ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴷ ⵓⵙⵓⵎⵓⵏ ⴰⵙⵏⴼⴰⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⴽⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

Royaume du Maroc
Ministère de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle,
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Département de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ENSIAS

جامعة محمد الخامس بالرباط
Université Mohammed V de Rabat

CNC 2020

CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Épreuve de **Physique**

Filières : **MP**

Durée **4 heures**

Cette épreuve comporte **6pages** au format A4, en plus de la page de garde
La calculatrice est autorisée

• On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les numéros des questions abordées.

• Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.

• Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Les différentes parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.

• *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé ou un oubli, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Oscillations. Couplages

On parle d'oscillations de grandeurs physiques lorsque celles-ci varient périodiquement ; elles sont décrites par les mêmes équations quelle qu'en soit leur nature (mécanique, électrique, etc.). Dans certaines situations les oscillations temporelles peuvent aussi se propager dans l'espace. Lorsque des grandeurs physiques quelconques sont interdépendantes, on dit qu'elles sont couplées : c'est le cas lorsqu'on a des liaisons entre oscillateurs (mécaniques, électriques, ...), et on peut alors avoir des transferts énergétiques.

Données

• Il peut être commode d'utiliser la notation complexe ; ainsi à une grandeur sinusoïdale fonction du temps $f(t) = F_0.cos(\omega t + \varphi)$, on associe le complexe souligné $\underline{f}(t) = F_0.e^{j.(\omega t+\varphi)}$, où $j^2 = -1$, et tel que $f(t)$ représente sa partie réelle : $f(t) = Re(\underline{f}(t))$; et on notera son conjugué par $\underline{f}^*$.

• On pourra noter par $\dot{f}(t)$ et $\ddot{f}(t)$ les dérivées temporelles première et seconde d'une fonction $f(t)$.

• Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est uniforme, vertical, descendant et de module $g = 9,8 m.s^{-2}$.

Exercice : le pendule simple (barème : 4 points sur 20)

On considère un pendule simple ponctuel M, de masse m, attaché à l'extrémité d'un fil souple, inextensible, de longueur l et dont l'extrémité O est fixe ; on étudie le mouvement relativement au référentiel terrestre $R(OXYZ)$ supposé galiléen et on utilisera la base cylindrique $\{\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z\}$. Le mouvement de M a lieu dans le plan XOY vertical, sa position est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{OM})$, et le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = l.\overrightarrow{u}_r$: voir figure 1.

A l'instant initial $t = 0$, le pendule a été écarté d'un angle θ_0 puis abandonné sans vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0(t = 0) = 0$.

On néglige tout frottement. On posera $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

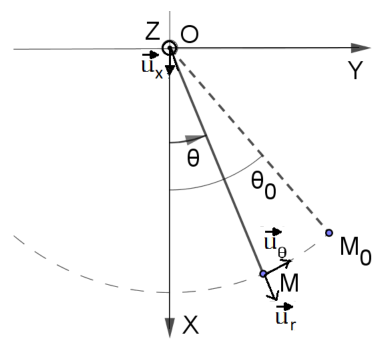

Figure 1 – Pendule simple

1. Exprimer, dans la base polaire, les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}_{M/R}$ et accélération $\overrightarrow{a}_{M/R}$.
2. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(\theta)$, on prendra $E_p(\theta = 0) = 0$.
3. Exprimer, en fonction de θ et de ses dérivées, l'énergie mécanique E_m de M.
4. Déterminer, par la méthode de votre choix, l'équation différentielle vérifiée par θ.
5. Cas de petits mouvements : θ petit, $sin(\theta) \approx \theta$, l'énergie mécanique est notée par $E_{m,0}$. Déterminer l'équation horaire $\theta(t)$ et donner l'expression de la période T_0 du mouvement.

6. Mouvements d'élongation angulaire θ_0 non petite ; on notera l'énergie mécanique par $E_{m,1}$.

   6.1 Exprimer $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ et des données. Établir l'expression donnant la période : $T_1 = T_0.I(\theta_0)$, où $I(\theta_0)$ est une intégrale qu'on explicitera sans la calculer.

   6.2 On s'interesse à une autre méthode de calcul de la période. Pour cela, montrer qu'on peut écrire l'équation du mouvement sous la forme : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}.s(\theta).\theta = 0$, expliciter la fonction $s(\theta)$ et donner l'allure de son graphe pour $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$.

   6.3 Pour des élongations moyennes on peut approximer $s(\theta)$ par le nombre $s(\theta_0) > 0$. En posant $g_{eff} = g.s(\theta_0)$, donner l'expression de la nouvelle période T_1'.

   6.4 A l'aide d'un développement limité, exprimer la période T_1' en fonction de θ_0 et de T_0. On prendra $sin(\theta) \simeq \theta - \frac{1}{6}\theta^3$.

7. Pour avoir un mouvement circulaire complet, de rayon l, on doit lancer le pendule, en θ_0, avec une vitesse initiale $v_0 \geq v_{0,m} > 0$; son énergie mécanique est notée $E_{m,2}$.
   Dans le cas $v_0 = v_{0,m}$, expliquer, sans calculs, les conditions vérifiées par la vitesse $\|\overrightarrow{v}(\theta = \pi)\|$ et par la tension $\|\overrightarrow{T}(\theta = \pi)\|$.

8. Représenter sur un même graphe les allures des portraits de phase pour les mouvements d'énergies mécaniques $E_{m,0}$, $E_{m,1}$ et $E_{m,2}$.

Problèmes : oscillations ; couplages (barème : 16 points sur 20)

I^{er} problème : des pendules ... pas si simples

I.1. Le pendule de Foucault

On considère le référentiel terrestre $R_t(OXYZ)$ non galiléen, muni de la base cartésienne $\{\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z\}$. Dans ce référentiel, on étudie le mouvement des petites oscillations d'un pendule simple constitué d'une masse m suspendue à l'extrémité M d'un fil de longueur l dont l'autre extrémité est fixe en $O' \in OZ$, $OO' = h > l$; le point O a pour latitude λ. On notera par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$, respectivement, la vitesse et l'accélération du mobile dans R_t. À t=0, on a : $\overrightarrow{OM}(t = 0)(x_0, y_0 = 0, z_0)$ et $\overrightarrow{v}(t = 0)(\dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0)$. Le référentiel R_t tourne par rapport au référentiel géocentrique galiléen $R_g(O_0X_0Y_0Z_0)$ avec le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\,\overrightarrow{u}_{z_0}$, et $\Omega = \frac{2\pi}{T_j} = 7,27.10^{-5} rad.s^{-1}$: voir figure 2. On note $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur. Pour les applications numériques, on prendra $l = 20m$, $m = 25kg$, $\lambda = \frac{\pi}{6}$, l'amplitude initiale $\theta_0 = \frac{\pi}{20}$; et on a $sin\theta \approx \theta$.

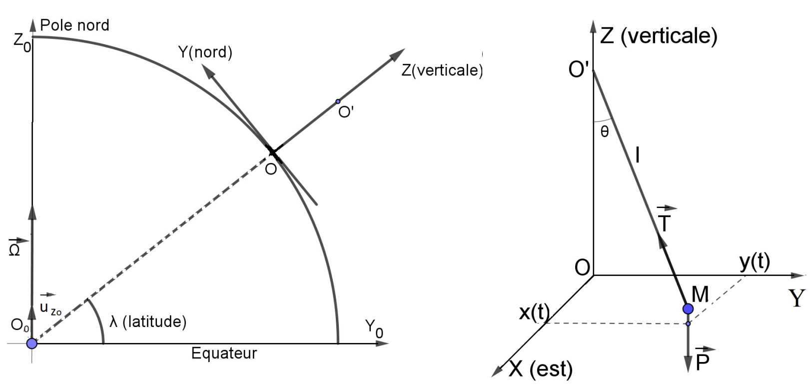

Figure 2 – Pendule de Foucault dans le référentiel Terrestre

I.1.1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ dans la base cartésienne et en déduire l'expression de la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{F}_{ic} = -2.m.\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$.

I.1.2. Proposer une estimation de la quantité $\varepsilon = \frac{\|\overrightarrow{F}_{ic}\|}{\|m.\overrightarrow{g}\|}$.

I.1.3. Dans le référentiel terrestre, le principe fondamental de la dynamique P.F.D s'écrit :
$m.\overrightarrow{a} = -m.g.\overrightarrow{u}_z + T.\frac{\overrightarrow{MO'}}{l} + \overrightarrow{F}_{ic}$.
Expliquer pourquoi la force d'inertie d'entrainement n'apparait pas explicitement dans cette expression du P.F.D.

I.1.4. Donner et justifier les approximations conduisant à supposer que le mouvement s'effectue dans le plan XOY, et qu'il est régi par le système d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} (1) : \ddot{x} = -\frac{g}{l}.x + 2\,\Omega.sin\lambda.\dot{y} \\ (2) : \ddot{y} = -\frac{g}{l}.y - 2\,\Omega.sin\lambda.\dot{x} \end{cases}$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T_0}$, $\Omega' = \Omega.sin\lambda$ et on introduit la variable complexe : $\underline{u} = x + j.y$, $j^2 = -1$.

I.1.5. Évaluer $\varepsilon' = \frac{\Omega}{\omega_0}$, et commenter.

I.1.6. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{u}$. Montrer que la solution peut être explicitée sous la forme $\underline{u} = e^{-j\Omega' t}.(\underline{\alpha}.e^{j\omega t} + \underline{\beta}.e^{-j\omega t})$, où $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ sont deux constantes complexes ; que vaut ω ?

I.1.7. Déterminer les expressions approchées de $x(t)$ et $y(t)$.

I.1.8. À l'aide du logiciel Python, on a simulé la trajectoire en prenant $\Omega' = \frac{\omega_0}{10}$; on obtient la trajectoire représentée en figure 3.

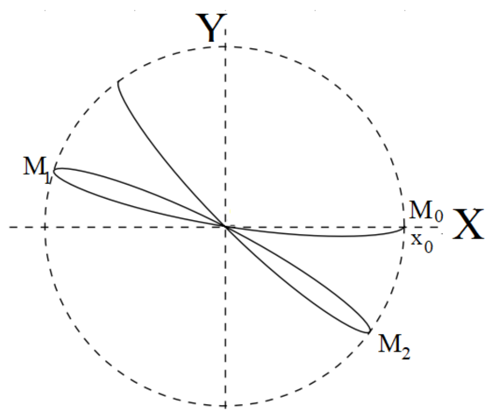

Figure 3 – Simulation de trajectoire du pendule de Foucault dans le plan horizontal terrestre

I.1.8.1. Exprimer la durée τ de la simulation en fonction de la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

I.1.8.2. Exprimer, en fonction de T, les instants t_1 et t_2 correspondant aux positions respectives du mobile $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$. Déterminer l'angle φ de rotation du vecteur $\overrightarrow{OM}$, pendant la durée T, en fonction des données.

I.1.8.3. Déterminer la période T_F d'oscillation du plan du pendule et le sens d'oscillation .

I.1.9. Expliquer et décrire qualitativement le mouvement observé du plan du pendule à l'équateur où $\lambda_e = 0$; et aux pôles nord et sud de latitudes respectives $\lambda_{pn} = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda_{ps} = -\frac{\pi}{2}$.

I.2. Botafumeiro ; pendule de longueur variable.

Le Botafumeiro est un encensoir d'une église, suspendu à une corde dont on fait varier convenablement la longueur, et qui effectue des oscillations d'amplitudes de plus en plus grandes ; c'est le cas aussi des balancements d'un acrobate, ou d'un enfant, sur une balançoire.
Par contre les balancements d'un objet suspendu au câble d'une grue sont à éviter, car ils peuvent être dangereux (industrie, bâtiment, etc.) .

On peut modéliser ces situations à l'aide d'un pendule formé d'un point M de masse m suspendu à un fil dont la longueur l passe instantanément de la valeur $l_0(1+\alpha)$ à la valeur $l_0(1-\alpha)$ au passage par la verticale OX, et reprend sa valeur $l_0(1+\alpha)$ aux positions extrêmes où sa vitesse s'annule ; avec $0<\alpha<1$: voir figure 4.
Le référentiel terrestre $R(OXYZ)$ est supposé galiléen.

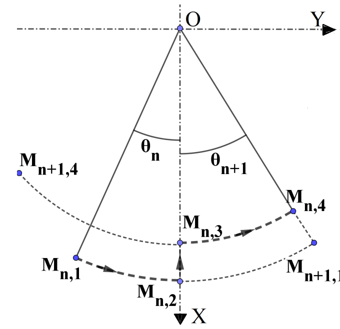

Figure 4 – Pendule de longueur variable

I.2.1. Lors d'un mouvement entre $M_{n,1}$ et $M_{n,4}$, le mobile part du point $M_{n,1}$ d'angle θ_n avec une vitesse nulle, et arrive en $M_{n,4}$ avec une vitesse nulle.
Lors de son passage par la verticale, exprimer sa vitesse $v_{2,n}(\theta=0^-)$ au point $M_{n,2}$.

I.2.2. En utilisant la conservation d'une grandeur mécanique, à préciser et à justifier, déterminer $v_{3,n}(\theta=0^+)$ au point $M_{n,3}$.

I.2.3. Déterminer alors la relation entre l'angle de montée θ_{n+1} et l'angle θ_n.

I.2.4. Montrer que l'amplitude des balancements augmente.

I.2.5. Dans la phase retour, le mobile repart de $M_{n+1,1}$ sans vitesse initiale. Exprimer, puis calculer le nombre N d'aller-retours permettant d'atteindre un angle $\theta_p=\frac{\pi}{2}$, sachant qu' initialement le pendule a été abandonné, sans vitesse initiale, en $\theta_0=\frac{\pi}{10}$; on donne $l_0=4m$ et $\alpha=\frac{1}{20}$.

I.2.6. Soit $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$ la période du pendule de longueur l_0. Exprimer la période T avec laquelle la longueur l varie dans le temps, en fonction de T_0.

Pendant la durée T, séparant deux passages successifs du pendule M par le même point sur la verticale, l'énergie cinétique E_c varie de ΔE_c (l'énergie potentielle ne varie pas).

I.2.7. On suppose que $\alpha \ll 1$; exprimer la variation relative $\frac{\Delta E_c}{E_c}$, en fonction de α à l'ordre 1.

I.2.8. On admet que la variation de l'énergie cinétique est de la forme $\frac{dE_c}{dt}=k.E_c$, où k est une constante ; déterminer la loi de variation $E_c(t)$, ainsi que la valeur de k.

I.2.9. En réalité, la longueur $l(t)$ varie continument dans le temps. Par application du théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle du mouvement.
Proposer une expression de $l(t)$ modélisant l'exemple étudié ci-dessus.

II^{eme}problème : couplage de deux oscillateurs mécaniques par électromagnétisme

II.1. Préliminaire : champ magnétique crée par un dipole magnétique $\overrightarrow{m}$

On considère une spire circulaire, de centre O', d'axe Z'O'Z, de rayon r' et parcourue par un courant permanent d'intensité i'. Elle crée en tout point P, repéré par $\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{r}$, un champ et un potentiel vecteur magnétiques. Dans l'approximation dipolaire $r \gg r'$, on montre qu'elle crée le potentiel magnétique $\overrightarrow{A}(P)=\frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\overrightarrow{m}\wedge\overrightarrow{r}}{r^3}$, où $\mu_0=4\pi 10^{-7}S.I$ est la perméabilité magnétique du vide et $\overrightarrow{m}$ est le moment dipolaire magnétique de la spire.

Pour tous champs de scalaire f et de vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{w}$, on a les relations :
$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b}.(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}.(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})$; $\overrightarrow{rot}(f.\overrightarrow{w}) = f.\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{w} + \overrightarrow{grad}f \wedge \overrightarrow{w}$.

II.1.1. Schématiser la spire orientée et donner l'expression de son moment magnétique $\overrightarrow{m}$.

II.1.2. Démontrer l'expression du vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5}.[3.(\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{r}).\overrightarrow{r} - (r^2).\overrightarrow{m}]$.

On considère un aimant caractérisé par son moment dipolaire magnétique $\overrightarrow{m} = m.\overrightarrow{u}_z$, où m est une constante positive. Dans la base cylindrique $\{\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z\}$, on repère sa position par le vecteur $\overrightarrow{OM} = z.\overrightarrow{u}_z$; cet aimant crée en $P(\rho, \theta, z_0)$ le champ magnétique $\overrightarrow{B}(P)$, et on a $z_0 \gg z$ et $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{r}$.

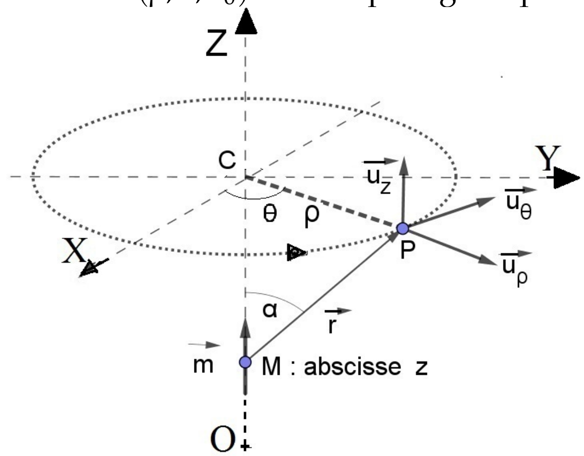

Figure 5 – Champ magnétique crée par un dipôle magnétique

II.1.3. Reproduire, sur votre copie, le plan $\Pi'(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{MP})$, représenter quelques lignes du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ crée par le dipôle $\overrightarrow{m}$ et indiquer ses pôles nord (n) et sud (s) sur ce schéma.

II.1.4. Le champ magnétique crée par $\overrightarrow{m}$ a pour expression : $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) = B_\rho(\overrightarrow{r}).\overrightarrow{u}_\rho + B_z(\overrightarrow{r}).\overrightarrow{u}_z$, avec $B_\rho(\overrightarrow{r}) = \beta.g(\rho, z, z_0)$ et $B_z(\overrightarrow{r}) = \beta.h(\rho, z, z_0)$ avec $\beta = \frac{\mu_0 m}{4\pi}$.
Expliquer pourquoi $B_\theta = 0$, et donner les expressions des fonctions $g(\rho, z, z_0)$ et $h(\rho, z, z_0)$.

II.2. Interaction entre un dipôle $\overrightarrow{m}$ en mouvement, et une spire (S) de rayon ρ fixe en $z_0 = cte$.

II.2.1. Lorsque l'aimant se déplace avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v.\overrightarrow{u}_z$, par rapport au référentiel galiléen $R(OXYZ)$, déterminer le champ électromoteur $\overrightarrow{E}(P)$ induit en un point P de la spire.
En déduire l'expression de la f.é.m induite e_S.

II.2.2. La spire a pour résistance $r_S = \frac{R}{N}, N \in \mathbb{N}^*$ et son inductance est négligée $L_S = 0$.
Exprimer l'intensité i du courant induit.

II.2.3. Déterminer la force de Laplace $\overrightarrow{f}_L$ exercée par le dipôle $\overrightarrow{m}$ sur la spire. Commenter son sens à la lumière de la loi de Lenz.

II.2.4. Tracer l'allure du graphe $f_{L,z}(z) = \overrightarrow{f}_L.\overrightarrow{u}_z$, en indiquant les valeurs particulières.

II.3. Interaction entre l'aimant mobile et une bobine, fixe, de N spires régulièrement réparties sur l'étendue $z_0 - \frac{l}{2} \leq z \leq z_0 + \frac{l}{2}$, où l est la longueur de la bobine ($l \ll \rho$) ; on pourra poser $n = \frac{N}{l}$.

II.3.1. Déterminer l'expression de la f.é.m e induite dans cette bobine. Montrer qu'on peut l'écrire en fonction de la vitesse v du dipôle magnétique sous la forme $e = -\gamma.v$, déterminer l'expression de la constante γ ; on notera J l'intégrale qui s'introduit et qu'on ne calculera pas.

II.3.2. Déterminer la composante de la force de Laplace $F_{L,z} = \overrightarrow{F}_L.\overrightarrow{u}_z$ exercée par le dipôle $\overrightarrow{m}$ sur toute la bobine. Montrer qu'on peut l'écrire $F_{L,z} = \delta.v$ et déterminer l'expression et le signe de la constante δ.

II.4. Oscillateurs mécaniques couplés par électromagnétisme

On étudie un couplage par électromagnétisme entre les mouvements de deux aimants attachés à deux ressorts. Ces aimants sont caractérisés par leurs moments dipolaires magnétiques $\overrightarrow{m}_1$ et $\overrightarrow{m}_2$; ils se meuvent en vis-à-vis de deux bobines, et y créent, alors, des forces électromotrices induites [1].

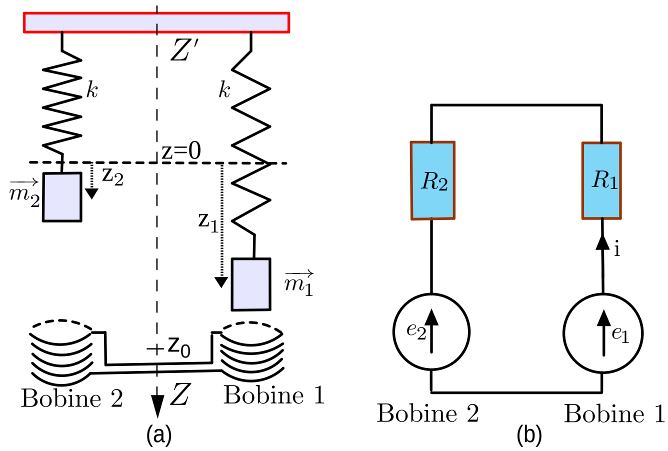

Figure 6 – Oscillateurs mécaniques couplés par électromagnétisme

II.4.1. Les deux bobines sont identiques et ont même résistance $R_1 = R_2 = R$; elles sont placées en série et le circuit équivalent est représenté dans la figure 6 (b).
Déterminer l'expression du courant induit i.

Les deux ressorts sont identiques, ils ont même longueur à vide l_0 et même raideur k. L'origine des espaces $z = 0$ est prise à la position d'équilibre des deux mobiles ($i = 0$).
Les deux aimants ont même masse M et leurs élongations z_1 et z_2 sont repérées à partir de l'équilibre ; on supposera $|z_1| \ll z_0, \rho$ et $|z_2| \ll z_0, \rho$. Voir figure 6 (a).

II.4.2. Exprimer l'intensité i en fonction des vitesses $\dot{z}_1$ et $\dot{z}_2$ respectives des dipôles magnétiques $\overrightarrow{m}_1$ et $\overrightarrow{m}_2$. On fera intervenir la constante γ.

II.4.3. Donner les expressions de la force F_{1z} exercée par la bobine 1 sur le dipôle $\overrightarrow{m}_1$ et de la force F_{2z} exercée par la bobine (2) sur le dipôle $\overrightarrow{m}_2$.

II.5. Étude des mouvements

II.5.1. Écrire le système d'équations différentielles vérifiées par les élongations z_1 et z_2. On posera $\omega^2 = \frac{k}{M}$ et $\lambda = \frac{\delta}{2M}$; on supposera $\omega > \lambda$.

II.5.2. On introduit les variables $z = z_1 + z_2$ et $z' = z_1 - z_2$, déterminer la forme de $z(t)$ et $z'(t)$.

II.5.3. Déterminer les expressions de $z_1(t)$ et $z_2(t)$, sachant qu'à t=0, $z_1(t = 0) = z_{10} > 0$ et $z_2(t = 0) = \dot{z}_1(t = 0) = \dot{z}_2(t = 0) = 0$.

[1] Donoso *et al*. Eur. J. Phys. 31 (2010) 433–452.

Fin de l'épreuve de physique.