Quelques aspects de la physique des plasmas

$1^{ère}$ partie : Réponse d'un plasma à un champ électromagnétique

1.1 Préliminaires

1.1.1 $[\vec{f}] = [m\vec{a}] = [\frac{m\vec{v}}{\tau}] \Longrightarrow [\tau]$ est un temps en s

1.1.2 les chocs

1.1.3 $m_e\frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m_e}{\tau}\vec{v}$ force magnétique et poids négligés donc $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}}$

1.1.4 $\vec{j} = \rho_m\vec{v} = -n_e e\vec{v}$

1.1.5 PFD devient $\boxed{\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{n_e e^2}{m_e}\vec{E}}$

1.2 Pulsation plasma

1.2.1 $div(M-A) \Longrightarrow 0 = div\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ tenant compte de $(M-G) \Longrightarrow \boxed{div\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$

soit : $div(1.1.5)$ et $M-G \Longrightarrow \boxed{\ddot{\rho} + \frac{1}{\tau}\dot{\rho} + \frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}\rho = 0}$

1.2.2 $\ddot{\rho} + \frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}\rho \approx 0 \Longrightarrow \rho(M,t) = \rho(M,0)\cos(\omega t)$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}}$ indépendante du point M c'est une oscillation homogène d'ensemble

1.2.3

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$$

milieu	pulsation (Hz)	longueur d'onde	domaine
ionosphère	$18\ 10^6$	1.05 km	Hertzienne
décharge	$1.8\ 10^{12}$	1.05 mm	Radio
Aluminium ($3e^-$)	$2.7\ 10^{16}$	0.07 μm	U.V
Sodium	$1.4\ 10^{16}$	0.13 μm	U.V

1.3 Conductivité électrique

1.3.1 $(1.1.5) \Longrightarrow \underline{\vec{j}} = \frac{\tau}{1-i\tau\omega}\frac{n_e e^2}{m_e}\underline{\vec{E}}$ d'où : $\boxed{\underline{\vec{j}} = \frac{\tau\varepsilon_0\omega_p^2}{1-i\tau\omega}\underline{\vec{E}}}$

1.3.2 loi d'Ohm généralisée $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\ \underline{\vec{E}}$ si : $\underline{\sigma} = \frac{\tau\varepsilon_0\omega_p^2}{1-i\tau\omega}$

$2^{ème}$ partie : Auto confinement d'une couche de plasma

2.1 Le plan (M, Oz) est un plan de symétrie P^+ des courants donc $\vec{B} \perp P^+$ soit : $\vec{B} = B(r,\theta,z)\vec{u}_\theta$

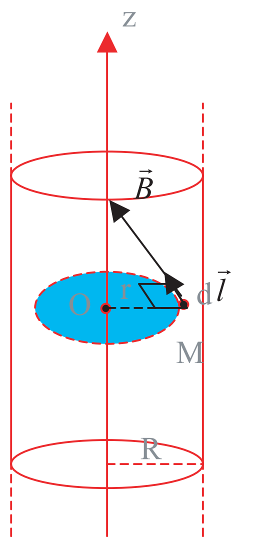
La colonne est invariante par rotation et translation selon Oz donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.

Le théorème d'ampère en régime permanent appliqué sur un contour circulaire d'axe Oz, de rayon r :

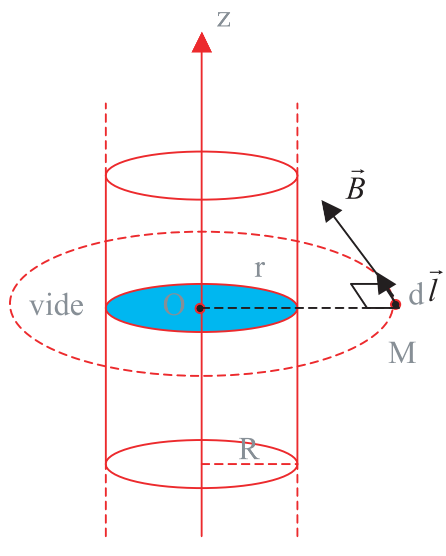
$$\int_\Gamma B(r)\vec{u}_\theta.rd\theta\vec{u}_\theta = \mu_0\int\int_{S_\Gamma}\vec{j}.dS\vec{u}_z$$

or $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{u}_z$, il vient :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r\vec{e}_\theta & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta & r \geq R \end{cases}$$



r < R



r > R

2.2 $d\vec{F}_m = \vec{j}d\tau \times \vec{B}_{int} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{z}d\tau \times \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r\vec{e}_\theta = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} d\tau \vec{e}_r$
c'est une force centripète donc la colonne s'auto-confine !

2.3 sur un élément $d\tau = dxdydz$ la résultante des forces de pression projetée sur Ox :

$$dF_x = -p(x+dx,y,z)dydz + p(x,y,z)dydz = -\frac{\partial p}{\partial x}d\tau$$

il vient sur les trois axes : $\boxed{\vec{f}_{vol} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = -\vec{\nabla}p}$

2.4 à l'équilibre $d\vec{F}_{magn} + d\vec{F}_{pr} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\nabla}p = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4}\vec{e}_r \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial p}{r\partial\theta} \\ \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \\ \\ 0 \\ \\ 0 \end{array} \right.$

soit : $p(r) = -\frac{\mu_0 I^2 r^2}{4\pi^2 R^4} + cte$ or $p(r=R) = 0$ car la colonne est dans le vide
soit :

$$\boxed{p(r) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4}(R^2 - r^2)}$$

2.5 on a : $N\ell = \int\int\int n(r)d\tau = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \frac{1}{k_B T}\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4}(R^2 - r^2) r dr d\theta dz$
soit $\boxed{N = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi k_B T}}$

2.6 d'après le théorème de l'équipartition de l'énergie en théorie cinétique $\bar{E}_c = \frac{1}{2}k_B T$ car les particules sont dirigées selon le courant Oz or $n_0 \ell \pi R^2 = N\ell$ sachant que $1eV = 1.6\ 10^{-19} J$ on aura $\boxed{I = 4\sqrt{\frac{\pi R^2 n_0 \bar{E}_c}{\mu_0}} = 1.7\ 10^6 A}$

$3^{ème}$ partie :
Effet d'écran dans un plasma

3.1 Loi de Boltzmann

3.1.1 $-\vec{\nabla}p + \vec{f_e} = \vec{0}$ avec $\vec{f_e} = \frac{d\vec{F_e}}{d\tau} = nq\vec{E} = -nq\vec{\nabla}V$

En symétrie sphérique : $\frac{dp(r)}{dr} = -qn(r)\frac{dV(r)}{dr}$ or $p = nk_BT$ donc $\boxed{k_BT\frac{dn}{n} = -qdV}$

3.1.2 soit $n = cte\exp -\frac{qV}{k_BT}$ à l'infini $V = 0$ et $n = n_0$ donc $\boxed{n = n_0\exp -\frac{qV}{k_BT}}$

3.2 Longueur de Debye

3.2.1 milieu globalement neutre $n_0e + \bar{n}_e(-e) = 0 \Longrightarrow \bar{n}_e = n_0$

3.2.2

3.2.2.1 $\rho = (n_i - n_e)e = +en_0\exp -\frac{eV}{k_BT} + (-e)n_0\exp -\frac{-eV}{k_BT} = -2n_0e\sinh\frac{eV}{k_BT}$

3.2.2.2 si $eV \ll k_BT$ alors $\boxed{\rho \approx -\frac{2n_0e^2}{k_BT}V}$

3.2.3

3.2.3.1 on a : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ d'où $\underbrace{div\overrightarrow{grad}}V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ soit $\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$

3.2.3.2 En symétrie sphérique $\frac{1}{r}\frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}V = 0 \Longrightarrow \frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{(rV)}{\lambda_D^2} = 0$ avec $\boxed{\lambda_D = \sqrt{\frac{k_BT\varepsilon_0}{2n_0e^2}}}$

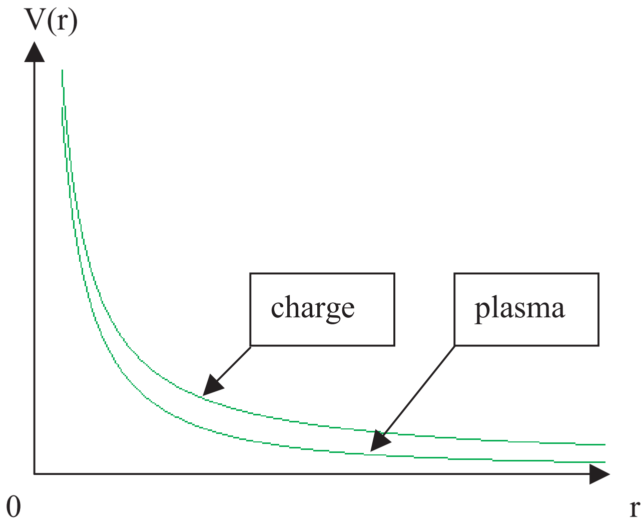
3.2.3.3 $rV = A\exp -\frac{r}{\lambda_D} + B\exp +\frac{r}{\lambda_D}$ les conditions aux limites :

$V(r \to \infty) = 0 \Longrightarrow B = 0$

$V(r \to 0) \approx \frac{+e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \Longrightarrow A = \frac{+e}{4\pi\varepsilon_0}$ celui de l'ion fixe à l'origine

soit $\boxed{V(r) = \frac{+e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\exp(-\frac{r}{\lambda_D})}{r}}$

3.2.3.4 :



dans le plasma le potentiel décroît plus vite c'est l'effet d'écran causé par les autres charges

3.2.4

3.2.4.1 $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r = \frac{+e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2}(1 + \frac{r}{\lambda_D})\exp(-\frac{r}{\lambda_D})$

3.2.4.2 théorème de Gauss $Q_{int} = \varepsilon_0\int\int E(r = R)\vec{e}_r.dS\vec{e}_r = \varepsilon_0E(r = R)4\pi R^2$

soit $\boxed{Q_{totale}(R) = e(1 + \frac{R}{\lambda_D})\exp(-\frac{R}{\lambda_D})}$

si $R \to +\infty$ (tout le milieu) alors $Q_{totale} \to 0$ le milieu est globalement neutre !

$4^{ème}$ partie :
Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

4.1 Relations générales

4.1.1

4.1.1.1 – onde qui ne dépend que d'une seule variable cartésienne et du temps
– onde vectorielle transversale est $\perp$ à la direction de propagation
– onde vectorielle longitudinale est // à la direction de propagation

4.1.1.2 Max-flux $div\vec{B} = 0 \Longrightarrow \exists\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$
Max-Faraday $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Longrightarrow \overrightarrow{rot}(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = \vec{0} \Longrightarrow \exists\phi$ tel que $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla}\phi$

4.1.1.3 non , $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\nabla}\varphi$ et $\phi' = \phi - \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ sont aussi des potentiels électromagnétiques

4.1.2

4.1.2.1 on a : $div\vec{A}(z,t) = \frac{\partial A_x(z,t)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(z,t)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(z,t)}{\partial z} = 0 \Longrightarrow A_z$ ne dépend que de t qui ne décrit donc pas une onde , donc on prend $A_z \equiv 0$ et $\vec{A} = \vec{A}_\perp$

4.1.2.2 de même M-flux $div\vec{B}(z,t) = 0 \Longrightarrow \vec{B}_{//} = \vec{0}$ donc $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \Longleftrightarrow \vec{B}_\perp = \overrightarrow{rot}\vec{A}$

4.1.2.3 $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}_\perp}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z \Longrightarrow \boxed{\vec{E}_{//} = -\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z}$

4.1.2.4 $\boxed{\vec{E}_\perp = -\frac{\partial\vec{A}_\perp}{\partial t} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

4.1.3

4.1.3.1 on a : (1) $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla}\phi$ et $div\vec{A} = 0$
div(1)$\Longrightarrow \boxed{\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\Delta\phi}$

4.1.3.2 $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{rot}\vec{B} \Longleftrightarrow \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
$\Delta\vec{A} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla}\phi) + \mu_0\vec{j} = \vec{0} \Longleftrightarrow \boxed{\Delta\vec{A} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0\vec{j} = \frac{1}{c_0^2}\overrightarrow{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial t}\vec{e}_z}$
la jauge utilisée est de Coulomb et non pas de Lorentz

4.1.3.3 projection $\perp$ à Oz : $\boxed{\Delta\vec{A} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0\vec{j}_\perp = \vec{0}}$

4.1.3.4 projection // à Oz : $\boxed{\mu_0\vec{j}_{//} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial t}\vec{e}_z}$

4.1.4

4.1.4.1 $m_e\vec{a} \approx -e\vec{E} \Longrightarrow$ au premier ordre $\boxed{m_e\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}}$

4.1.4.2 d'après 4.1.2.4 $\vec{E}_\perp = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ soit $m_e\frac{\partial\vec{v}_\perp}{\partial t} = +e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Longrightarrow m_e\vec{v} = e\vec{A} + \underbrace{\vec{f}(z)}$
le terme ne dépendant que de z ne décrit pas une propagation
soit $\boxed{m_e\vec{v} = e\vec{A}}$

4.1.4.3 $\vec{j} = -n_e e\vec{v} = -e(n_0 + \Delta n)\vec{v} \approx -n_0 e\vec{v}$

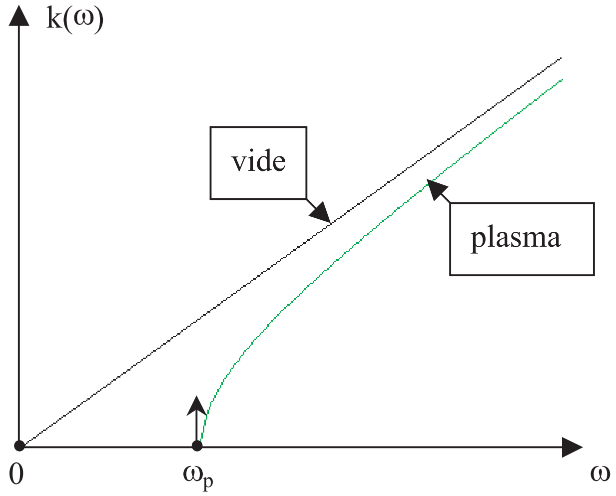
4.1.5 4.1.3.3 $\Longrightarrow \boxed{\Delta\vec{A} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{n_0e^2}{m_e}\vec{A} = \vec{0}(**)}$

4.2 Conditions de propagations

4.2.1 (**) en notation complexe $[(i\vec{k})^2 - \frac{1}{c_0^2}(-i\omega)^2 - \mu_0\frac{n_0e^2}{m_e}]\underline{\vec{A}} = \vec{0} \Longrightarrow k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c_0^2}$

4.2.2

4.2.2.1 pour le vide $k = \frac{\omega}{c_0}$ et pour le plasma $k = \sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c_0^2}}$



4.2.2.2 il y a propagation si k est réel càd $\omega > \omega_p$ sinon k serai complexe tel que $k = i\sqrt{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c_0^2}} = ik'$ il vient $\underline{\vec{A}} = \vec{A}_0 \exp i(ik'z - \omega t)$ en notation réelle $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-k'z}\cos\omega t$ qui est une onde stationnaire atténuée

4.2.3

4.2.3.1 $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}c_0 > c_0$ car la phase n'est ni matière ni énergie

4.2.3.2 $v_g = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega}c_0 < c_0$

4.2.3.3 $v_\varphi v_g = c_0^2$

4.3 Ondes longitudinales

4.3.1 on a $\mu_0\underline{\vec{j}}_{//} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial t}\vec{e}_z \Longrightarrow \underline{\vec{j}}_{//} = \varepsilon_0 k\omega\underline{\phi}$

4.3.2 on a $\underline{\vec{j}}_{//} = -en_0\underline{\vec{v}}_{//} \Longrightarrow \underline{\vec{v}}_{//} = -\frac{k\omega\varepsilon_0}{n_0 e}\underline{\phi}\vec{e}_z$

4.3.3 PFD $m_e\frac{\partial\vec{v}_{//}}{\partial t} = -e\vec{E}_{//} = e\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z \Longrightarrow \boxed{\underline{\vec{v}}_{//} = -\frac{ek}{m_e\omega}\phi\vec{e}_z}$

4.3.4 4.3.2 et 4.3.3 donne : $\frac{ek}{m_e\omega} = \frac{k\omega\varepsilon_0}{n_0 e} \Longrightarrow \omega = \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e\varepsilon_0}}$ et k quelconque , c'est une oscillation collective du plasma

$5^{ème}$ partie :
Effets collectifs dans un plasma - Plasmons

5.1 Préliminaire

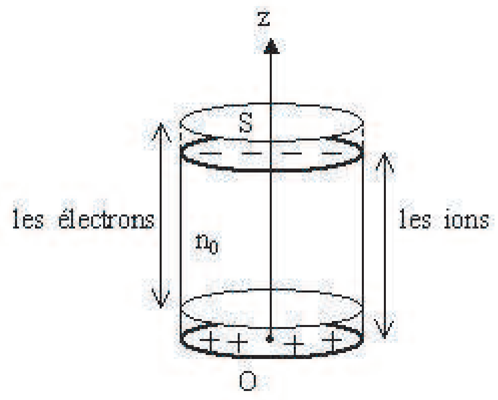
5.1.1 champ créé par un plan infini uniformément chargé $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$

5.1.2 par superposition $\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{extérieur} \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{intérieur} \end{cases}$

5.2 Oscillations longitudinales d'une colonne de plasma

5.2.1 car $m_i \gg m_e$

5.2.2 $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{en_0 zS}{S} \Longrightarrow \sigma = en_0 z$



5.2.3 $\vec{F} = -e\vec{E}_{int} = -e\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \Longrightarrow \vec{F} = -\frac{e^2 n_0 z}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$

5.2.4 PFD sur Oz : $m_e\ddot{z} = -\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0}z \Longrightarrow \ddot{z} + \omega_p^2 z = 0$

5.2.5 $z(t) = z_0\cos(\omega_p t)$ les électrons effectuent ensemble une oscillation à la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$

5.3 Plasmon

5.3.1 $E_c^{(1)} = E_c - \hbar\omega_p$

5.3.2 $E_c^{(n)} = E_c - n\hbar\omega_p$

5.3.3

5.3.3.1 $\hbar\omega_p = 15\ eV = 24\ 10^{-19}J$

5.3.3.2 $n_0 = \frac{\omega_p^2 m_e \varepsilon_0}{e^2} = 16.4\ 10^{28}m^{-3}$.

fin du corrigé