

# Sujet Mines Ponts 2012

## Physique I

### Option MP

#### I Propagation de la lumière

##### 1) Question de cours

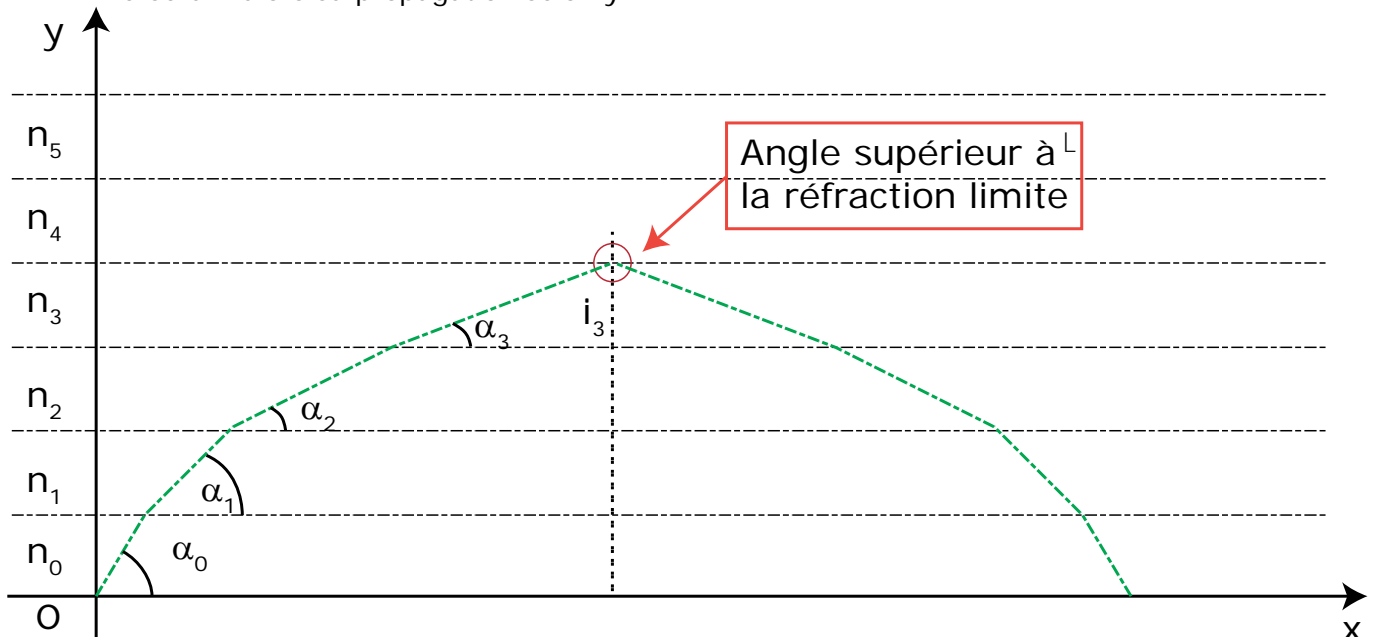
- Cf. Cours : Lois de Snell-Descartes
- L'histoire est chose délicate pour des lois « physiques »...  
Ces lois sont publiées par Descartes en 1637.  
Elles sont publiées par Snell en 1621, et sont connues sous cette appellation dans le monde anglo-saxon.  
Toutefois les lois de la réflexion sont connues depuis l'antiquité, celles de la réfraction sont attribuées à une paternité qui prend ses sources à Bagdad vers l'an 1000 avec Ibn Sahl, elle se développe ensuite avec Alazhen, puis Vitellion, Bacon, Harriot et Kepler (1601).

##### 2) Notion de réflexion totale :

- Si un rayon lumineux est réfracté (transmis), il vérifie avec le rayon d'incidence la loi de la réfraction  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , soit  $i_2 = \text{Arcsin}\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)$  où  $(i_1, i_2) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$ . Si on passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent ( $n_1 > n_2$ ), la relation précédente ne peut être vérifiée pour tout  $i_1$ .  
Avec  $i_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et donc borné, elle est invalide pour tout angle d'incidence supérieur à une limite définie par une réfraction à  $\pi/2$ . Soit  $i_1 > \alpha_{\text{lim}}$  avec  $\alpha_{\text{lim}} = i_1 \left(i_2 = \frac{\pi}{2}\right) = \text{Arcsin}\frac{n_2}{n_1}$ .  
Au-delà de cette limite, il ne peut y avoir de réfraction, l'énergie du rayon incident est donc totalement réfléchi.

##### 3) Milieu homogène stratifié (vers l'équation iconale)

- L'espace est une suite de couches homogènes dont l'indice optique va décroissant avec l'altitude  $y$ . A chaque passage de dioptré (plan séparant deux milieux), le rayon lumineux s'écarte de plus en plus de la normale.  
Après un certain nombre de réfraction, on atteindra une situation de réflexion totale, le rayon « inversera » alors sa propagation selon  $y$ .



4) Invariant

- On transcrit simplement l'équation de la réfraction dans le système de coordonnées cartésiennes. Avec  $\sin i = \cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ .

La quantité définie par la loi de la réfraction reste invariante :

$$n_0 \cos \alpha_0 = n_1 \cos \alpha_1 = \dots = n_k \cos \alpha_k = n(y) \cos \alpha(y) = n(y) \frac{dx}{ds} = C_0$$

Soit 
$$n(y) = \frac{ds}{dx} C_0$$

5) Equation différentielle de la trajectoire

- La conversion cartésienne de l'équation précédente donne  $n(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} C_0$

Soit 
$$\left(\frac{n(y)}{C_0}\right)^2 - 1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

On dérive en x 
$$\frac{d}{dx} \left( \left(\frac{n(y)}{C_0}\right)^2 - 1 \right) = \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d}{dy} \left( \left(\frac{n(y)}{C_0}\right)^2 \right) = 2 \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{d}{dy} \left( - \left(\frac{n(y)}{\sqrt{2}C_0}\right)^2 \right) \quad \text{avec } \beta = \sqrt{2}C_0$$

- Analogie mécanique

6) Détermination de la trajectoire

- L'indice décroît avec le numéro de couche, soit avec l'accroissement de y, le signe de k est donc négatif.

- L'équation différentielle s'écrit :  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2k}{\beta^2} y = \frac{k}{C_0^2} y$

- Pour  $k < 0$ , l'équation est harmonique, la forme générale des solutions se met sous la forme  $y(x) = A \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{C_0} x + \theta\right)$ . Les conditions initiales nous imposent  $y(0) = 0$  et  $\dot{y}(0) = \cotan \alpha_0$ .

Nous en déduisons  $y(x) = \frac{C_0}{\sqrt{-k}} \cotan \alpha_0 \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{C_0} x\right) = \frac{n_0}{\sqrt{-k}} \sin \alpha_0 \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{n_0 \cos \alpha_0} x\right)$ .

- Pour  $k > 0$ , l'équation est hyperbolique, la forme générale des solutions se met sous la forme  $y(x) = A \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{k}}{C_0} x\right) + B \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{k}}{C_0} x\right)$ . Les conditions initiales sont inchangées, nous en déduisons  $y(x) = \frac{n_0}{\sqrt{k}} \sin \alpha_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{k}}{n_0 \cos \alpha_0} x\right)$ .

- La question sur le signe de k est « subtile ».

Les mirages sont dus à l'existence d'un gradient thermique dans l'atmosphère, les mirages des déserts ou du macadam (plus chaud près du sol), encore appelés mirages inférieurs sont à coefficients  $k > 0$ , mais les mirages célestes, dits aussi supérieurs (bateau dans le ciel, vision au-delà de l'horizon, effet Novaya Zemlya), sont eux à coefficients  $k < 0$ .

Pour les fibres, ce sont celles à gradient d'indice qui sont évoquées, elles sont à géométrie cylindrique, en  $y(r)$  elles sont donc à  $k < 0$ .

**Fin de la partie I**

**II Nature ondulatoire de la lumière**

**II A Propagation dans le vide**

7) Question de cours électromagnétisme

- Equations de Maxwell dans le vide

$$\operatorname{Rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{Rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

- Vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

- Densité d'énergie électromagnétique  $u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

8) Conservation de l'énergie

- $\frac{\partial}{\partial t}(u_{em}) = -div \vec{\Pi}$
- Equation analogues :
  - diffusion thermique  $\frac{\partial}{\partial t}(u) = -div \vec{j}_{th}$ ,
  - conservation de la charge :  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho) = -div \vec{j}$
- Le vecteur de Poynting représente le vecteur de densité de flux d'énergie, son flux à travers une surface donne la puissance transférée au travers de cette surface. L'équation figure que comme l'énergie se conserve toute fluctuation locale de l'énergie est due à un transfert. Le vecteur de Poynting caractérise ce transfert.

9) Des potentiels

- $div \vec{B} = 0$ , la divergence d'un rotationnel étant toujours nulle  $\Rightarrow \exists \vec{A} / \vec{B} = \overrightarrow{Rot} \vec{A}$ .

- Nous avons : 
$$\overrightarrow{Rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{Rot} \vec{A})$$

$$\overrightarrow{Rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}) \right) = \vec{0}$$

Le rotationnel d'un gradient étant toujours nul  $\Rightarrow \exists V / \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}) = -\overrightarrow{Grad} V$

Soit 
$$\vec{E} = -\overrightarrow{Grad} V - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A})$$

- Par définition  $\vec{\Psi} = \vec{E} + jc \vec{B} \Rightarrow \underline{\Psi} = -\overrightarrow{Grad} V - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}) + jc \overrightarrow{Rot} \vec{A}$
- Déterminons  $\overrightarrow{Rot} \underline{\Psi} = \overrightarrow{Rot} \vec{E} + jc \overrightarrow{Rot} \vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + jc \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{j}{c} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + jc \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{j}{c} \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t}$

et  $div \underline{\Psi} = div \vec{E} + jc div \vec{B} = 0$ .  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  étant des champs réels (non complexes) la composition de Riemann-Silberstein est bijective. Les équations de Maxwell se résument sous cette forme

à :

$$\begin{cases} \overrightarrow{Rot} \underline{\Psi} = \frac{j}{c} \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t} \\ div \underline{\Psi} = 0 \end{cases}$$

10) Mise en forme :

- Développons  $\underline{\Psi} \cdot \underline{\Psi}^* = \vec{E} \cdot \vec{E}^* + jc(-\vec{E} \cdot \vec{B}^* + \vec{B} \cdot \vec{E}^*) + c^2 \vec{B} \cdot \vec{B}^*$ , or les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont réels donc :
 
$$\underline{\Psi} \cdot \underline{\Psi}^* = E^2 + c^2 B^2 = \frac{2}{\epsilon_0} u_{em}$$
- De même  $\underline{\Psi}^* \wedge \underline{\Psi} = 2jc \vec{E} \wedge \vec{B} = 2j\mu_0 c \vec{\Pi}$

11) Equation d'onde

- Calculons  $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{Rot} \underline{\Psi}) = \overrightarrow{Rot} \left( \frac{j}{c} \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t} \right) = \frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{Rot} \underline{\Psi}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}}{\partial t^2} = \overrightarrow{Grad}(div \underline{\Psi}) - \Delta \underline{\Psi} = -\Delta \underline{\Psi}$

On retrouve l'équation de Jean le Rond D'Alembert  $\Rightarrow \Delta \underline{\Psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}}{\partial t^2}$

- Les champs étant réels l'équation précédente nous permet d'écrire à l'identique l'équation sur le champ électrique et le champ magnétique.
- Confusion dommageable avec ici l'usage d'un champ E écrit en notation complexe, le caractère bijectif de la réduction de Riemann-Silberstein n'étant pas alors démontré.
- On utilise  $\Delta \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$  avec  $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$

Nous avons alors  $\Delta \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}}$  et  $\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$  (classique réduction des opérateurs de l'analyse vectorielle pour une OPPM), d'où l'équation dite de dispersion (qui ici ne disperse rien) :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

- On utilise les relations de Planck-Einstein  $\vec{p}_\gamma = \hbar \vec{k}$  et  $E = \hbar \omega$  pour réécrire la précédente relation sous la forme :

$$p_\gamma^2 c^2 = E^2$$

12) Vitesse de l'énergie

- Dans le champ complexe nous avons  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} Re(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*)$  où  $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  soit
 
$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 c \vec{e}_z$$
- De même  $\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0}{2} \|\underline{\vec{E}}\|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \|\underline{\vec{B}}\|^2 \right) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$

- Dans le cylindre l'énergie moyenne vaut  $d\mathcal{E}_1 = \langle u_{em} \rangle d\ell dS = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 d\ell dS$   
L'énergie moyenne ayant traversé la surface pendant le temps défini vaut  
$$d\mathcal{E}_2 = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} dt = c \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 dt dS$$

D'après l'énoncé  $d\ell = v_e dt$ , on identifie alors  $c$  et  $v_e$ .

*Note : Si cette méthode fournit un résultat correct en l'absence de dispersion (c pour toutes les vitesses), elle fournit une vitesse différente de la vitesse de phase, ou de groupe dans le cas d'une dispersion effective, elle n'est donc pas « vraiment » recommandable.*

Plus précisément, on obtient : 
$$v_e = v_\varphi \frac{2u^2}{1+u^2} \quad \text{avec } u = c/v_\varphi.$$

Pour Klein-Gordon où  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ , et  $v_\varphi v_g c^2$ , on trouvera  $v_e = c \frac{2 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ .

## II B Propagation dans un diélectrique

### 13) Dispersion et vitesse

- On utilise les résultats du vide avec la substitution de l'énoncé pour obtenir :

$$k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{équation de dispersion (sans dispersion)}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

### 14) Diffraction : saut « brutal » du modèle ondulatoire à celui de l'optique scalaire

- Situation de diffraction 1D classique, soit  $\Psi$  l'amplitude scalaire de l'onde lumineuse.  
Selon le principe de Huyghens-Fresnel nous avons :

$$\Psi(\theta, \alpha) = \Psi_L \int_{-\infty}^{+\infty} t(x) \exp j\varphi(x) dx$$

où  $t(x)$  est la fonction de transparence du diaphragme (porte de valeur 0 et 1 ici)

où  $\varphi(x)$  est le déphasage de la cote  $x$  par rapport à une référence.

Si on prend O comme référence, on a  $\varphi(x) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OP} = \frac{\omega}{c} (n_2 \sin \theta - n_1 \sin \alpha)x$ .

L'intégrale est la Transformée de Fourier d'une fonction porte, qui nous produit un sinus cardinal :

$$\Psi(\theta, \alpha) = \Psi_L L \cdot \text{sinc} \left[ \frac{\pi v L}{c} (n_2 \sin \theta - n_1 \sin \alpha) \right]$$

On en déduit l'intensité

$$I = \underline{\Psi} \cdot \underline{\Psi}^*$$

Avec une normalisation à  $I_0$

$$I(\theta, \alpha) = I_0 \cdot \left( \text{sinc} \left[ \frac{\pi v L}{c} (n_2 \sin \theta - n_1 \sin \alpha) \right] L \right)^2.$$

- Le maximum de diffraction s'obtient pour  $n_2 \sin \theta - n_1 \sin \alpha = 0$ , soit la direction prévue par l'optique géométrique.

*Note : la nature de la lumière semble avoir subi une brève discontinuité de modèle dans cette question.*

## II C Propagation de l'onde lumineuse avec une masse de photon non nulle

*Note : Un photon de masse non nulle, voilà qui est des plus judicieux pour tester le « sens physique » des candidats.*

### 15) Jeu de dimension

- $[\hbar] = \left[ \frac{E}{\omega} \right] = \text{Energie} \times T$  d'où  $[\delta] = \left[ \frac{\hbar}{m_\gamma c} \right] = \frac{\text{Energie} \times T}{\text{masse} \times \text{vitesse}} = \text{vitesse} \times T = L$   
 $\delta$  a donc la dimension d'une longueur.

### 16) Equation de Klein-Gordon

- On utilise les relations de Planck-Einstein  $\vec{p}_\gamma = \hbar \vec{k}$  et  $E = \hbar \omega$  et l'équation impulsion-énergie donnée par l'énoncé  $m_\gamma^2 c^4 + p_\gamma^2 c^2 = E^2$  pour obtenir :

$$k^2 + \frac{1}{\delta^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

- Le candidat trouvera par une inversion dépourvue d'initiative que les termes  $k^2$  et  $\omega^2$  s'identifient avec des dérivées spatiales et temporelles d'ordre deux, il sera sans doute plus « inspiré » pour trouver le dernier terme de l'équation de Klein-Gordon.

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{\delta^2} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

### 17) Des équations de Maxwell en H1 et H2

- En introduisant les termes complémentaires de l'énoncé nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{div} \vec{E} &= \frac{f}{\epsilon_0} \\ \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{F}}{\epsilon_0} \right) & \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

- Les expressions des potentiels découlent de  $\text{div} \vec{B} = 0$  et de  $\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , ces équations étant inchangées, leurs solutions le seront aussi, l'hypothèse H2 est donc compatible.
- On introduit les conditions de Jauge  $\vec{A} = \sigma_1 \vec{F}$  et  $f = \sigma_2 V$ . Leur compatibilité avec les axiomes de base ne fait aucun doute (on restreint l'espace des solutions). Ces conditions de Jauge ont toutefois pour objectif de permettre l'écriture des équations de propagation des potentiels sous une forme de Klein-Gordon, ce qu'aura compris le lecteur « inspiré » en identifiant  $\delta$  dans les paramètres demandés.

$$\text{div} \vec{E} = \frac{f}{\epsilon_0} = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{F}}{\epsilon_0} \right) = \overrightarrow{\text{Grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \left( \overrightarrow{\text{Grad}} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\vec{F}}{\epsilon_0} \right)$$

$$\text{Soit} \quad \begin{cases} \Delta V + \frac{f}{\epsilon_0} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) \\ \Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{F} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \overrightarrow{\text{Grad}} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) \end{cases}$$

On utilise la jauge de Lorentz  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = 0$

$$\text{Soit} \quad \begin{cases} \Delta V + \frac{f}{\epsilon_0} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \\ \Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{F} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \end{cases} \quad \text{à identifier à une forme } \Delta \vec{E} - \frac{1}{\delta^2} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{On en déduit} \quad \begin{cases} f = -\frac{\epsilon_0}{\delta^2} V = \sigma_2 V \\ \vec{A} = -\delta^2 \mu_0 \vec{F} = \sigma_1 \vec{F} \end{cases}$$

- Autre méthode : les équations de propagation s'obtiennent en combinant les quatre équations précédentes.

$$\text{or } \overrightarrow{\text{Rot}} (\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{Grad}} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{Grad}} \left( \frac{f}{\epsilon_0} \right) - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$$

$$\text{et } \overrightarrow{\text{Rot}} (\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{Grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E}) + \mu_0 \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{F} = -\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu_0 \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{F}$$

$$\text{On identifie avec Klein-Gordon} \quad \begin{cases} \frac{1}{\delta^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{Grad}} \left( \frac{f}{\epsilon_0} \right) \\ \frac{1}{\delta^2} \vec{B} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{F} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \mu_0 \delta^2 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \delta^2 \overrightarrow{\text{Grad}} \left( \frac{f}{\epsilon_0} \right) \\ \vec{B} = -\mu_0 \delta^2 \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{F} \end{cases}$$

$$\text{Soit} \quad \vec{A} = -\delta^2 \mu_0 \vec{F} \quad \text{et} \quad f = -\frac{\epsilon_0}{\delta^2} V = \sigma_2 V \quad \text{C.Q.F.D.}$$

### 18) Equation de conservation de la charge

- On exploite  $\text{div} \vec{j} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  qui s'écrira vu les transpositions de l'énoncé  $\text{div} \vec{F} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , or

$$\begin{cases} f = -\frac{\epsilon_0}{\delta^2} V \\ \vec{A} = -\delta^2 \mu_0 \vec{F} \end{cases}, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -c^2 \text{div} \vec{A}, \quad \text{qui est aussi la jauge de Lorentz.}$$

$$\text{Nous avons} \quad \chi = -c^2$$

### 19) Riemann-Silberstein

- On exploite  $\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{\Psi} = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} + jc \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + jc \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + jc \mu_0 \vec{F} = \frac{j}{c} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} + jc \mu_0 \vec{F}$

$$\text{et } \text{div} \vec{\Psi} = \text{div} \vec{E} + jc \text{div} \vec{B} = \frac{f}{\epsilon_0}$$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{\Psi} = \frac{j}{c} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} + jc \mu_0 \vec{F} \\ \text{div} \vec{\Psi} = \frac{f}{\epsilon_0} \end{cases}$$

- Développons 
$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{Rot}} \underline{\Psi}) = \overrightarrow{\text{Rot}} \left( \frac{j}{c} \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t} + jc\mu_0 \vec{F} \right) = \frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{Rot}} \underline{\Psi}) + jc\mu_0 \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{F}$$

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}}{\partial t^2} + \mu_0 \left( -\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + jc \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{F} \right)$$

et 
$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{Rot}} \underline{\Psi}) = \overrightarrow{\text{Grad}}(\text{div} \underline{\Psi}) - \Delta \underline{\Psi} = \overrightarrow{\text{Grad}}(f) - \Delta \underline{\Psi}$$

En remarquant que  $\overrightarrow{\text{Grad}} \left( \frac{f}{\epsilon_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = -\frac{\vec{E}}{\delta^2}$  et que  $\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{F} = -\frac{1}{\delta^2 \mu_0} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A}$

On en déduit 
$$\Delta \underline{\Psi} - \frac{1}{\delta^2} \underline{\Psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}}{\partial t^2}$$

- Pour les potentiels cf question 17.

## 20) Equation de dispersion

- On exploite  $\Delta \underline{\vec{A}} - \frac{1}{\delta^2} \underline{\vec{A}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{A}}}{\partial t^2}$  avec  $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp[j(\omega t - kz)]$ , soit  $k^2 + \frac{1}{\delta^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$  qu'on peut écrire sous la forme désirée 
$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec } \omega_p = \frac{c}{\delta}$$

## 21) Champ électrique et magnétique

- On exploite la conservation de la charge  $\frac{\partial V}{\partial t} = -c^2 \text{div} \underline{\vec{A}} = jc^2 \vec{k} \cdot \underline{\vec{A}} = jc^2 \vec{k} \cdot \underline{\vec{A}}_{//} \exp[j(\omega t - kz)]$   
Soit 
$$\underline{V} = c^2 \frac{\vec{k}}{\omega} \cdot \underline{\vec{A}}_{//} \exp[j(\omega t - kz)]$$
- On utilise les relations champ-potential  $\underline{\vec{B}} = \overrightarrow{\text{Rot}} \underline{\vec{A}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{A}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{A}}_{\perp} \exp[j(\omega t - kz)]$   
et  $\underline{\vec{E}} = -\overrightarrow{\text{Grad}} V - \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\vec{A}}) = j\omega \left[ \frac{c^2}{\omega^2} (\vec{k} \cdot \underline{\vec{A}}_{//}) \vec{k} - \underline{\vec{A}}_0 \right] \exp[j(\omega t - kz)] = j\omega \left[ \frac{c^2}{\omega^2} k^2 \underline{\vec{A}}_{//} - \underline{\vec{A}}_0 \right] \exp[j(\omega t - kz)]$   
$$\underline{\vec{E}} = -j\omega \left[ \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \underline{\vec{A}}_{//} + \underline{\vec{A}}_{\perp} \right] \exp[j(\omega t - kz)]$$
- Si  $\underline{\vec{A}}_{//} \neq \vec{0}$  le champ EM ne peut être transverse électrique, il sera par contre bien transverse magnétique.

## 22) Analyse OP

- L'onde progressive n'est possible que pour  $k^2 \in \mathbb{R}_+$ , soit  $\omega > \omega_p$ .
- La vitesse de phase vaut  $v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$ , elle n'est pas constante et est supérieure à c.

A ce stade, on peut en déduire que les différentes composantes d'un paquet d'onde se déplaceront à des vitesses différentes, et que le paquet se déformera donc.

- La vitesse de groupe eut été plus utile  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$ .

## 23) Masse du photon

- Vu l'écart temporel et la distance énorme, on se permet une étude « différentielle ».  
La vitesse de propagation utilisée est la vitesse de groupe qui traduit la vitesse de propagation de l'énergie.

$$\Delta t = \frac{D}{v_{g_r}} - \frac{D}{v_{g_b}} = \frac{D}{c} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_r}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_b}\right)^2}} \right] \approx \frac{D}{c} \frac{\omega_p^2}{2} \left[ \frac{1}{\omega_r^2} - \frac{1}{\omega_b^2} \right]$$

Soit 
$$\omega_p^2 \approx \frac{2c\Delta t}{D} \frac{\omega_r^2 \omega_b^2}{\omega_b^2 - \omega_r^2} \quad \omega_p = 7.3 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$$

- Or  $\omega_p = \frac{c}{\delta} \Rightarrow m_{\gamma} = \frac{\hbar \omega_p}{c^2} = 8.5 \cdot 10^{-43} \text{ kg}$

## 24) Portée de l'interaction électrique

- Equation du potentiel statique (Poisson) : usuellement  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$   
 Ici  $\Delta V + \frac{f}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta V - \frac{V}{\delta^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ , il nous faut donc résoudre  $\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV) - \frac{V}{\delta^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ .
- On résout l'équation précédente pour une sphère de densité uniforme et de rayon  $a$ , par exemple. On pose  $g = rV$ , l'équation s'écrit alors  $\frac{d^2}{dr^2} (g) = \frac{1}{\delta^2} g - \frac{\rho}{\epsilon_0} r$

Dans la zone de charge ( $\rho = Cste$ ), les solutions sont du type  $g(r) = rV = A e^{\frac{r}{\delta}} + B e^{-\frac{r}{\delta}} + \frac{\rho\delta^2}{\epsilon_0} r$

Hors zone de charge ( $\rho = 0$ ), les solutions sont du type  $g(r) = rV = A' e^{-\frac{r}{\delta}} + B' e^{\frac{r}{\delta}}$ .

Les conditions aux limites imposent  $B' = 0$ , soit  $V(r) = \frac{A'}{r} e^{-\frac{r}{\delta}}$

Le potentiel doit être borné au centre donc  $A = -B$  et  $V(r) = \frac{A}{r} \left( e^{-\frac{r}{\delta}} - e^{\frac{r}{\delta}} \right) + \frac{\rho\delta^2}{\epsilon_0} = \frac{2A}{r} sh\left(\frac{r}{\delta}\right) + \frac{\rho\delta^2}{\epsilon_0}$

On a la continuité du champ et du potentiel en  $r=a$ , on résout le système en  $A$  et  $A'$ .

On fait ensuite tendre  $a$  vers 0 et on maintient la charge totale, on montre alors « aisément » que  $A' \rightarrow \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ .

Une singularité de charges (une charge ponctuelle) a donc un potentiel qui s'exprime sous la forme :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\delta}}$$

- Le champ créé par une charge ponctuelle s'obtient par  $\vec{E} = -\overrightarrow{Grad} V - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}) = -\overrightarrow{Grad} V$   
 Soit  $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta+r}{\delta r^2} e^{-\frac{r}{\delta}} \vec{e}_r$
- Vu la décroissance exponentielle en  $\delta$ , l'interaction électrique a une portée de quelque  $\delta$ . Cette dernière étant effective à grande distance, on en conclut que soit  $\delta$  est très grand, c'est-à-dire  $m_\gamma$  très petit... soit que l'hypothèse d'un photon de masse non nulle n'est crédible que dans un autre univers, certainement un peu plus éthéré.

**Fin de la partie II**  
**Fin du corrigé**