Satellites artificiels

$1^{ère}$ partie : Étude générale

1.1 Yamama , télécommunication

1.2 $G(r) = \frac{GM_T}{r^2}$ or $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ donc $G(r) = \frac{g_0 R_T^2}{r^2}$

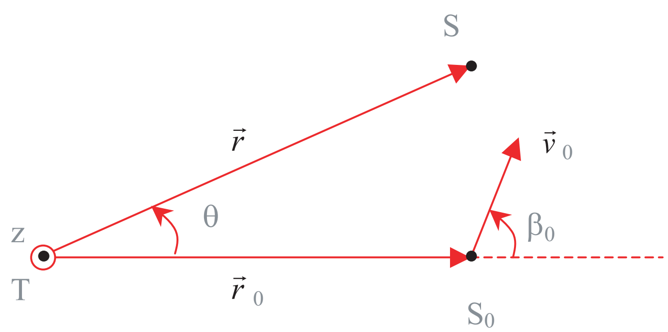
1.3

1.3.1 dans R_G Galiléen le TMC en T appliqué au satellite :

$$\frac{d\vec{\sigma}_T}{dt} = \overrightarrow{TS} \times -G\frac{mM_T}{TS^3}\overrightarrow{TS} = \vec{0}$$

donc $\vec{\sigma}_T = \overrightarrow{TS} \times m\vec{v} = \overrightarrow{cte}$ soit $\overrightarrow{TS}.\overrightarrow{cte} = ax + by + cz = 0$ c'est l'équation cartésienne du plan passant par l'origine T et $\perp$ à $\vec{\sigma}_T$ càd le plan formé par $(\overrightarrow{TS}, \vec{v}_0)$

1.3.2 :



1.3.3 $\vec{\sigma} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\vec{u}_r \times m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ soit $\sigma = mr^2\dot{\theta}$

d'après les conditions initiales $\vec{\sigma} = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 = mr_0v_0 \sin\beta_0\vec{u}_z$ donc $\boxed{\sigma = mr_0v_0\sin\beta_0}$

1.4 par dérivation $(\sigma = cte)$ on a $\frac{d\vec{H}}{dt} = m\vec{a} - \frac{K}{\sigma}(\vec{u}_z \times \frac{d\vec{u}_r}{dt}) = -m\frac{g_0R_T^2}{r^2}\vec{u}_r + \frac{K}{\sigma}\dot{\theta}\vec{u}_r$

donc $\vec{H}$ est constant si $-m\frac{g_0R_T^2}{r^2} + \frac{K}{\sigma}\dot{\theta} = 0$ or $\sigma = mr^2\dot{\theta}$ donc $\boxed{K = m^2g_0R_T^2}$

1.5

1.5.1 $\overrightarrow{OA} = \vec{v} = \frac{\vec{H}}{m} + \frac{K}{m\sigma}(\vec{u}_z \times \vec{u}_r) = \frac{\vec{H}}{m} + \frac{K}{m\sigma}\vec{u}_\theta = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{OA}$ est la somme d'un vecteur constant et d'un vecteur de norme constante et direction variable donc l'hodographe sera un cercle

1.5.2 si O est à l'extérieur de H seules les directions comprises dans l'angle représenté seront permises à $\vec{v}$ (fig a)

si O est à l'intérieur de H toutes les directions seront permises à $\vec{v}$ (fig b)

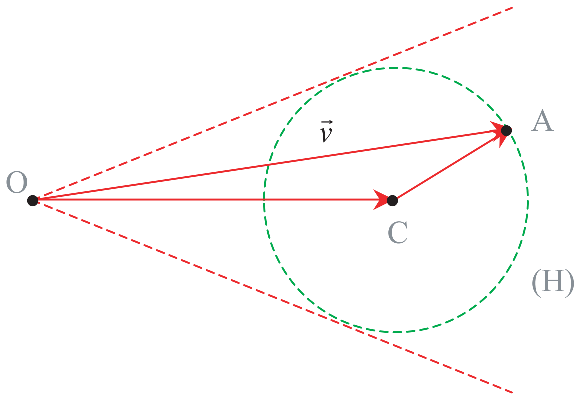


figure a

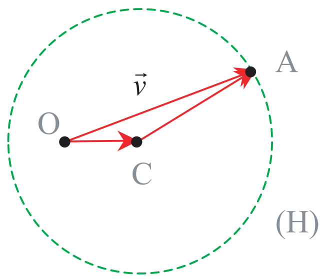


figure b

1.5.3 O est à l'intérieur de H correspond à une trajectoire : cercle ou ellipse

O est à l'extérieur de H correspond à une trajectoire : parabole ou hyperbole

1.5.4 $\vec{H}$ est porté par $\overrightarrow{OC}$ donc // à $\vec{v}_{périgée}$, la trajectoire est circulaire si $\vec{H} = \vec{0}$ car $|\vec{v}| = cte$

1.6

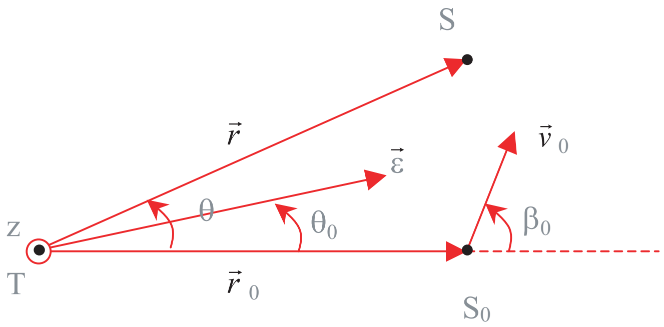
1.6.1 $\vec{H}$, $\vec{\sigma}$ et K sont constants donc $\vec{\epsilon}$ l'est aussi.

Le vecteur $\vec{\epsilon}$ est normal à $\vec{\sigma}$ donc sera dans le plan du mouvement (car $\vec{\sigma}$ est normal au plan du mouvement).

1.6.2 $\vec{r}.\vec{\epsilon} = \frac{1}{K}(\vec{H} \times \vec{\sigma}).\vec{r} = \frac{1}{K}[(m\dot{r}\vec{u}_r + mr\dot{\theta}\vec{u}_\theta - \frac{K}{\sigma}\vec{u}_\theta) \times \sigma\vec{u}_z].r\vec{u}_r = \frac{\sigma^2}{K} - r$

or : $\vec{r}.\vec{\epsilon} = r\epsilon\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{\epsilon}})$, soit :

$$r = \frac{\frac{\sigma^2}{K}}{1 + \epsilon\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{\epsilon}})}$$



il vient $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ avec $p = \frac{\sigma^2}{K}$ et $e = |\vec{\epsilon}|$

θ_0 représente l'angle entre $\overrightarrow{TS}_0$ et $\vec{\epsilon}$

1.6.3 $p = \frac{\sigma^2}{K} = \frac{(mr_0v_0\sin\beta_0)^2}{m^2g_0R_T^2} = r_0\alpha_0\sin^2\beta_0$

on a $e^2 = |\vec{\epsilon}|^2 = \frac{1}{K^2}H^2\sigma^2$ car d'après 1.3.3 et 1.5.4 $\vec{H} \perp \vec{\sigma}$

or $\vec{H} = \vec{H}(t=0) = m\vec{v}_0 - \frac{K}{\sigma}\vec{y} = mv_0 \cos\beta_0 \vec{x} + (mv_0 \sin\beta_0 - \frac{K}{\sigma})\vec{y}$

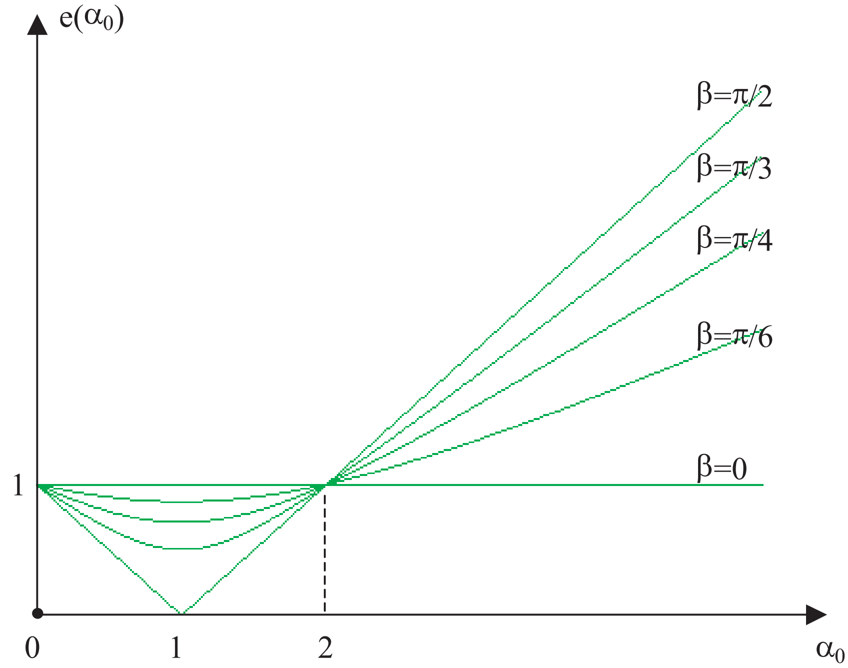
soit $e^2 = \frac{1}{K^2}H^2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{K^2}[(mv_0\cos\beta_0)^2 + (mv_0\sin\beta_0 - \frac{K}{\sigma})^2]$

$\Longrightarrow e^2 = 1 + \alpha_0(\alpha_0 - 2)\sin^2\beta_0$

1.7

1.7.1 on a : $e(\alpha_0 = 0) = e(\alpha_0 = 2) = 1 \quad \forall \beta_0$

en particulier pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ on a $e(\alpha_0) = |1 - \alpha_0|$ et pour $\beta_0 = 0$ on a $e(\alpha_0) = 1$



1.7.2 :

α_0 qlq et $\beta_0 = 0$	rectiligne !
$\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$	$e = 0$ cercle
$\alpha_0 < 2$ et $\beta_0 \neq \frac{\pi}{2}$	$e < 1$ ellipse
$\alpha_0 = 2$	$e = 1$ parabole
$\alpha_0 > 2$	$e > 1$ hyperbole

la vitesse de libération est la vitesse minimale d'avoir une trajectoire non bornée (para ou hyperbole), ceci correspond à la trajectoire parabolique donc

$$\alpha_0 = 2 \Longrightarrow v_\ell = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{r_0}} = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{z_0 + R_T}}$$

1.7.3 $\underline{\alpha_0 = 1}$ et $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, la vitesse s'écrit donc $V = \sqrt{\frac{g_0R_T^2}{R}}$

1.8 $\alpha_0 = 1$

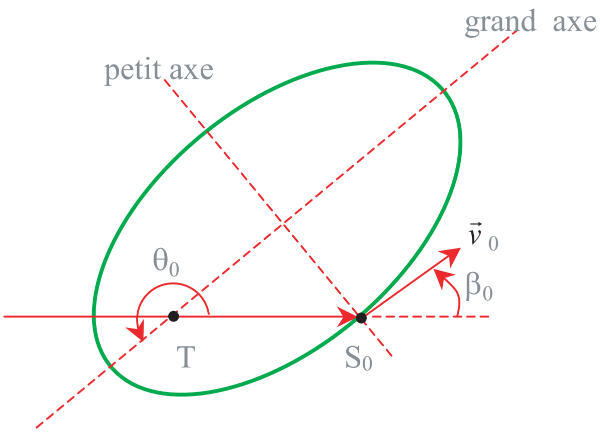
1.8.1 la trajectoire sera une ellipse

1.8.2 on a $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ donc $r_0 = \frac{p}{1+e\cos\theta_0}$

soit , tenant compte de $\alpha_0 = 1$, $\cos\theta_0 = \frac{\frac{p}{r_0}-1}{e} = \frac{\sin^2\beta_0 - 1}{\sqrt{1-\sin^2\beta_0}} = -\cos\beta_0 < 0$

soit $\theta_0 = \pi + \beta_0$

1.8.3 un sommet du grand-axe (périgée ou apogée) est tel que $\theta = \theta_0 ou \theta_0 + \pi$
$\vec{v}_0//$au grand axe donc S_0 appartient au petit axe



$2^{ème}$ partie : Satellites circulaires

2.1 Satellites en orbite basse

2.1.1 le TRC dans la base de Freinet $-m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = -G\frac{M_T m}{R^2}\vec{e}_r$ soit $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R}}}$

2.1.2 $T = \frac{2\pi R}{v}$ d'où la loi de Kepler $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

2.1.3 la symétrie sphérique de la force gravitationnelle implique qu'il n'y a aucune restriction sur le plan de la trajectoire ni sur le sens de rotation
les satellites polaires sont ceux dont le plan de la trajectoire contient l'axe des pôles Nord-Sud de la terre

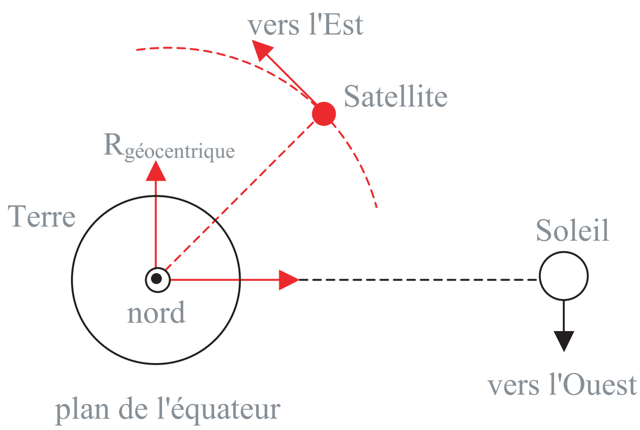
2.2 Satellites géostationnaires

2.2.1 un tel satellite est fixe pour un observateur lié à la terre ; la télécommunication

2.2.2 on a $\frac{T_0^2}{(z_G+R_T)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ or $GM_T = g_0 R_T^2$ donc $\boxed{z_G = (\frac{g_0 R_T^2 T_0^2}{4\pi^2})^{\frac{1}{3}} - R_T}$

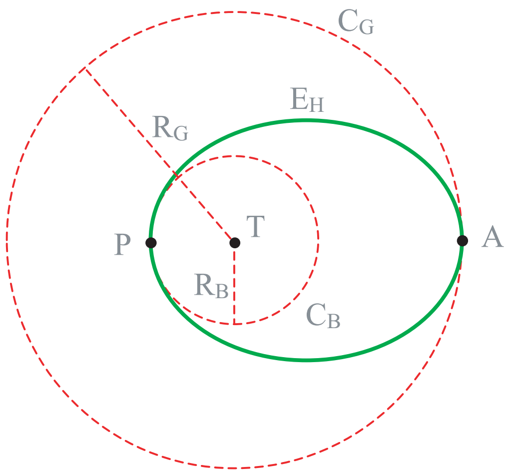
2.2.3 $z_G = 36000\ km$, car la terre est en mouvement autour du soleil

2.2.4 le plan de l'équateur , même sens de rotation de la terre vers l'Est.



2.3 Transfert d'orbite

2.3.1 les 3 trajectoires sont co-planaires



2.3.2 l'énergie mécanique s'écrit $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{g_0 R_T^2}{r} \Longrightarrow \frac{1}{2}v_A^2 - \frac{g_0 R_T^2}{R_G} = \frac{1}{2}v_P^2 - \frac{g_0 R_T^2}{R_B}$
et $\sigma = mv_A R_G = mv_P R_B \Longrightarrow R_B^2 v_P^2 = R_G^2 v_A^2$ car en A et P on a $\vec{v} \perp \vec{r}$
il vient $\boxed{v_P = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2 R_G}{R_B(R_G+R_B)}}} \quad \boxed{v_A = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2 R_B}{R_G(R_G+R_B)}}}$

2.3.3 de C_B à E_H , $\Delta v_1 = v_P - v_{circulaire R_B} = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2 R_G}{R_B(R_G+R_B)}} - \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_B}} > 0$ il faut pulser le satellite par injection des gaz vers l'arrière

de E_H à C_G , $\Delta v_2 = v_{circulaire R_G} - v_A = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_G}} - \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2 R_B}{R_G(R_G+R_B)}} < 0$ il faut freiner le satellite par injection des gaz vers l'avant

2.3.4 $\Delta t = \frac{T}{2}$ or d'après la loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}$
avec $a = \frac{R_B+R_G}{2}$ étant le demi-grand axe , soit $\boxed{\Delta t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^2 (R_B+R_G)^3}{2g_0 R_T^2}}}$

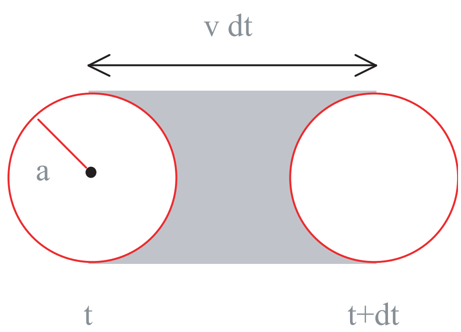
2.3.5 à partir de l'équation polaire en apogée $R_G = \frac{p}{1-e_H}$ et en périgée $R_B = \frac{p}{1+e_H}$
il vient $e_H = \frac{R_G-R_B}{R_G+R_B} \in]0,1[$

$3^{ème}$ partie : Influence de l'atmosphère terrestre

3.1 Modèle de force de frottement

3.1.1 le choc est mou càd la molécule se colle au satellite après le choc , la conservation de la quantité de mouvement s'écrit $m\vec{v} + m'\vec{0} = (m+m')\vec{v}'$ car molécule au repos avant la choc
soit $\vec{v}\,' = \frac{m}{m+m'}\vec{v} \approx (1 - \frac{m'}{m})\vec{v}$ donc pour le satellite $\Delta\vec{p} = m\vec{v}\,' - m\vec{v} = -m'\vec{v}$

3.1.2 :



la force s'exerçant sur le satellite s'écrit , par application du PFD , $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ or $d\vec{p} = dN\ \Delta\vec{p}$ avec dN le nombre de choc subit entre t et $t + dt$ qui est le nombre de molécule se trouvant dans le volume balayé par le satellite

$dN = \frac{\mu d\tau}{m'} = \frac{\mu v dt \pi a^2}{m'}$ soit $\vec{F} = -\mu(z)\Sigma v\vec{v}$ donc $\boxed{k(z) = \pi a^2 \mu(z)}$ πa^2 représente la section droite du tube balayé d'air par le satellite appelé aussi section efficace

non , l'expression est indépendante de la forme du satellite

3.1.3 l'équation de la statique des fluides $-\overrightarrow{\nabla}p + \mu\vec{g_0} = \vec{0}$ projetée sur Oz donne $\frac{dp}{dz} = -\mu g_0$ or l'air est un gaz parfait isotherme $p = \frac{\mu RT}{M}$

soit $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{g_0 M}{RT}dz = -\frac{dz}{H}$ il vient $\mu(z) = m(0)\exp(-\frac{z}{H})$ avec $H = \frac{RT}{Mg_0}$ et $\mu_0 = \mu(z = 0)$ masse volumique de l'air à la surface du sol !

3.2 Freinage du satellite

3.2.1 trajectoire presque circulaire $v^2 \approx \frac{g_0 R_T^2}{R}$ avec $R = z + R_T$ on différentie $2vdv \approx -\frac{g_0 R_T^2}{R^2}dz$

3.2.2 les frottement étant faible l'énergie mécanique se conserve presque $E_M = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{g_0 R_T^2}{R} \approx cte$ si $z \searrow \Longrightarrow R \searrow \Longrightarrow v \nearrow$

3.2.3 $dE_M = mvdv + \frac{mg_0 R_T^2}{R^2}dz$ d'après 3.2.1 il vient $\boxed{dE_M = \frac{mg_0 R_T^2}{2R^2}dz}$

3.2.4 $\delta W = \vec{F}.\vec{v}dt = -\mu(z)\Sigma v^3 dt$

3.2.5 le théorème de l'énergie mécanique s'écrit $dE_M = \delta W \Longrightarrow \frac{mg_0 R_T^2}{2R^2}dz = -\mu(z)\Sigma v^3 dt$

or $v^2 \approx \frac{g_0 R_T^2}{R}$ il vient $\boxed{\frac{dz}{dt} = -\frac{2\Sigma}{m}\mu(z)vR}$ avec $B = \frac{2\Sigma}{m}$

3.2.6 orbite basse $R = R_T$ et $v \approx \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T}$

donc $\frac{dz}{dt} = -\frac{2\Sigma R_T \mu_0 \sqrt{g_0 R_T}}{m}\exp(-\frac{z}{H})$ par séparation des variables $\boxed{e^{\frac{z}{H}}dz = -\frac{H}{\tau}dt}$ par intégration $z(t) = H\ln(-\frac{t}{\tau} + \exp\frac{z_0}{H})$ avec τ est un temps

3.2.7 la durée de chute t_0 est donnée par $z(t_0) = 0$

soit $t_0 = \tau\exp\frac{z_0}{H}$ avec $z_0 = h = 270\ 10^3 m$

A.N $\tau = 6.4\ 10^{-6}s$ et $t_0 = 6.4\ 10^7 s = 775\ jours$ la chute est lente

3.2.8 on a $v \approx \sqrt{g_0 R_T} = 7745\ ms^{-1}$ et $v_{th} = 500\ ms^{-1}$ donc on peut négliger réellement la vitesse d'agitation thermique des molécules ceci ne remet pas en cause l'hypothèse de molécule au repos avant le choc !

fin du corrigé