

Méthode photométrique de mesure d'une température

1^{ère} partie :
Modélisation et mise en équation

1.1 Étude de l'équilibre thermique initial

1.1.1 corps noir

1.1.1.1 corps totalement absorbant quelque soit l'incidence et la longueur d'onde

1.1.1.2 $\varphi_e^{CN} = \sigma T^4$; loi de Stefan

1.1.1.3 forme convexe et équilibre thermique

1.1.2 Equilibre thermique

1.1.2.1 $dU = c dT \implies U = c (T - T_0) + U_0$

1.1.2.2 en équilibre thermique $\sum \varphi_i = 0 \implies \varphi_{pa} + \varphi_{ambient} - \varphi_e - \varphi_{cc} = 0$

$$\implies \sigma(T_0^4 - T_a^4) + h(T_0 - T_a) - \varphi_{pa} = 0$$

1.1.2.3 on a $\varphi_{pa} = (T_0 - T_a)(h + \sigma T_0^3 + \sigma T_a^3 + \sigma T_0^2 T_a + \sigma T_a^2 T_0)$ donc $\varphi_a \approx 0^+$ (reçu) $\implies T_a \approx T_0^+$

1.1.2.4 d'après 1.2.3 on aura : $(4\sigma T_a^3 + h)(T_0 - T_a) - \varphi_{pa} = 0$

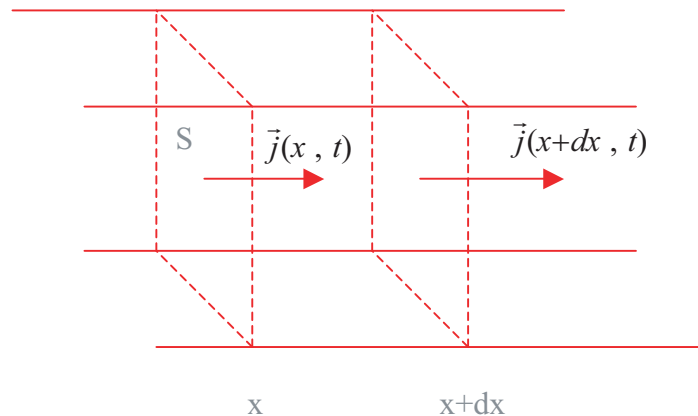
1.2 Ordres de grandeurs

1.2.1 Bilan d'énergie en régime variable

1.2.1.1 - Σ est invariant par rotation autour de Ox donc $T(r, x, t)$ ne dépendra pas de θ .

- paroi latérale adiabatique donc pas de gradient de T suivant \vec{e}_r donc $T(x, t)$

1.2.1.2 :



la loi de Fourier donne $\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla} T(x, t) = j(x, t) \vec{u}_x$ uniforme sur toute section droite.

le 1^{er} principe sur la tranche isochore $[x, x + dx]$, entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = \Phi_e(x, t) - \Phi_s(x + dx, t) = j(x, t)S - j(x + dx, t)S$$

soit

$$(\rho S dx) c \frac{\partial T}{\partial t} = -S \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} dx$$

loi de fourier $\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$

soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

donc $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ s'exprimant en $m^2 s^{-1}$

1.2.1.3 (3) $\implies \frac{\delta T}{\delta t} = a \frac{\delta T}{L_q^2} \implies L_q = \sqrt{a \delta t}$

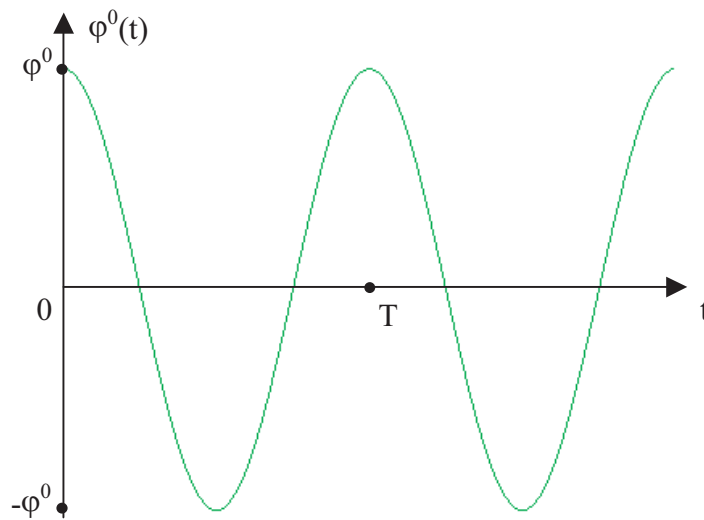
1.2.1.4 A.N : $L_q = 3,2 \cdot 10^{-4} m$

1.2.1.5 pendant l'expérience $t \in [0, \delta t]$ on a $L_q \ll e = 1 \text{ cm}$ donc sauf au voisinage de la surface $x \approx 0$ l'apport d'énergie n'est pas senti donc $T(x \gg L_q, t) = T_0$

1.2.2 Effet d'un flux lumineux incident variable

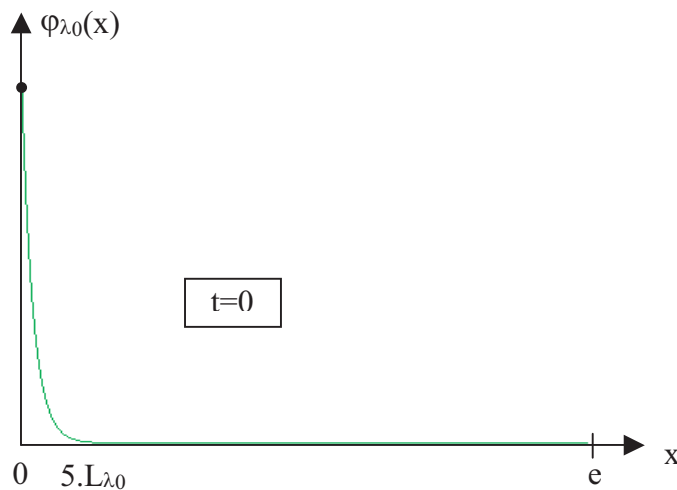
1.2.2.1 $\varphi_0 = \frac{P}{\pi r^2}$ A.N : $\varphi_0 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2}$; très grande

1.2.2.2 :



1.2.2.3 L_{λ_0} caractérise la pénétration du laser dans Σ

1.2.2.4 :



1.2.2.5 on a $L_{\lambda_0} \ll e$ donc l'apport énergétique du laser s'effectue en surface et l'équation (3) sera inchangée

1.3 Résolution et conditions aux limites

1.3.1 Équation différentielle

1.3.1.1 (3) et (7) $\implies \frac{\partial T}{\partial t} = i\omega_0 \underline{\theta}(x) e^{i\omega_0 t}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \ddot{\underline{\theta}}(x) e^{i\omega_0 t}$ soit $\ddot{\underline{\theta}}(x) - \frac{i\omega_0}{a} \underline{\theta}(x) = 0$

1.3.1.2 on a $i = \frac{(1+i)^2}{2}$ soit $\ddot{\underline{\theta}}(x) - \alpha^2 \underline{\theta}(x) = 0$ avec $\alpha = (1+i)\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}}$ de solution

$$\underline{\theta}(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

1.3.2 Conditions aux limites

1.3.2.1 on a $Re(\alpha) > 0$ T et θ sont finies pour $x \rightarrow \infty \implies \underline{\theta}(x) = \underline{B}e^{-\alpha x}$

1.3.2.2 de même qu'en 1.2.4, on a $T(0, t) \approx T_a$ soit $\varphi_1^R = 4\sigma T_a^3(T(0, t) - T_a)$

1.3.2.3 – conduction : $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=0)$ entrant (Wm^{-2})

– conducto-convectif : $j_{cc} = h(T(0, t) - T_a)$ sortant (Wm^{-2})

– flux surfacique parasite : φ_{pa} entrant (Wm^{-2})

– flux du laser : $\varphi^0(t)$ entrant (Wm^{-2})

– flux radiatif : φ_1^R sortant (Wm^{-2})

1.3.2.4 continuité du flux thermique en $x = 0$:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=0) = \varphi_{pa} + \varphi^0(t) - \varphi_1^R - h(T(0, t) - T_a)$$

1.3.2.5 $\frac{\partial T}{\partial x}(x=0, t) = \dot{\underline{\theta}}(0) e^{i\omega_0 t}$ et $\varphi^0(t) = \varphi^0 e^{i\omega_0 t}$ tenant compte du résultat de 1.2.4 on

$$\text{établit : } -\lambda \dot{\underline{\theta}}(0) = \varphi^0 - (h + 4\sigma T_a^3) \underline{\theta}(0) \implies h_e = h + 4\sigma T_a^3$$

1.3.2.6 on a $\underline{\theta}(x) = \underline{B}e^{-\alpha x} \iff \lambda \underline{\alpha} \underline{B} = \varphi^0 - h_e \underline{B} \iff \underline{B} = \frac{\varphi^0}{h_e + \lambda \underline{\alpha}}$

1.3.2.7 on a $h_e = 26 WK^{-1}m^{-2}$ et $\lambda | \underline{\alpha} | = 560 \cdot 10^3 WK^{-1}m^{-2} \implies h_e \ll \lambda | \underline{\alpha} |$

$$\implies \underline{B} \approx \frac{\varphi^0}{\lambda \underline{\alpha}} = \frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-i\frac{\pi}{4})$$

1.3.2.8

$$\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}(x) e^{i\omega_0 t} = \frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-i\frac{\pi}{4}) \exp(-\underline{\alpha} x) \exp(i\omega_0 t)$$

$$\implies \underline{\theta}(x, t) = \frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x) \exp(i(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x - \frac{\pi}{4}))$$

1.3.2.9 $T(x, t) = T_0 + Re(\underline{\theta}(x, t)) = \underbrace{T_0}_{\text{statique}} + \underbrace{\frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x)}_{\text{atténuation}} \underbrace{\cos(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x - \frac{\pi}{4})}_{\text{phase}}$

on distingue trois termes :

– T_0 statique existe même en absence du Laser ($\varphi^0 = 0$)

– terme de propagation de phase

– terme d'atténuation ou effet de peau thermique

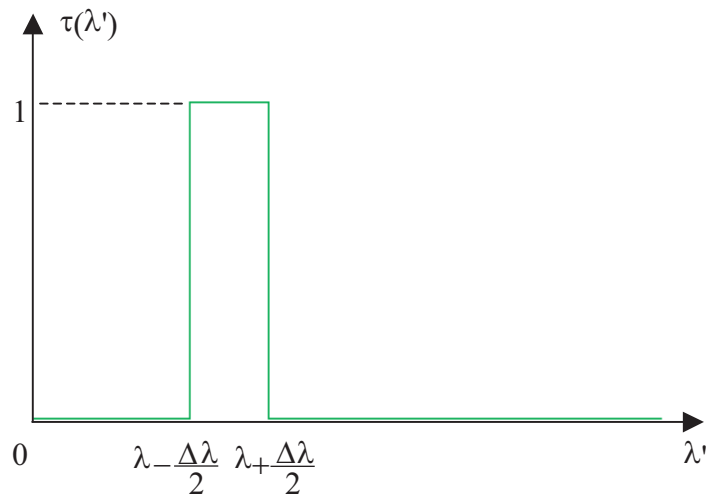
2^{ème} partie :

Détection et analyse du signal

2.1 Détection du signal

2.1.1 Densité spectrale

2.1.1.1 :



2.1.1.2 la loi de Planck ,pour le flux surfacique spectral , s'écrit : $\varphi_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda KT}) - 1}$

2.1.1.3 il vient $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial T} = \frac{p \exp(\frac{b}{\lambda T})}{\lambda^6 T^2 (\exp(\frac{b}{\lambda T}) - 1)^2} \implies b = \frac{hc}{K}$ et $p = \frac{2\pi h^2 c^3}{K}$

2.1.2 Signal délivré par le détecteur

2.1.2.1 l'approximation $\Delta T(0, t) \ll T_0$ permet de faire un développement limité au 1^{er} ordre au voisinage de $T_0 \implies L_\lambda(T) \approx L_\lambda(T_0) + (T - T_0) \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T}\right)_{T=T_0}$ et puisque $\tau(\lambda) = 1$ d'où le résultat : $S_\lambda(t) = D_\lambda [L_\lambda(T_0) + \Delta T(0, t) \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T}\right)_{T=T_0}] \Delta \lambda$

2.1.2.2

$$S'_\lambda(t) = D \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T}\right)_{T=T_0} \Delta \lambda \Delta T(x=0, t)$$

$$\implies S'_\lambda(t) = \underbrace{D \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T}\right)_{T=T_0} \Delta \lambda \left(\frac{\varphi^0}{\lambda_{th}} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}}\right)}_{\text{}} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})$$

2.2 Analyse du signal

$$\frac{S'_{eff}(\lambda_2)}{S'_{eff}(\lambda_1)} = \frac{\Delta \lambda_2 \frac{\partial L_{\lambda_2}}{\partial T}}{\Delta \lambda_1 \frac{\partial L_{\lambda_1}}{\partial T}} = \frac{\Delta \lambda_2}{\Delta \lambda_1} \frac{\lambda_1^6}{\lambda_2^6} \frac{(\exp(\frac{b}{\lambda_1 T_0}) - 1)^2}{(\exp(\frac{b}{\lambda_2 T_0}) - 1)^2} \exp\left[\frac{b}{T_0} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\right]$$

ce qui permet de déterminer T_0 par résolution graphique ou numérique!

fin du corrigé