Quelques aspects de la conduction thermique

$1^{ère}$ partie : Transfert thermique conductif dans un barreau

1.1 Loi de Fourier

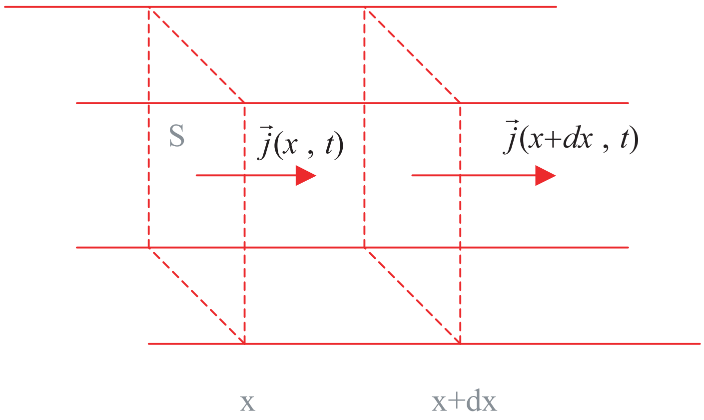
1.1.1 dans un milieu homogène isotrope ,solide ou fluide au repos , la densité de courant thermique est liée au gradient de température par $\vec{j_{th}} = -\lambda \vec{grad} T$ tel que :
- j_{th} en Wm^{-2}
- T en K
- λ constante positive en $WK^{-1}m^{-1}$

cette loi reste valable tant que le gradient de température est faible

1.1.2
- $\lambda \longleftrightarrow \sigma$
- $\phi_{th} \longleftrightarrow I$
- $\vec{j_{th}} = -\lambda \vec{grad} T \longleftrightarrow \vec{j} = -\sigma \vec{grad} V$
- $T \longleftrightarrow V$

1.2 Équation de la chaleur

1.2.1 :



la surface latérale étant calorifugée, pas de gradient de température selon Oy et Oz, la température T ne dépendra que de x et du temps t.
la loi de Fourier donne $\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla} T(x,t) = j(x,t)\vec{u}_x$ uniforme sur toute section droite.
le 1^{er} principe sur la tranche isochore $[x, x+dx]$, entre les instants t et $t+dt$ s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = \Phi_e(x,t) - \Phi_s(x+dx,t) = j(x,t)S - j(x+dx,t)S$$

soit

$$(\rho S dx)c\frac{\partial T}{\partial t} = -S\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}dx$$

loi de fourier $\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x$
soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

1.2.2 Temps caractéristique de la diffusion thermique

1.2.1.1 (1) $\Longrightarrow \frac{\Delta T}{\tau_d} \sim \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\Delta T}{d^2} \Longrightarrow \tau_d \sim \frac{\rho c}{\lambda}\ d^2$

1.2.1.2 A.N :

- $d_1 = 10cm \Longrightarrow \tau_d = 446s \approx 7minutes$
- $d_2 = 50cm \Longrightarrow \tau_d = 11160s \approx 3heures$

La diffusion thermique est un processus lent.

La loi non linéaire entre d et τ_d.

1.2.3 Résistance thermique

1.2.3.1 En régime stationnaire (1) s'écrit : $\ddot{T}(x) = 0$ soit $T(x) = Ax + B$; les conditions aux limites du barreau :

$T(x = 0) = T_1 = B$

$T(x = L) = T_2 = AL + B$

soit $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}\ x + T_1$

1.2.3.2 on a :$\vec{j}_{th} = -\lambda\frac{dT}{dx}\vec{x} = \lambda\frac{T_1 - T_2}{L}\vec{x}$ donc $\Phi_{th} = \int\int j_{th}\vec{x}.ds\vec{x} = \lambda\frac{T_1 - T_2}{L}S$

1.2.3.3 $R_{th} := \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}} = \frac{L}{\lambda S} > 0$ analogue à la résistance électrique !

$2^{ème}$ partie :
Transfert thermique conductif dans un anneau (Fourier,1806)

2.1 Équation de la chaleur avec fuites thermiques

2.1.1 pour réaliser un contact thermique parfait , en effet sans Hg l'air s'infiltrera entre le thermomètre et l'anneau , sachant que $\lambda_{Hg} \gg \lambda_{air}$

2.1.2 1^{er}principe à la tranche isochore

$$\frac{dU}{dt} = \Phi_e(\theta, t) - \Phi_s(\theta + d\theta, t) - \Phi_{cc}(solide \longrightarrow fluide)$$

or

$\frac{dU}{dt} = (\rho R d\theta \ell^2)c\frac{\partial T}{\partial t}$

loi de fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda\vec{\nabla}T(\theta, t) = -\lambda\frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$

$\Phi_e(\theta, t) = \int\int_{\theta=cte} j_{th}\vec{e}_\theta.dS\vec{e}_\theta = j_{th}(\theta, t)\ell^2$

$\Phi_s(\theta + d\theta, t) = \int\int_{\theta+d\theta=cte} j_{th}\vec{e}_\theta.dS\vec{e}_\theta = j_{th}(\theta + d\theta, t)\ell^2$

$\Phi_{cc}(solide \longrightarrow fluide) = h(T_S - T_e)dS_{lat} = h(T(\theta, t) - T_e)(4.Rd\theta\ell)$ soit : $\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{4h}{\lambda\ell}(T_e - T)$ (2)

2.1.3 en R.P $R^2 \times (2)$ devient :

$$0 = \frac{d^2(T - T_e)}{d\theta^2} - \frac{4hR^2}{\lambda\ell}(T - T_e)$$

de solution générale :

$$T = T_e + A\cosh(\frac{R}{a}\theta) + B\sinh(\frac{R}{a}\theta)$$

a est une distance en mètre

2.1.4 conditions aux limites : $T(0) = T_c = T_e + A$ et

$$T(2\pi) = T_c = T_e + (T_c - T_e)\cosh(\frac{R}{a}2\pi) + B\sinh(\frac{R}{a}2\pi)$$

il vient :

$$T(\theta) = T_e + (T_c - T_e)[\cosh\frac{R\theta}{a} + \frac{1-\cosh\frac{2\pi R}{a}}{\sinh\frac{2\pi R}{a}}\sinh\frac{R\theta}{a}]$$

2.1.5 on simplifie , d'après les données , l'expression de $T(\theta)$ en :

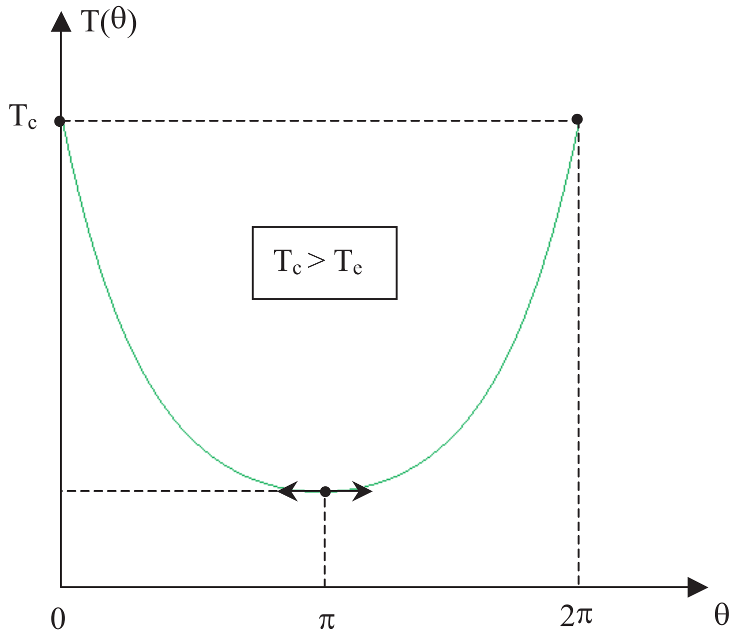
$$T(\theta) = T_e + \frac{T_c - T_e}{\cosh\frac{\pi R}{a}}\cosh\frac{R(\theta-\pi)}{a}$$

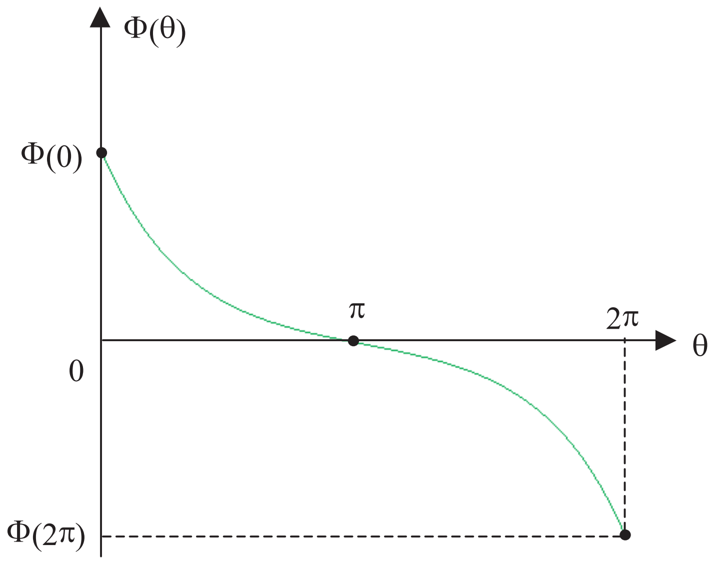
la température est symétrique par rapport à $\theta = \pi$ et $T_c > T_e$

2.1.6 $\Phi(\theta) = j_{th}(\theta)\ell^2 = -\lambda\frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial\theta}\ell^2$ soit :

$$\Phi(\theta) = -\frac{\lambda\ell^2}{a}\frac{T_c - T_e}{\cosh\frac{\pi R}{a}}\sinh\frac{R(\theta-\pi)}{a}$$

on a : $\Phi(\theta = \pi) = 0$ la température est minimale ; et $\Phi(\theta = 2\pi) \neq \Phi(\theta = 0)$ à cause de la plaque chauffante d'épaisseur $e \ll 2\pi R$





2.1.7 on a :

$$\Delta T_1 = \frac{T_c - T_e}{\cosh \frac{\pi R}{a}} \cosh \frac{R(\theta_1 - \pi)}{a}$$

$$\Delta T_2 = \frac{T_c - T_e}{\cosh \frac{\pi R}{a}} \cosh \frac{R(\theta_2 - \pi)}{a}$$

$$\Delta T_3 = \frac{T_c - T_e}{\cosh \frac{\pi R}{a}} \cosh \frac{R(\theta_3 - \pi)}{a}$$

avec $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \theta_3 - \theta_2$ soit :

$$q := \frac{\Delta T_3 + \Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{\cosh \frac{R(\theta_2 + \Delta\theta - \pi)}{a} + \cosh \frac{R(\theta_2 - \Delta\theta - \pi)}{a}}{\cosh \frac{R(\theta_2 - \pi)}{a}}$$

d'après les données : $ch(x+y) + ch(x-y) = 2chx\ chy$, l'expression se simplifie en :

$$q = 2 \cosh \frac{\Delta\theta R}{a}$$

2.1.8 A.N : $a = 0.26\ m$ et $q_{th} = 2.23$

2.1.9 d'après 1.2.1.1 $\tau_d = \frac{\rho c}{\lambda}\ (\pi R)^2 = 3\ h\ 6\ min$ et

$$q_{ex} := \frac{(66 - 17.67) + (44 - 17.67)}{50.67 - 17.67} = 2.26$$

$q_{ex} > q_{th}$ il fallait attendre 3 heures et non deux heures !

2.2 Équation de la chaleur en régime variable

2.2.1 on prend $h = 0$ dans l'équation (2), soit :

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

2.2.2 (3) donne $\frac{\partial T}{\partial t} = f(\theta).\dot{g}(t)$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \ddot{f}(\theta).g(t)$ soit : $\frac{\rho c}{\lambda} f(\theta).\dot{g}(t) = \frac{1}{R^2} \ddot{f}(\theta).g(t)$ d'où :

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = \frac{1}{R^2} \frac{\ddot{f}(\theta)}{f(\theta)}$$

2.2.3 les deux termes dépendent chacun d'une variable θ et t qui sont indépendantes , ceci n'est possible que dans le cas

$$\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = \frac{1}{R^2}\frac{\ddot{f}(\theta)}{f(\theta)} = \Omega$$

2.2.4 donc : $\dot{g}(t) - \frac{\lambda}{\rho c}\Omega g(t) = 0$, g sera bornée si $\Omega < 0 = -\frac{1}{d^2}$, donc $\ddot{f}(\theta) + \frac{R^2}{d^2}f(\theta) = 0$, θ est en rad qui n'est pas une unité d'où : d est une distance en metre

2.2.5 $f(\theta) = A\cos(\frac{R}{d}\theta) + B\sin(\frac{R}{d}\theta)$

2.2.6 $\dot{g}(t) - \frac{\lambda}{\rho c}\Omega g(t) = 0 \Longrightarrow g(t) = g_0 \exp\frac{\lambda}{\rho c}\Omega t = g_0 \exp -\frac{\lambda}{\rho c d^2}t$ soit :

$$\tau = \frac{\rho c d^2}{\lambda}$$

2.2.7 on a : $\Phi(\theta,t) = j_{th}(\theta,t)\ell^2 = -\frac{\lambda\ell^2}{R}\frac{\partial T}{\partial\theta} = -\frac{\lambda\ell^2}{R}\dot{f}(\theta)g(t)$ En absence de chauffage $\Phi(\theta=0,t) = 0 \Longrightarrow \dot{f}(\theta=0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ donc :

$$T(\theta,t) = K + \underbrace{g_0 A}\cos(\frac{R}{d}\theta)\exp -\frac{\lambda}{\rho c d^2}t$$

2.2.8 on a : $T(\theta=0,t) = T(\theta=2\pi,t) \Longrightarrow \frac{R}{d} = n \in \aleph^*$ soit : $d_n = \frac{R}{n}$ et $\tau_n = \frac{\rho c d_n^2}{\lambda} = \frac{\rho c R^2}{\lambda n^2}$

2.2.9 l'équation de chaleur est linéaire , on superpose les solutions 2.2.8 :

$$T(\theta,t) = T_m + \sum A_n \cos n\theta \exp -\frac{t}{\tau_n}$$

on vérifie qu'on a $T(\theta=0,t) = T(\theta=2\pi,t)$ et aussi

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}(\theta=0,t) = 0$$

$T_m = < T >_\theta$,les A_n seront calculés à t=0

2.2.10 $\tau_1 = \frac{\rho c R^2}{\lambda} = 1142s$

$\tau_2 = \frac{\rho c R^2}{\lambda 2^2} = 286s$

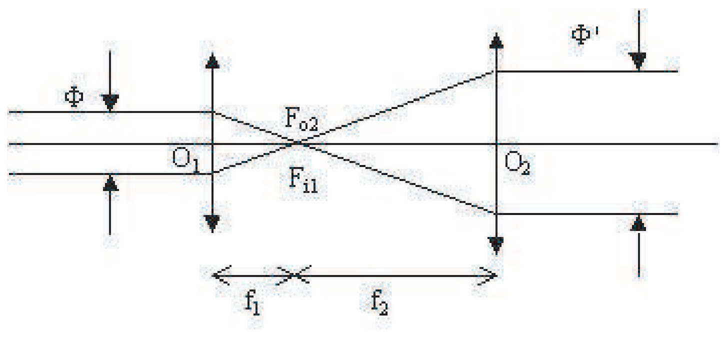
$\tau_3 = \frac{\rho c R^2}{\lambda 3^2} = 126s$

2.2.11 après une durée $5\tau_2 = 23\ min$ tous les termes $n \geq 2$ disparaissent , il reste :
$T(\theta,t) = T_m + A_1\cos\theta\exp -\frac{t}{\tau_1}$, l'écart $T - T_m = A_1\cos\theta\exp -\frac{t}{\tau_1}$ est proportionnel au $\cos\theta$!

$3^{ème}$ partie : Mesure optique d'un coefficient de transfert conducto- convectif

3.1

3.1.1 $F_{i1} \equiv F_{o2}$, soit $O_1O_2 = f_1 + f_2$

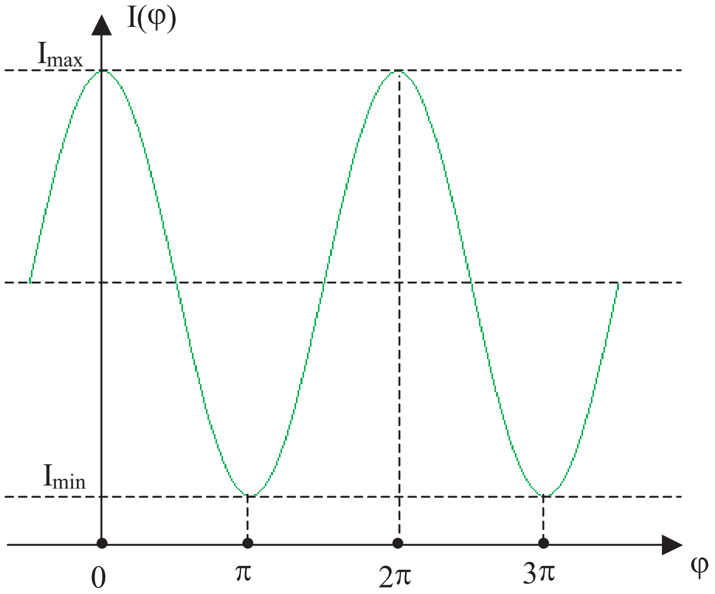


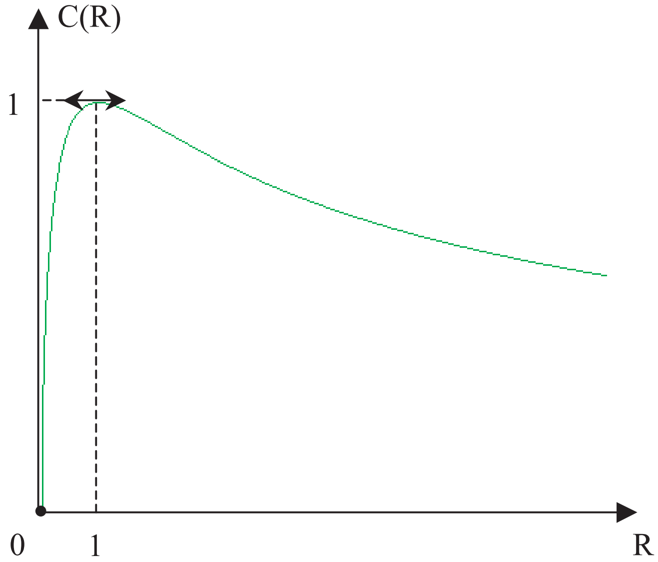
3.1.2 $\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{f_2}{f_1}$

3.2

3.2.1 $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi$

3.2.2 :





$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$
$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

3.2.3 $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{R}}{1+R}$ on a :

$$C' = \frac{1 - R}{\sqrt{R}(1+R)^2}$$

3.2.4 $C_{max} = 1$, pour $R = 1$ donc il faut éclairer les deux miroirs de façon égales

3.3

3.3.1 Une frange $I(x) = cte \iff x = cte$ est une droite parallèle à Oy $\iff T(x) = cte$ surface isotherme

ou bien : $I = cte \iff \varphi = cte \iff \delta = cte \iff n = cte \iff T = cte$

3.3.2 on a : $p = \frac{|\varphi|}{2\pi} = \frac{|\delta|}{\Lambda}$ or

$$\delta = \delta_{geo} + \delta_{ond} = [(SM)_2 - (SM)_1] + [2\frac{\Lambda}{2} - 2\frac{\Lambda}{2}]$$

$$\delta = [(SA)+n_\infty AC+n_\infty(CD-L)+nL+(DM)]-[(SA)+n_\infty AB+n_\infty BD+nL+(DM)] = L(n-n_\infty)$$

soit

$$\delta = LA(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T})$$

or $T_{plaque} > T > T_\infty$ donc $p = \frac{LA}{\Lambda}(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T}) > 0$

3.3.3 $p_s = \frac{LA}{\Lambda}(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_s})$

3.3.4 d'après 3.3.2 et 3.3.1 on aura :

$$\frac{p}{p_s} = \frac{\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_p}}{\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_s}} \iff T_p = \frac{T_\infty}{1 - \frac{p}{p_s}(1 - \frac{T_\infty}{T_s})}$$

3.4

3.4.1 on a : $\frac{dp}{dT} = \frac{LA}{\Lambda}\frac{1}{T^2} > 0$ donc p est maximal pour T maximale càd au niveau de la plaque $(T_s > T(x) > T_\infty)$

3.4.2 pour $p(T_\infty) = 0$,on compte du haut vers la plaque les ordres d'interférence des franges sombres $0.5 - 1.5 - 2.5 - 3.5 - 4.5 - 5.5 - 6.5$

3.4.3 d'après figure 6 , on a : $x_p = (N^\circ - 159) \times 303\mu m$ l'ordre d'interférence au niveau de la plaque ,d'après l'énoncé ,est entier donc $p_s = 7$

soit :

$$T_p = \frac{294}{1 - \frac{p}{7}(1 - \frac{294}{328})}$$

p	6.5	5.5	4.5	3.5	2.5	1.5	0.5
N°	163	167	172	177	184	196	219
$x_p(mm)$	1.21	2.42	3.94	5.45	7.57	11.2	18.2
$T(x_p)(K)$	325	320	314	310	305	300	296

3.5

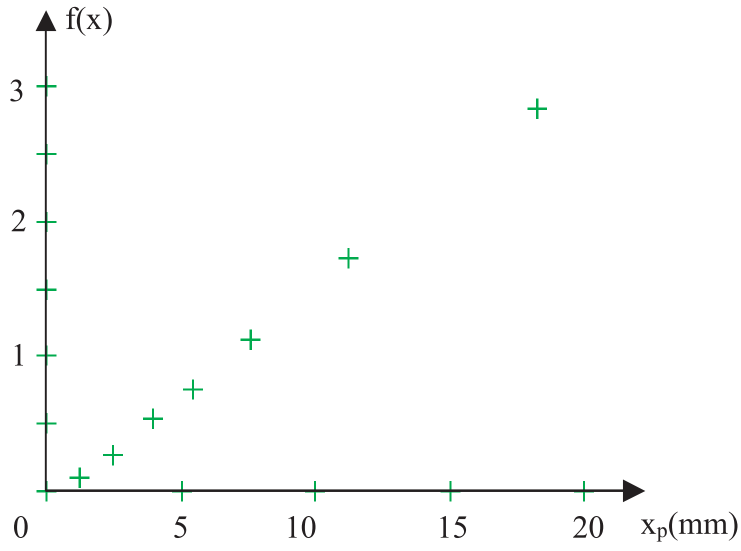
3.5.1 $T(x = +\infty) = \alpha = T_\infty$ et $T(x = 0) = \alpha + \beta = T_s$ soit :

$$\alpha = T_\infty$$

$$\beta = T_s - T_\infty$$

3.5.2 on représente la loi linéaire $f(x) = \ln\frac{T_s - T_\infty}{T - T_\infty} = kx$ avec $T_s = 328K$ et $T_\infty = 294K$

$T(x_p)(K)$	325	320	314	310	305	300	296
$x_p(mm)$	1.21	2.42	3.94	5.45	7.57	11.2	18.2
$f(x_p)$	0.092	0.27	0.53	0.75	1.13	1.73	2.83



soit : $k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = 160\ m^{-1}$

3.5.3 ***(dans l'énoncé il manque $S = L^2$ dans l'expression de Φ_{cc} !)***

Fourier au niveau de la plaque :

$$\Phi = j_{th} S = -\lambda_a S \frac{dT}{dx}(x = 0) = kS\lambda_a \beta = kS\lambda_a (T_s - T_\infty)$$

d'où : $h = k\lambda_a$

3.5.4 A.N : $h = 4.24\ WK^{-1}m^2$.

fin du corrigé