i = \frac{\lambda_0}{2\epsilon} = 152 \mu\text{m}$.

21) Si on se place dans l'eau, la différence de marche sera augmentée de l'indice du milieu, et nous aurons alors si n est l'indice, $i = \frac{\lambda_0}{2n\epsilon'}$, soit une division par n de l'interfrange. u sera inchangé puisqu'il ne dépend que de l'angle et du grossissement.

22) Si on augmente l'angle du coin d'air, on réduit l'interfrange observée (cf formule) et le décrochage d'autant.

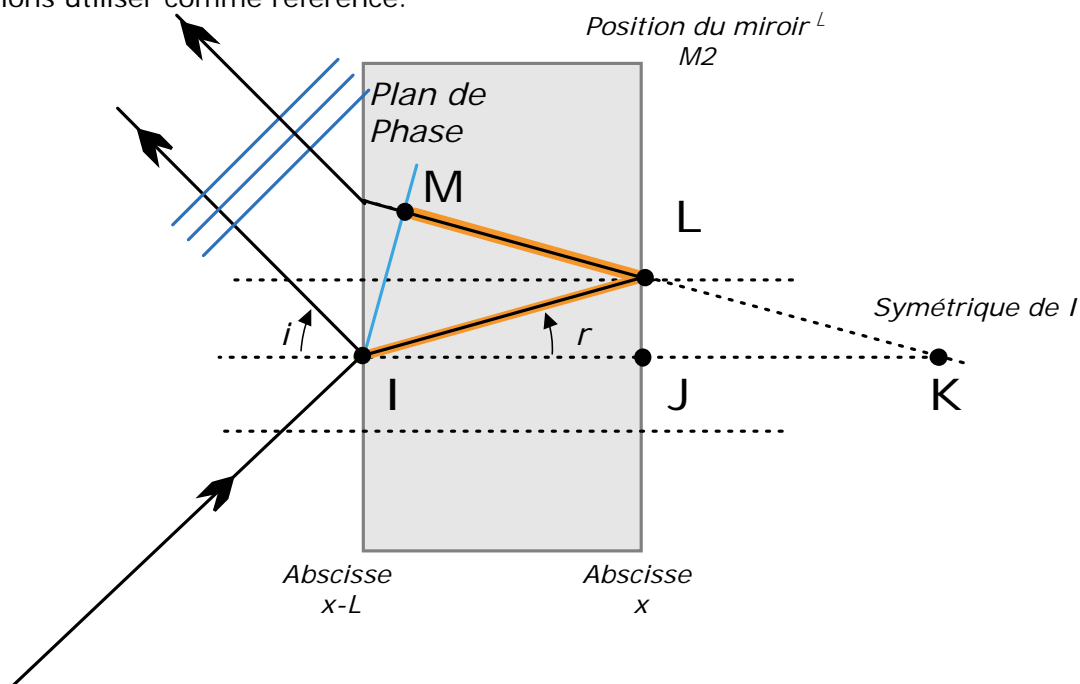
III.B - Contrôle d'épaisseur d'un dépôt métallique

23) Michelson en lame d'air : lame d'épaisseur L , d'indice n , insérée sur le bras deux (miroir M2). Sans cette lame, si on appelle x la distance de translation par rapport au contact optique, on obtient le résultat classique du cours $\delta = 2d \cos i$.

Nous allons calculer l'écart introduit par la lame de verre.

Sous incidence normale nous aurions un $\Delta\delta = 2(n-1)L$, vu les hypothèses nous ne pouvons nous limiter à cette simple considération.

Sur le schéma suivant nous visualisons la variation de différence de marche entre la trace de l'onde ILM (rayon bleu) et la trace de l'onde réfléchi en I comme sur un miroir que nous allons utiliser comme référence.



Nous utilisons le couple classique loi du retour inverse + théorème de Malus. Nous considérons l'onde de retour provenant de l'infini en sens inverse des flèches, c'est une onde unique, d'après Malus ses surfaces de phase sont les plans représentés en bleu.

Il est judicieux de considérer la surface de phase passant par IM, la différence de marche est alors simplement liée à la longueur (MLI) au facteur d'indice près.

Or vu la symétrie $(MLI) = (MKL) = 2L \cos r$.

La variation de chemin optique s'obtient comme celle d'une lame d'aire d'épaisseur L :

$$\Delta\delta = 2nL \cos r$$

En fait la référence est ici sur la face externe de la lame et non sur le miroir donc, il faut se recalculer sur cette surface (décalage de $-L$), soit :

$$\delta = 2(d - L) \cos i + 2nL \cos r$$

Formulation cohérente sous incidence normale ou nous retrouvons $\delta(i = 0) = 2(d + (n - 1)L)$.

On identifie $A = d - L$ et $B = 2nL$.

L'observation se fait à l'infini puisque les traces des ondes sont parallèles entre elles.

24) Pour de petits angles le contact optique vaut $\delta = 0$, soit $L = -\frac{d}{n-1}$.

Problème de cohérence de l'énoncé, puisque d doit être négatif, c'est-à-dire rapprocher M2 mais impossible car la lame s'y trouve, éloigner M1 eut été plus probable.

Probable confusion entre contact optique et teinte plate sur cette question d'ailleurs.

25) On extrait la lame de verre pour une différence de marche : $\delta = 2d \cos i \approx 2d$.

Les deux longueurs d'ondes ne sont pas cohérentes, on somme donc les intensités propres à chaque longueur d'onde $I_1 = I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right)$.

On somme pour une intensité globale $I = I_1 + I_2 = 2I_0 \left(1 + \cos \pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \cos \pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right)$

Soit $I = I_1 + I_2 = 2I_0 \left(1 + \cos \left[\frac{\pi\delta}{\lambda_m} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m}\right)\right] \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)\right)$.

L'anticoincidence évoquée correspond à un fond uniforme et à l'annulation du premier des cosinus à variation lente, soit $\frac{\pi\delta}{\lambda_m} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m}\right) = \frac{(2N-1)}{2} \pi$ où N entier

ou encore $\frac{\delta}{\lambda_m} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m}\right) = N - \frac{1}{2}$

Résultat qui peut s'obtenir plus rapidement en utilisant les ordres d'interférences de chaque raie et en considérant que ces derniers sont décalés d'une demi-période modulo une période, ce qui s'écrit $p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \text{ modulo}[1]$ (même résultat après dev)

Soit $d_N = \frac{(2N-1)\lambda_m^2}{4\Delta\lambda}$ car $\delta \approx 2d$, enfin $\Delta\lambda = (5) \frac{\lambda_m^2}{\Delta e} = 0.594 \text{ nm}$.

Fin