Correction de l'épreuve de physique (II) filière MP

Concours CNC session 2009

EL FILALI SAID
CPGE BENI MELLAL
MAROC
= elfilalisaid@yahoo.fr =

1 PHYSIQUE :Durée des saisons

1.1 Propriétés générales du mouvement

1.1.1 Référentiel galiléen

1.1.1.1- Un référentiel galiléen est un référentiel qui vérifie le principe d'inertie :«Dans un référentiel $\mathcal{R}$ si un point matériel M isolé ou pseudo isolé et sa vitesse par rapport à ce référentiel est constante (en équilibre ou son mouvement est rectiligne uniforme), alors ce référentiel est galiléen».

1.1.1.2- Le référentiel géocentrique est le référentiel centré en O barycentre de la terre et son mouvement est une translation elliptique par rapport à celui de copérnic : le plan xoy forme le plan équatorial et oz se dirige vers le nord géographique.
Le référentiel géocentrique sera considéré comme galiléen si la durée de l'expérience Δt est très négligeable devant la période du mouvement de O dans le référentiel de copérnic (une année)$\Delta t \ll 1$ année.
Remarque : Pendant Δt on peut approximer le mouvement de O par un mouvement rectiligne.

1.1.2 Force et énergie mécanique

On a : $\vec{F}_{S\to O} = -\dfrac{G\,M_S\,m}{r^3}\vec{r}$

1.1.2.1- Puisque le champ de force est porté par $\vec{r}$ alors il est central.(sa direction passe toujours par le centre S du soleil).

1.1.2.2- Une force conservative s'il existe une fonction scalaire $\mathbf{E}p$ dite énergie potentielle telle que on peut écrire $\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = -d\ \mathbf{E}p$ ou bien $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\ \mathbf{E}p$.
En général une force est dite conservative si $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

1.1.2.3- Montrons que la force de gravitation est conservative ; pour cela calculons $\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = -\frac{G\,M_S\,m}{r^2}\overrightarrow{u_r}.(dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}) \implies \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = -\frac{G\,M_S\,m}{r^2}dr$$

$$\implies \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = -d\Big(-\frac{G\,M_S\,m}{r} + cte\Big)$$

Donc la force $\overrightarrow{F}$ est conservative.

1.1.2.4- L'énergie potentielle $\mathbf{E}p = -\dfrac{G\,M_S\,m}{r} + cte$ d'après la question précédente.
On a $\mathbf{E}p(r\to\infty) = 0 \Longrightarrow cte = 0$

$$\boxed{\mathbf{E}p = -\frac{G\,M_S\,m}{r}}$$

1.1.2.5- Puisque la seule force qui existe est conservative et d'après le théorème de l'énergie mécanique $\Delta\,E_m = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{NC})$ alors l'énergie mécanique E_m de la Terre est constante au cours de son mouvement autour du Soleil (l'integrale première de l'énergie)

1.1.3 Moment cinétique

1.1.3.1- Le vecteur moment cinétique $\overrightarrow{L_S} = \overrightarrow{SO}\wedge m\overrightarrow{V}(O/\mathcal{R}) \Longrightarrow \overrightarrow{L_S} = \overrightarrow{r}\wedge m\overrightarrow{V}$

1.1.3.2- Le théorème du moment cinétique pour un point matériel : la dérivée temporelle du vecteur moment cinétique par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ est égal à la somme des moments des forces qui sont lui appliquées .

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_S}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}_i)}$$

1.1.3.3- On a :$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}_{S\to O}) = r\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{F}_{S\to O} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}_{S\to O}) = r\overrightarrow{u_r} \wedge (-\dfrac{G\ M_S\ m}{r^2}\overrightarrow{u_r}) = \overrightarrow{0}$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{L_S} = \overrightarrow{cte}}$$

Le moment cinétique de la terre au cours de son mouvement autour du soleil est conservé.

1.1.3.4- Puisque $\overrightarrow{L_S} = \overrightarrow{cte} = \overrightarrow{r} \wedge m\overrightarrow{V}$ alors le mouvement du point O centre de la Terre autour du Soleil est entièrement contenue dans un plan fixe Π.
Ce plan est perpendiculaire au vecteur moment cinétique $\overrightarrow{L_S} \perp \Pi$

1.1.3.5- On pose : $\overrightarrow{L_S} = mC\vec{u}$

1.1.3.5.1- on a : $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{r} = r\overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{V}(O/\mathcal{R}) = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ donc

$$\boxed{V_r = \dot{r} \qquad , \qquad V_\theta = r\dot{\theta}}$$

1.1.3.5.2- Le moment cinétique $\overrightarrow{L_S}$, On a :
$\overrightarrow{L_S} = m\mathcal{C}\overrightarrow{u} = r\overrightarrow{u_r} \wedge m(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) \Longrightarrow \overrightarrow{L_S} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}$
Don la constante $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$

1.1.4 Loi des aires

1.1.4.1- L'aire $d\Sigma$, balayée :
$d\Sigma = \dfrac{1}{2} \parallel (dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta}) \wedge r\overrightarrow{u_r}) \parallel$

$$\boxed{d\Sigma = \frac{1}{2}r^2 d\theta}$$

comme $d\theta = \dot{\theta}dt$ alors

$$\boxed{d\Sigma = \frac{\mathcal{C}}{2}dt}$$

1.1.4.2- Par intégration et puisque $\mathcal{C}$ est constante alors

$$\boxed{\Sigma = \frac{C}{2}\Delta t}$$

c'est la loi des aires

Justification de l'appellation :
On remarque que la vitesse aréolaire $\dfrac{d\Sigma}{dt}$ est proportionnelle à $\mathcal{C}$, c'est à dire la surface balayée par le vecteur $\overrightarrow{r}$ pendant dt est proportionnelle à $\mathcal{C}$ (=cte).

1.2 Étude de la trajectoire

1.2.1- On a :$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{du}\dfrac{du}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \dfrac{dr}{dt} = -r^2\dot{\theta}\dfrac{du}{d\theta}$

$$\boxed{\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\mathcal{C}\frac{du}{d\theta}}$$

1.2.2-

- ▶ L'énergie cinétique $\mathbf{E}c = \dfrac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2$.
- ▶ Son expression :

On a $\overrightarrow{V} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \Longrightarrow \overrightarrow{V}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ c'est à dire $\overrightarrow{V}^2 = \mathcal{C}^2\Big(u^2 + (\dfrac{du}{d\theta})^2\Big)$

$$\boxed{\mathbf{E}c = \frac{m\mathcal{C}^2}{2}\Big(u^2 + (\frac{du}{d\theta})^2\Big)}$$

1.2.3- L'énergie mécanique du système : $E_m = \mathbf{E}c + \mathbf{E}p$ d'près ce qui précède on conclut que

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m\, C^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right) - G\, M_S\, m\, u}$$

1.2.4- L'énergie mécanique est une constante donc sa dérivée est nulle par rapport au temps :

$$\boxed{\frac{E_m}{dt} = \frac{du}{d\theta}\left(m\mathcal{C}^2[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - G\, M_s\, m]\right) = 0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\theta} = 0 \\ \dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = G\, M_s\, m \end{cases}$$

1.2.5- Si $\dfrac{du}{d\theta} = 0$ alors la trajectoire est circulaire puisque θ ne dépend pas de t ainsi $r = \dfrac{1}{u} = Cte$

1.2.6- La solution de la deuxième équation est : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$

1.2.6.1- La distance SO minimale notée r_m au périhélie P de la trajectoire

$$\boxed{r_m = SO(\cos\theta = +1) \Longrightarrow r_m = \frac{p}{1+e}}$$

1.2.6.2- La distance SO maximale notée r_M à l'aphélie A

$$\boxed{r_M m = SO(\cos\theta = -1) \Longrightarrow r_M = \frac{p}{1-e}}$$

1.2.6.3- L'écart relatif entre ces deux distances

$$\boxed{\frac{r_M - r_m}{p} = \frac{2e}{1-e^2}}$$

.

1.2.6.4- Application numérique :

r_M	152749500 km
r_m	147347800 km
$\dfrac{r_M - r_m}{p}$	0,036

Commentaire :$\dfrac{r_M - r_m}{p} \ll 1 \Longrightarrow$ la trajectoire elliptique qui tend vers une trajectoire circulaire

1.3 Période temporelle du mouvement

1.3.1- la période T du mouvement de la Terre autour du Soleil :
On a : $\Sigma = \dfrac{\mathcal{C}}{2}\Delta t \Longrightarrow \pi ab = \dfrac{\mathcal{C}}{2}T$ en remplaçant a par $\dfrac{p}{1-e^2}$ et b par $\dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ ainsi $\mathcal{C}^2$ par $pG\, M_s$ on trouve

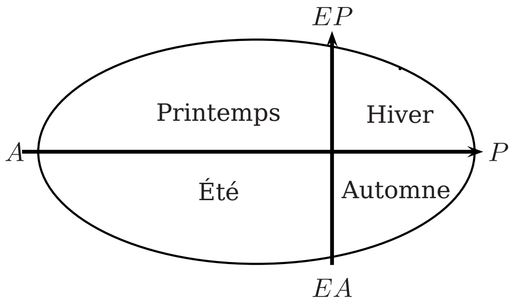
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{G\, M_s}}\left(\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

1.3.2- Application numérique :

▶ $T = 31914758,07\ s = 366,88$ jours.

▶ Commentaire : Valeur théorique est légèrement supérieur à la valeur expérimentale $T_{exp} = 365,25$ jours.

1.3.3- Indication des surfaces balayée par le rayon-vecteur de la Terre pendant chacune des quatres saisons.



1.3.4- Graphiquement (l'axe AP est un axe de symétrie) et puisque la surface balayée est proportionnelle au temps alors

$$\boxed{\Sigma(\acute{E}t\acute{e}) = \Sigma(Printemps) > \Sigma(automne) = \Sigma(Hiver)}$$

$$\boxed{\Delta t(\acute{E}t\acute{e}) = \Delta t(Printemps) > \Delta t(automne) = \Delta t(Hiver)}$$

1.3.5- Montrons l'expression de la durée T_h de l'hiver On a :$\mathcal{C} = r^2\dfrac{d\theta}{dt} \Longrightarrow dt = \dfrac{r^2}{\mathcal{C}}d\theta$
En remplaçant r par son expression , on trouve
$T_h = \dfrac{1}{\mathcal{C}}\int\limits_0^{\pi/2} r^2\, d\theta \Longrightarrow T_h = \dfrac{p^2}{\mathcal{C}}\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{1}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta$
Vue la valeur de $e \ll 1$ en utilisant un DL de $r$au voisinage de $e = 0$ on en déduit que

$$\boxed{T_h = \frac{p^2}{\mathcal{C}}\int\limits_0^{\pi/2}(1-2e\cos\theta)d\theta}$$

Par intégration on trouve :

$$\boxed{T_h = \frac{p^2}{\mathcal{C}}[\frac{\pi}{2} - 2e]}$$

1.3.5.1- Application numérique : $T_h = 774.10^4\ s = 89,575$ jours.
1.3.5.2- De la même façon que précédemment la durée T_p du printemps se calcule approximativement par

$$\boxed{T_p \simeq \frac{p^2}{C}\int_{\pi/2}^{\pi}(1-2e\cos\theta)d\theta}$$

Par intégration on trouve :

$$\boxed{T_p = \frac{p^2}{\mathcal{C}}[\frac{\pi}{2} + 2e]}$$

1.3.5.3- Application numérique : $T_p = 810.10^4\ s = 93,777$ en jours.
Commentaire : La durée du printemps est légèrement supérieure à celle de l'hiver mais tous les deux sont peut différentes à trois mois la durée moyenne d'une saison.
1.3.6-
1.3.6.1- La durée de la saison :
▶ d'hiver $T'_h = 10 + 31 + 28 + 20 = 89$ jours .
▶ du printemps $T'_p = 12H + 11j + 30j + 31j + 6H = 92,75$ jours.
1.3.6.2- Comparaison les valeurs sont très voisines par conséquent le modèle convient .

2 Étude de l'équilibre de l'atmosphère dans le champ de pesanteur

2.1 Pression dans un fluide au repos dans le champ de pesanteur

2.1.1- La résultante des forces de pression :

$$\boxed{d\overrightarrow{F}_p = P(z)S\overrightarrow{e_z} - P(z+dz)S\overrightarrow{e_z} \Longrightarrow d\overrightarrow{F}_p = -S\,dP\,\overrightarrow{e_z}}$$

• L'expression de la densité volumique des forces pressante

$$\boxed{\overrightarrow{f}_V = \frac{d\overrightarrow{F}_P}{d\tau} = -\frac{dP}{dz}\overrightarrow{e_z}}$$

2.1.2- L'équilibre mécanique, donc la résultante des forces extérieures est nulle, ce qui donne

$$\boxed{d\overrightarrow{F}_p - \rho g S dz\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \frac{dP}{dz} + \rho g = 0}$$

2.1.3- L'expression de la pression : L'intégration donne

$$\boxed{P(z) = P_o - \rho g z}$$

2.1.4- **Ordres de grandeur** :

2.1.4.1- Dans une salle de hauteur $H = 3m$ on a :

$$\boxed{\Delta P = P_o - P_H = \rho g H \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta P = 34,2\,Pa}$$

Comme $\dfrac{\Delta P}{P_o} \ll 1$ Donc la pression dans la salle est constante.

2.1.4.2- Dans l'océan

$$\boxed{\Delta P = P_H - P_o = \rho g H \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta P = 329430\,Pa}$$

Comme $\dfrac{\Delta P}{P_o} \simeq 0,291$ alors on ne peut pas considérer que la pression dans l'océan est constante.

2.2 Modèle de l'atmosphère isotherme

2.2.1- On a gaz parfait :

$$\boxed{PV = nRT \Longrightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{P_o M_a}{RT_o}}$$

2.2.2- L'équation (1) donne

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \Longrightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{M_a g}{RT_o}P = 0$$

On pose

$$\boxed{h = \frac{RT_o}{M_a g}}$$

alors

$$\boxed{P(z) = P_o \exp(\frac{-z}{h})}$$

2.2.3- En remplaçant R par $N_A K$ et connaissant que $m = \dfrac{M_a}{N_A}$ la masse d'une particule ainsi puisque l'axe oz orienté vers le haut donc $e_p = +mgz(+cte = 0)$ alors

$$\boxed{P(z) = P_o \exp(-\frac{e_p}{KT_o})}$$

Et puisque par hypothèse l'atmosphère est en équilibre alors $e_m = e_p + e_c = e_p$ et donc

$$\boxed{P(z) = P_o \exp(-\frac{e_m}{KT_o})}$$

$\exp(-\frac{e_m}{KT_o})$: c'est le facteur de Boltzmann

2.2.4- La hauteur caractéristique est

$$\boxed{h = \frac{RT_o}{M_a g} \xrightarrow{\text{A.N}} h = 7978,2\,m}$$

Remarquons que h représente la hauteur telle que $P(z = h) = \dfrac{P(z = 0)}{e}$

Commentaire : la valeur de h est très supérieur aux valeurs habituelles, par conséquent on peut considérer la pression constante.

2.3 Modèle de l'atmosphère polytropique

2.3.1- L'expression de la masse volumique

$$\boxed{\rho = \frac{M_a P}{RT} \Longrightarrow \rho = \frac{M_a P}{R(T_o - az)}}$$

2.3.2-

2.3.2.1- L'intégration de la statique des fluide donne :

$\dfrac{dP}{dz} = -\dfrac{M_a g}{R(T_o - az)} P \Longrightarrow \dfrac{dP}{P} = \dfrac{M_a g}{aR}(-\dfrac{adz}{T_o - az})$

ce qui donne en integrant

$$\ln \frac{P}{P_o} = \frac{M_a g}{aR} \ln \frac{T_o - az}{T_o}$$

Donc

$$\boxed{P(z) = P_o \Big(1 - \frac{a}{T_o} z\Big)^{\frac{M_a g}{aR}}}$$

Il en résulte que

$$\boxed{b = \frac{a}{T_o} \qquad ; \qquad \alpha = \frac{M_a g}{aR}}$$

2.3.2.2- Comparaison des résultants pour $bz \ll 1 \Longrightarrow z \ll 1$

- Atmosphère isotherme :$P = P_o \exp -z/h \rightarrow P_o(1 - \dfrac{M_a g}{RT_o} z)$
- Atmosphère polytropique : $P = P_o(1 - bz)^\alpha \rightarrow P_o(1 - \dfrac{M_a g}{RT_o} z)$

Donc Au voisinage de la terre $(z \rightarrow 0)$ les deux modèles coincident.

2.3.2.3- Montrons la relation :

On a :

$$P(z) = P_o\Big(1 - \frac{a}{T_o}z\Big)^{\alpha}$$

Ainsi :

$$\rho = \frac{M_a}{RT_o(1-bz)}P \Longrightarrow \rho = \frac{M_a P_o}{RT_o}(1-bz)^{\alpha-1}$$

Ce qui donne

$$\boxed{\frac{P}{\rho^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} = cte \Longrightarrow k = \frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

2.3.2.4-

2.3.2.4.1- Application Numérique :

$$\boxed{\alpha = \frac{M_a g}{Ra} \Longrightarrow a = \frac{M_a g}{R\alpha} \xrightarrow{\text{A.N}} a = 5,79.10^{-3}\ K.m^{-1}}$$

$$\boxed{b = \frac{a}{T_o} \Longrightarrow T_o = \frac{a}{b} \xrightarrow{\text{A.N}} T_o = 297\ K}$$

Pour l'altitude de 10 km on a :

$$\boxed{T(10\ km) = 239\ K}$$

Commentaire : Entre la température donnée à 10 km (223 k) est la température calculée par le modèle est de l'ordre de 16 K ce qui prouve que le modèle convinet avec une légère variation de température, et par conséquent si on veux améliorer mieux le modèle il faut tenir compte de l'action du vent donc l'atmosphère n'est plus en équilibre mécanique (équilibre hydrostatique).

2.3.2.4.2- La hauteur de l'atmosphère dans le modèle :

SI H est la hauteur de l'atmosphère alors $P(z = H^+) = 0$ (au delà de l'atmosphère il n'y a que le vide) d'où :

$$\boxed{P(H) = 0 \Longrightarrow H = \frac{1}{b} \xrightarrow{\text{A.N}} H = 51,28\ km}$$