Corrigé de Laurent BEAU (Lycée de Kerichen. Brest) laurent.beau@prepas.org

N'hésitez pas à me signaler des erreurs ou à me suggérer des commentaires ou des réponses plus "élégantes". Merci.

DE LA TERRE A LA LUNE

Une odyssée problématique de l'espace

A - Préliminaires

1. On néglige la rotation propre de la Terre donc le poids μg d'un objet de masse μ à la surface de la Terre est la force gravitationnelle terrestre $\frac{G\mu M_T}{R_T^2}$. Il vient ainsi :

$$\boxed{g = \frac{GM_T}{R_T^2}}$$

On peut vérifier numériquement. Avec les données de l'énoncé, on trouve $\frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}79\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la Lune s'écrit : $m\boldsymbol{a}(L) = -\frac{GM_T m}{d^2}\boldsymbol{e_r}$. L'orbite lunaire est circulaire autour du centre de la Terre donc la force gravitationnelle s'exerçant sur la Lune (et donc l'accélération) est normale à la trajectoire. La norme de l'accélération est alors : $\frac{v^2}{d} = d\left(\frac{2\pi}{T_T(d)}\right)^2$. On en déduit :

$$\boxed{T_T(d) = \frac{2\pi d^{3/2}}{(GM_T)^{1/2}}} \text{ ou } \boxed{T_T(d) = \frac{2\pi R_T^{1/2}}{g^{1/2}}\left(\frac{d}{R_T}\right)^{3/2}}$$

Application numérique : **$T_T(d)$ = 27,39 jours** à comparer aux 27,42 jours donnés en fin d'énoncé (0,3% d'écart).

B - En négligeant la gravitation lunaire

2. L'énergie mécanique totale $E = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{GM_T\mu}{x} = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{gR_T^2\mu}{x}$ se conserve car le corps n'est soumis qu'à l'attraction terrestre.

3. L'énergie mécanique se conservant : $E = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{gR_T^2\mu}{R_T}$ en notant v_0 la vitesse initiale du boulet. Pour atteindre l'infini, il faut que la vitesse soit non nulle pour $x \to +\infty$ c'est-à-dire que l'énergie mécanique totale du boulet soit positive ce qui impose, : $v_0 \geq V_\infty$ où

$$\boxed{V_\infty = \sqrt{2gR_T}}$$

Application numérique: **V_∞ = 11,2 km.s^{-1}**

4. Exprimons la conservation de l'énergie entre le point de départ $x = R_T$, $v = V(D)$ et le point où la vitesse s'annule $x = D$, $v = 0$:

$$\frac{1}{2}\mu V(D)^2 - \frac{\mu g R_T^2}{R_T} = 0 - \frac{\mu g R_T^2}{D}$$

On trouve:

$$\boxed{V(D) = \sqrt{2gR_T}\left(1 - \frac{R_T}{D}\right)^{1/2}}$$

On retrouve bien $V(D) = 0$ si $D = R_T$ et $V(D) = V_\infty = \sqrt{2gR_T}$ si $D \to +\infty$

5. Récrivons la conservation de l'énergie entre le point de départ $x = R_T$, $v = V(D)$ et le point x , v :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{gR_T^2\mu}{x} = 0 - \frac{gR_T^2\mu}{D}$$

ce qui donne:

$$\boxed{\dot{x}^2 = 2gR_T^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{D}\right)}$$

Dans cette équation, posons $x(t) = D\sin^2[\psi(t)]$ c'est-à-dire $\dot{x}(t) = 2D\dot{\psi}(t)\sin[\psi(t)]\cos[\psi(t)]$.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{D} = \frac{1}{D}\left(\frac{\cos[\psi(t)]}{\sin[\psi(t)]}\right)^2$$

Après simplifications (avec cos[$\psi(t)$] différent de $\pi/2$), on obtient :

$$\dot{\psi}(t)\sin^2[\psi(t)] = \left(\frac{gR_T^2}{2D^3}\right)^{1/2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{T_T(D)}$$

Seule la solution où $\dot{\psi}(t) > 0$ a été conservée puisque $x(t)$ est croissante (donc $\psi(t)$ également et $0 \le \psi(t) \le \pi/2$ puisque $0 \le x(t) \le D$)

En intégrant entre t = 0 et t, on a bien $\boxed{t = T_T(D)f(\psi)}$ où , en posant $\chi(\psi) = \psi - \frac{1}{2}\sin(2\psi)$

$$\boxed{f(\psi) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{\psi(0)}^{\psi(t)}\sin^2(u)\,du = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}[\chi(\psi)-\chi(\psi_0)]}$$

A t = 0, $x(0) = R_T = D\sin^2[\psi_0]$ donc $\boxed{\sin^2(\psi_0) = \frac{R_T}{D}}$

6. Le temps τ mis pour atteindre le point D est tel que $x(\tau) = D$ soit $\psi(\tau) = \pi/2$.

   Il vient donc $\boxed{\tau = \frac{T_T(D)}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\chi(\psi_0)\right) = \frac{T_T(D)}{4\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{\pi}\chi(\psi_0)\right)}$

7. On lance le boulet avec la vitesse initiale $V(d)$ comme si on voulait lui faire atteindre le centre de la Lune avec une vitesse nulle. ψ_0 vérifie donc $\sin^2(\psi_0) = \frac{R_T}{d} = 1{,}66.10^{-2} \ll 1$. On peut donc faire l'approximation $\psi_0 \approx \left(\frac{R_T}{d}\right)^{1/2}$ et $\boxed{\chi(\psi_0) \approx \frac{2}{3}\left(\frac{R_T}{d}\right)^{3/2}}$.

   La durée de voyage du boulet jusqu'à la surface lunaire est $\boxed{\tau_1 = T_T(d)f(\psi_1)}$ où $\psi_1 = \psi(\tau_1)$ vérifie $\sin^2(\psi_1) = \frac{x(\tau_1)}{d} = 1-\frac{r}{d}$.

   $\frac{r}{d} \ll 1 \Rightarrow \sin^2(\psi_1) \approx 1$ donc ψ_1 est proche de $\pi/2$.

   Posons $\psi_1 = \pi/2 - u$ où $u \ll 1$; il vient donc $\sin^2(\psi_1) = 1-\cos^2(\psi_1) = 1-\frac{r}{d}$ donc $\cos(\psi_1) = \left(\frac{r}{d}\right)^{1/2}$ et ensuite $\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = \sin(u) \approx u \Rightarrow u \approx \left(\frac{r}{d}\right)^{1/2}$.

   On en déduit $\chi(\psi_1) = \psi_1 - \frac{1}{2}\sin(\psi_1) \approx \frac{\pi}{2} - u - \frac{1}{2}\sin(2u) \approx \frac{\pi}{2} - 2u \Rightarrow \boxed{\chi(\psi_1) \approx \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{4}{\pi}\left(\frac{r}{d}\right)^{1/2}\right)}$

   Conclusion : $\tau_1 = \frac{T_T(d)}{2\pi\sqrt{2}}(\chi(\psi_1)-\chi(\psi_0)) \Rightarrow \boxed{\tau_1 \approx \frac{T_T(d)}{4\sqrt{2}}\left(1-\frac{4}{\pi}\left(\frac{r}{d}\right)^{1/2} - \frac{4}{3\pi}\left(\frac{R_T}{d}\right)^{3/2}\right)}$

   L'application numérique donne **τ_1 = 4,42 jours**

   Au point d'impact, $x = d - r$. La vitesse du boulet à l'arrivée sur la Lune est donc

$$\dot{x} = \sqrt{2gR_T^2}\left(\frac{1}{d-r}-\frac{1}{d}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{v_{\text{impact}} = \sqrt{2gR_T^2}\left(\frac{r}{(d-r)d}\right)^{1/2}}$$

Application numérique : **v_{impact} = 97,2 m.s^{-1}**

8. Pendant la durée τ_1, la Lune parcourt sur son orbite circulaire autour de la Terre, l'angle θ_1 tel que

$$\boxed{\theta_1 = 2\pi\frac{\tau_1}{T_T(d)}}$$

Application numérique : **θ_1 = 58°** proche des 64° donnés par Jules Verne (10% d'écart relatif)

C - Avec la gravitation lunaire

9. La position du point d'équigravité est définie par $\frac{GM_T}{\xi^2} = \frac{Gm}{(d-\xi)^2}$ ce qui donne :

$$\boxed{\xi = \frac{d}{1+\left(\frac{m}{M_T}\right)^{1/2}}}$$

Application numérique : ξ = 345600 km (avec la précision de d !) mais vu le nombre de chiffres significatifs de m et M_T, on écrira plutôt : **ξ = 3,46.10^5 km**

Si le boulet atteint ce point d'équigravité, il passera dans la zone où la force d'attraction lunaire est plus forte que la force d'attraction terrestre : il atteindra alors obligatoirement la Lune.

Ce point d'équigravité n'est pas fixe car le système Terre-Lune bouge. Il ne correspond donc pas à un point d'équilibre du point de vue dynamique.

10. En tenant compte de l'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle lunaire, l'énergie mécanique totale du boulet s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM_T\mu}{x} - \frac{Gm\mu}{d-x} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{gR_T^2\mu}{x} - \frac{m}{M_T}\frac{gR_T^2\mu}{d-x}$$

Cette énergie est conservative car le boulet n'est soumis qu'aux attractions lunaire et terrestre, elle s'écrit donc aussi en tenant compte des conditions initiales :

$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{gR_T^2\mu}{R_T} - \frac{m}{M_T}\frac{gR_T^2\mu}{d-R_T}$$

On obtient alors :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = gR_T\left[\frac{R_T}{x} - 1 + \frac{m}{M_T}\left(\frac{R_T}{d-x} - \frac{R_T}{d-R_T}\right)\right]}$$

Cette équation est « l'intégrale de l'équation des forces vives » que nous appelons intégrale première du mouvement obtenue en intégrant le principe fondamental de la dynamique (« équation des forces vives »).

Parmi les 4 termes entre crochets, $\frac{R_T}{x} \approx 1{,}84.10^{-2}$, $\frac{m}{M_T}\frac{R_T}{d-\xi} \approx 2{,}05.10^{-3}$ et $\frac{m}{M_T}\frac{R_T}{d-R_T} \approx 2{,}09.10^{-4}$ en faisant l'évaluation pour $x = \xi$.

Numériquement, on trouve **$V(\xi)$ = 11,07 km.s^{-1}**

Remarque : en faisant $D = \xi$ dans la réponse à la question 4, on trouve $\sqrt{2gR_T}\left(1-\frac{R_T}{\xi}\right)^{1/2} = 11{,}08$ km.s^{-1} qui est légèrement plus élevée que $V(\xi)$ trouvée à cette question. Ceci est logique car en tenant compte de l'attraction lunaire, on doit lancer moins vite le boulet au départ pour qu'il atteigne la Lune. Les deux valeurs sont néanmoins très proches car tant que $x < \xi$, l'attraction terrestre est prépondérante.

11. Par définition, le rayon de la sphère d'influence de la Terre par rapport au Soleil est tel que :

$$\frac{GM_T}{R_{SI}^2} = \frac{GM_S}{(d_{TS} - R_{SI})^2} \quad \text{(notations transparentes)}$$

On en déduit :

$$R_{SI} = \frac{d_{TS}}{1+\left(\frac{M_S}{M_T}\right)^{1/2}} \approx d_{TS}\left(\frac{M_T}{M_S}\right)^{1/2}$$

Numériquement : **R_{SI} = 2,59.10⁵ km** < d donc selon ce modèle, la lune est un astéroïde solaire... !

12. La durée τ_2 du trajet Terre-Lune peut s'écrire : $\tau_2 = \tau_{2T} + \tau_{2L}$ où τ_{2T} (resp. τ_{2L}) est la durée du trajet surface de la Terre-E (resp. la durée du trajet E-surface de la Lune).

La durée τ_{2L} est également la durée du trajet surface de la Lune-E (la durée de « montée » ou de « descente » est la même, les équations du mouvement étant invariantes par renversement du temps.

D'après la réponse à la question 6 : $\tau_{2T} = \frac{T_T(\xi)}{4\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{\pi}\chi(\psi_{0T})\right)$ et $\tau_{2L} = \frac{T_L(d-\xi)}{4\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{\pi}\chi(\psi_{0L})\right)$ où $\sin^2[\psi_{0T}] = \frac{R_T}{\xi}$ et $\sin^2[\psi_{0L}] = \frac{r}{d-\xi}$.

D - Résistance de l'air

13. Le principe fondamental de la dynamique projeté sur la trajectoire rectiligne du boulet donne :

$$\mu\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kV^2$$

Multiplions par $\frac{\mathrm{d}t}{V}$, il vient : $\mu\frac{\mathrm{d}V}{V} = -kV\mathrm{d}t = -k\mathrm{d}x$. En intégrant entre la surface de la Terre et la sortie de l'atmosphère, on obtient :

$$\ln\left(\frac{V_Y}{v_0}\right) = -\frac{k}{\mu}Y \text{ c'est-à-dire } \boxed{\frac{V_Y}{v_0} = \exp\left(-\frac{kY}{\mu}\right)}$$

Numériquement : **V_Y/v_0 = 0,819** soit plus de 20% d'écart avec la valeur 2/3 donnée par BARBICANE. Le modèle est donc à affiner (cf. question suivante).

Il est cohérent de négliger la pesanteur puisque kV^2 est de l'ordre de 10^7 N (en prenant V de l'ordre de 10 km/s ce qui l'ordre de grandeur ici) alors que le poids du boulet est de 10^5 N.

14. Un modèle moins fruste tenant compte de la variation de la densité de l'atmosphère aboutit à l'équation :

$$\mu\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -AV^2\exp(-qy)$$

Multiplions à nouveau par $\frac{\mathrm{d}t}{V}$: $\mu\frac{\mathrm{d}V}{V} = -A\exp(-qy)\mathrm{d}y$. En intégrant entre la surface de la Terre et un point d'altitude y, on obtient :

$$\boxed{v = v_0\exp\left(\frac{A}{q\mu}[\exp(-qy)-1]\right)}$$

A la sortie de l'atmosphère terrestre, on veut $v(Y) = V_\infty$. Il faut donc :

$$\boxed{v_0 = V_\infty\exp\left(-\frac{A}{q\mu}[\exp(-qY)-1]\right)}$$

On trouve alors **v_0 = 16,8 km.s⁻¹** ce qui représente bien cette fois-ci $\frac{V_Y}{v_0} = \frac{2}{3}$.

15. D'après le théorème de l'énergie cinétique, le travail de la force résistante est :

$$W = \frac{1}{2}\mu\left(V_\infty^2 - v_0^2\right)$$

Une fraction η de ce travail est transformé en énergie thermique :

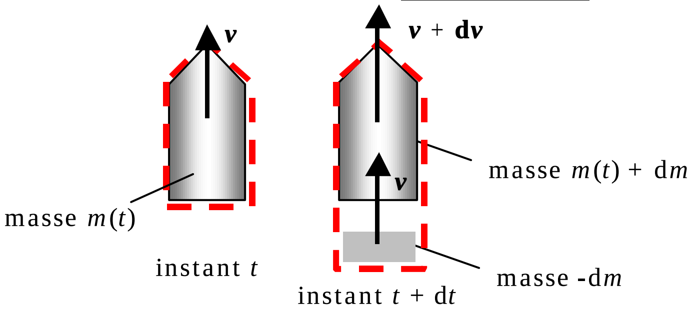
$\eta|W| = \int_{T_i}^{T_f} \mu c \,\mathrm{d}T = \frac{\mu a}{2}\left(T_f^2 - T_i^2\right) \approx \frac{\mu a}{2} T_f^2$ car l'échauffement est important (on le vérifiera dans l'application numérique qui suit).

On en déduit $\boxed{T_f \approx \sqrt{\frac{\eta\left(v_0^2 - V_\infty^2\right)}{a}}}$

A.N : **T_f = 12.10³ K** ce qui correspond à l'échauffement du boulet. Aucun matériau ne résiste à une telle température.

16. L'énergie nécessaire à vaporiser une masse dm de matériau est $\lambda \mathrm{d}m$. Cette énergie est fournie par la fraction η du travail élémentaire de la force résistante entre t et t + dt : $-\eta R v \mathrm{d}t$:

$$\boxed{\lambda \mathrm{d}m = -\eta R v \mathrm{d}t}$$



A l'instant t, la quantité de mouvement du système entouré ci-dessus est

$$\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v}$$

A l'instant t + dt, la quantité de mouvement du système entouré ci-dessus est

$$\boldsymbol{p}(t+\mathrm{d}t) = (m + \mathrm{d}m)(\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}) + (-\mathrm{d}m)\boldsymbol{v}$$

On en déduit donc la variation de quantité de mouvement de ce *système fermé* :

$$d\boldsymbol{p} = (m + \mathrm{d}m)\mathrm{d}\boldsymbol{v} \approx m(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} \quad \text{au premier ordre}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système fermé s'écrit $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{R} = -Av^2 \exp(-qy)\frac{\boldsymbol{v}}{v}$

On obtient donc le système différentiel suivant :

$$\boxed{\begin{cases} v(t) = \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dm}{dt} = -\dfrac{\eta}{\lambda} A v^3 \exp(-qy) \\ m(t)\dfrac{dv}{dt} = -Av^2 \exp(-qy) \end{cases}}$$

E - Canon et poudre

17. La masse de poudre $\rho S X_0$ se transformant intégralement en gaz de masse $N M_a$:

$$\boxed{N = \frac{\rho S X_0}{M_a}}$$

18. La pression du gaz étant nettement plus élevée que la pression atmosphérique, la force de poussée s'écrit PS où P est la pression du gaz $P = \frac{NRT}{x}$.

Le théorème de la résultante cinétique appliqué au boulet donne

$$\mu\frac{dv}{dt} = PS = \frac{NRT}{x}$$

Multiplions par $vdt = dx$: $\mu v dv = NRT\frac{dx}{x}$ qui donne en intégrant entre le départ et la sortie du canon (vitesse de sortie W) :

$$\boxed{\frac{1}{2}\mu W^2 = NRT\ln\left(\frac{X}{X_0}\right) = \frac{\rho SRT}{M_a}X_0\ln\left(\frac{X}{X_0}\right)}$$

19. En posant $X_1 = \frac{M_a\mu W^2}{2\rho SRT}$, l'équation précédente devient $X = X_0\exp\left(\frac{X_1}{X_0}\right)$. La longueur X du canon est minimale quand $\frac{dX}{dX_0} = 0$. On trouve $\boxed{X_0 = X_1 = \frac{M_a\mu W^2}{2\rho SRT}}$ et donc $\boxed{X = X_0\, e}$

A.N : ***X*₀ = 84,9 m** et ***X* = 231 m**

20. Cette fois-ci, le gaz suit une évolution polytropique $PV^\alpha = C^{te}$ c'est-à-dire $Px^\alpha = P_0X_0^\alpha = \frac{NRT}{SX_0}X_0^\alpha$.

On reprend le calcul de la question 18 en remplaçant $PS = \frac{NRT}{x}$ par $PS = \frac{NRT}{x^\alpha}X_0^{\alpha-1}$:

$\mu v dv = NRTX_0^{\alpha-1}\frac{dx}{x^\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2}\mu W^2 = \frac{NRT}{1-\alpha}X_0^{\alpha-1}\left[X^{1-\alpha} - X_0^{1-\alpha}\right]$ qui devient

$\boxed{X_0\left(\left(\frac{X}{X_0}\right)^{1-\alpha} - 1\right) = (1-\alpha)X_1}$ (cf. question 19 pour l'expression de X_1)

qu'on peut encore écrire $X^{1-\alpha} - X_0^{1-\alpha} = (1-\alpha)X_1X_0^{-\alpha}$

Différentions cette expression : $(1-\alpha)\left(X^{-\alpha}dX - X_0^{-\alpha}dX_0\right) = -\alpha(1-\alpha)X_1X_0^{-\alpha-1}dX_0$.

La longueur X du canon est minimale quand $\frac{dX}{dX_0} = 0$. On trouve $\boxed{X_0 = \alpha X_1 = \alpha\frac{M_a\mu W^2}{2\rho SRT}}$ (remarquons qu'on retrouve le résultat de la question 19 en faisant α = 1 ce qui est rassurant...).

On en déduit en remplaçant αX_1 par X_0 dans $X^{1-\alpha} - X_0^{1-\alpha} = (1-\alpha)X_1X_0^{-\alpha}$ que

$$\boxed{X = X_0\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

A.N : ***X*₀ = 170 m** et ***X* = 340 m**

Le modèle de l'évolution isotherme du gaz donne donc un résultat plus proche des valeurs proposées par BARBICANE que l'évolution polytropique avec α = 2.

21. Considérons l'accélération du boulet constante $a = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ donc $\frac{1}{2}v_0^2 - 0 = a(X - X_0) = aX_a$:

$$\boxed{a = \frac{v_0^2}{2X_a}}$$

A.N : **a = 6,3.10⁵ m.s⁻²** soit **6,3.10⁴ *g* ! ! !** (6300 fois l'accélération maximale à laquelle résiste un être humain).

Aucun dispositif ou équipement ne permet de survivre à une telle accélération (même les combinaisons « anti-g » équipant les pilotes d'avions militaires comprimant les membres inférieurs pour refouler le sang vers le haut du corps, le cerveau en particulier).

F - Retour sur la sphère d'influence

22. Les équations du mouvement de la Terre, de la Lune et du boulet sont respectivement :

$$M_T\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}_T}{\mathrm{d}t^2}=G\left(\frac{M_T\,m}{r_{TL}^3}\boldsymbol{r}_{TL}+\frac{M_T\mu\boldsymbol{r}_{TB}}{r_{TB}^3}\boldsymbol{r}_{TB}\right)\quad(1)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}_L}{\mathrm{d}t^2}=G\left(\frac{m\,M_T}{r_{TL}^3}\boldsymbol{r}_{LT}+\frac{\mu m}{r_{LB}^3}\boldsymbol{r}_{LB}\right)\quad(2)$$

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}_B}{\mathrm{d}t^2}=G\left(\frac{\mu M_T}{r_{TB}^3}\boldsymbol{r}_{BT}+\frac{\mu m}{r_{LB}^3}\boldsymbol{r}_{BL}\right)\quad(3)$$

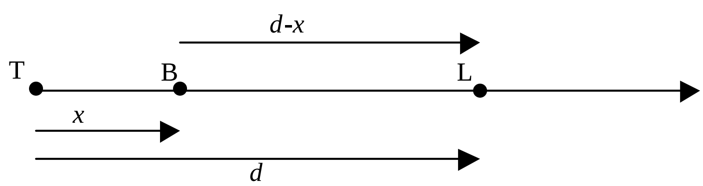
$M_T(3)-\mu(1)$ donne :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{TB}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{G(M_T+\mu)}{r_{TB}^3}\boldsymbol{r}_{TB}=-Gm\left[\frac{\boldsymbol{r}_{TL}}{r_{TL}^3}+\frac{\boldsymbol{r}_{LB}}{r_{LB}^3}\right]}$$

23. La permutation des indices T et L et des masses M_T et m mène à $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{LB}}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{P}_T$ avec

$$\boxed{\boldsymbol{A}_L=\frac{G(m+\mu)}{r_{LB}^3}\boldsymbol{r}_{LB}}\ \text{et}\ \boxed{\boldsymbol{P}_T=-GM_T\left(\frac{\boldsymbol{r}_{TB}}{r_{TB}^3}+\frac{\boldsymbol{r}_{LT}}{r_{LT}^3}\right)}$$

24. Prenons la situation où Lune, boulet et Terre sont alignés.



Algébriquement $P_T=GM_T\left(\frac{1}{d^2}-\frac{1}{x^2}\right)$ et $A_L=-\frac{G(m+\mu)}{(d-x)^2}$.

On en déduit $\boxed{\rho_T=\left|\frac{P_T}{A_L}\right|=\frac{1}{\varepsilon^2}(1-u^2)\left(\frac{1}{u}-1\right)^2=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{u^2}-1\right)(1-u)^2}$ en posant $u=\frac{x}{d}$

De même, on aboutit à $\boxed{\rho_L=\left|\frac{P_L}{A_T}\right|=\varepsilon^2u^2\left(\frac{1}{(1-u)^2}-1\right)}$

On vérifie aisément que $\boxed{\rho_T(u,\varepsilon^2)=\rho_L\left(1-u,\frac{1}{\varepsilon^2}\right)}$

Au point d'équigravité, $\xi=\frac{d}{1+\varepsilon}\Rightarrow u=\frac{\xi}{d}=\frac{1}{1+\varepsilon}=0{,}9$ et $1-u=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}=0{,}1$

On trouve $\rho_T=1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}$ et $\rho_L=1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}$

A.N : **ρ_T = 0,19** et **ρ_L = 0,99** (ce qu'on vérifie graphiquement).

25. La formule de Tisserand donnée dans l'énoncé est sûrement erronée. En effet, considérons que $\varepsilon \ll 1$ (rappelons que $\varepsilon = 1/9$) et donc que la valeur de u correspondant à la séparatrice est proche de 1 :

$\rho_T = \rho_L \Leftrightarrow \left(1-u^2\right)\left(1-u\right)^4 = \varepsilon^4 u^5 \left(2-u\right)$ devient $\left(1-u\right)^5 \approx \dfrac{\varepsilon^4}{2}$ c'est-à-dire

$$1-u \approx \left(\frac{\varepsilon^4}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

donc le rayon de la sphère d'influence de la Lune :

$$\boxed{r_I\left(L\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{m}{M_T}\right)^{\frac{2}{5}} d}$$

Avec ce résultat, on trouve un rayon de **$0{,}150d$ = $57{,}6.10^3$ km**

Avec la formule de l'énoncé, on trouve un rayon de **$0{,}172d$ = $66{,}2.10^3$ km**

alors que l'analyse de la figure 4 (et non figure 3 comme le propose l'énoncé…) donne $\rho_T = \rho_L$ pour $u = 0{,}865$ soit $r_I(L) = 0{,}135d = 51{,}8.10^3$ km.

L'écart relatif est de 11% avec la formule rectifiée et de 27% avec la formule de l'énoncé.

* * *
* *
*