

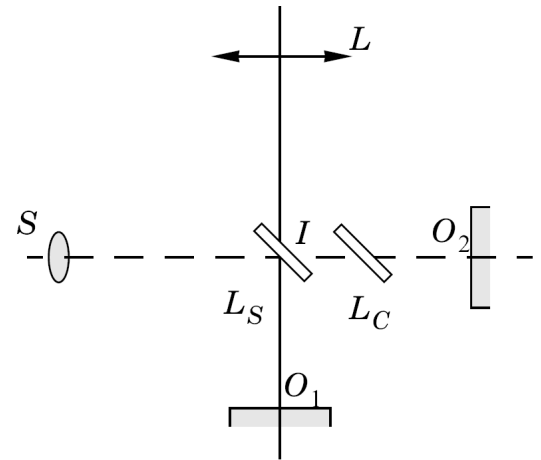
Problème I : Interféromètre de Michelson

(D'après Centrale 2008 filière MP)

I. Description de l'interféromètre de Michelson en configuration lame d'air

1. La lame compensatrice compense la différence de marche introduite par la lame séparatrice, fonction de l'inclinaison des rayons incidents, de façon à faire interférer les deux ondes sortant des deux bras de l'interféromètre avec une différence de marche qui ne dépend que de la longueur des bras de l'interféromètre.

2. Il suffit de prendre une lampe spectrale atomique (exemple : lampe au mercure, au sodium) et de filtrer une seule raie d'émission à l'aide d'un filtre optique très sélectif (ex : filtre interférentiel)



Les miroirs sont positionnés de telle sorte que : $|O_2I - O_1I| = e \neq 0$.

3. La figure présente un axe de symétrie. Par conséquent, les franges d'interférences sont des anneaux figure d'interférence se localise à l'infini.

4. On utilise une lentille convergente L et on place l'écran dans le plan focal image de L. Une lentille de grande distance focale est judicieuse car le rayon des anneaux est donné par $r = f'\theta$ i.e. plus la focale f' est importante, plus le rayon des anneaux est grand.

5. Il suffit d'appliquer la formule des interférences : $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos\varphi$

Chaque onde qui interfère passe une fois et est réfléchiée une fois par la lame

séparatrice. Par conséquent, l'intensité des faisceaux qui interfèrent est : $\frac{I_0}{4}$ et on

obtient : $I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos\varphi)$

Le déphasage $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta$ est calculé à partir de la figure ci-contre.

On voit que : $\delta = (IJK) - (IL)$

On remarque que : $(IJK) = 2IJ = \frac{2e}{\cos i}$ et $(IL) = IL = IK \sin i = 2e \tan i \cdot \sin i = 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i}$

$\delta = (IJK) - (IL) = 2IJ - IL = \frac{2e}{\cos i} - \frac{2e \sin^2 i}{\cos i} = \frac{2e}{\cos i}(1 - \sin^2 i) = 2e \cos i$

Par conséquent, on obtient : $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = 2\pi \sigma_0 \delta = 4\pi \sigma_0 e \cos i$

L'intensité lumineuse enregistrée le détecteur est donc : $I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos(4\pi \sigma_0 e \cos i))$

6. L'ordre d'interférence est donné, au 1^{er} ordre non nul, par : $p = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e}{\lambda_0} \cos i \approx \frac{2e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$

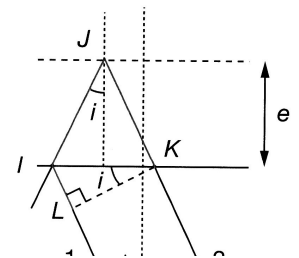
On voit que l'ordre d'interférence est maximal au centre et $p_{MAX} = \frac{2e}{\lambda_0} = N + \varepsilon$ avec N la partie entière de

p_{MAX} et l'excédent fractionnaire $0 \leq \varepsilon < 1$.

Le 1^{er} anneau brillant est obtenue pour : $p = N$.

Le 2^{ème} anneau brillant est obtenue pour : $p = N - 1$.

Le $k^{\text{ème}}$ anneau brillant est obtenue pour : $p = N - (k - 1)$.



On a donc : $N - (k-1) = p \approx \frac{2e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i_k^2}{2} \right)$ soit : $N - (k-1) \approx \frac{2e}{\lambda_0} - \frac{e}{\lambda_0} i_k^2 \approx N + \varepsilon - \frac{e}{\lambda_0} i_k^2$

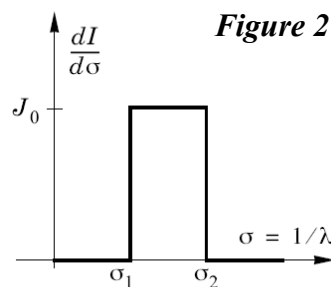
On obtient alors : $i_k = \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \sqrt{\varepsilon + k - 1}$. Vu que, dans les conditions de Gauss, on sait que : $r_k \approx f' i_k$, le

rayon des anneaux est : $r_k = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \sqrt{\varepsilon + k - 1}$

II. Interférogramme en lumière blanche.

On remplace la source précédente par une source de lumière blanche. On modélise la répartition spectrale en intensité par une distribution rectangulaire (figure 2).

On note l'intensité totale émise par la lampe blanche: $I_0 = J_0 \Delta \sigma$



1. $\lambda_1 = 800$ nm et $\lambda_2 = 400$ nm.

2. La contribution élémentaire à l'intensité mesurée par le détecteur, des radiations comprise dans la bande élémentaire $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ (exprimée en nombre d'onde) est :

$$dI = \frac{J_0 d\sigma}{2} (1 + \cos(4\pi \sigma e)) = \frac{I_0}{2\Delta\sigma} (1 + \cos(4\pi \sigma e)) d\sigma$$

3. Le détecteur enregistre une intensité lumineuse correspondant à la somme des intensités élémentaires précédemment calculée intégrée sur tout le spectre de la lumière blanche :

$$I = \int_{\text{spectre}} dI = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{I_0}{2\Delta\sigma} (1 + \cos(4\pi \sigma e)) d\sigma = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{I_0}{2\Delta\sigma} d\sigma + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{I_0}{2\Delta\sigma} \cos(4\pi \sigma e) d\sigma = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2\Delta\sigma} \frac{\sin(4\pi \sigma_2 e) - \sin(4\pi \sigma_1 e)}{4\pi e}$$

$$I = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \frac{2 \sin(2\pi (\sigma_2 - \sigma_1) e) \cos(2\pi (\sigma_2 + \sigma_1) e)}{4\pi \Delta\sigma e} = \frac{I_0}{2} \left(1 + \frac{\sin(2\pi \Delta\sigma e)}{2\pi \Delta\sigma e} \sin(2\pi (\sigma_2 + \sigma_1) e) \right) \text{ qui se met sous la}$$

$$\text{forme : } I = \frac{I_0}{2} (1 + V(e) \cos(2\pi e (\sigma_1 + \sigma_2))) \text{ avec } V(e) = \frac{\sin(2\pi \Delta\sigma e)}{2\pi \Delta\sigma e}$$

On exprimera $V(e)$ en fonction de e et $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$.

4. On calcule l'ordre de grandeur des nombres d'onde :

$$\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1} = 12500 \text{ cm}^{-1} \text{ et } \sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2} = 25000 \text{ cm}^{-1}$$

$$\text{Soit } \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = 12500 \text{ cm}^{-1}$$

$$\text{Et } \sigma_2 + \sigma_1 = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} = 25000 \text{ cm}^{-1}.$$

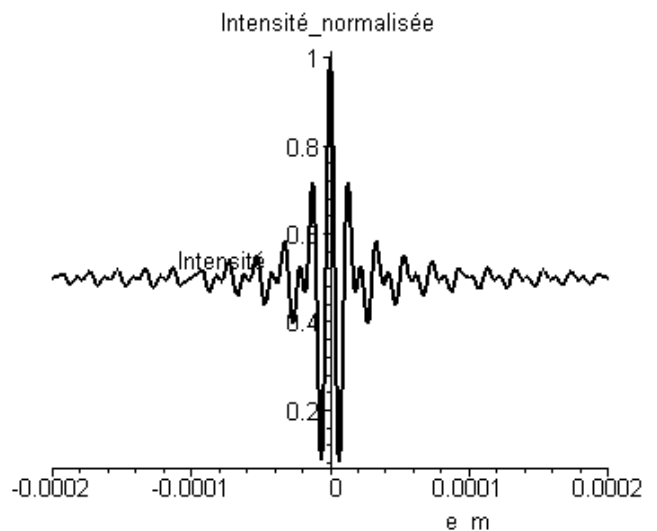


Figure 3 D d'après la question précédente.

Problème II : Diffraction

(D'après CCP 2009 filière MP)

Notation :

On désignera dans ce problème l'amplitude complexe d'une onde monochromatique de pulsation ω par : $\underline{\psi}(M) = \underline{\psi}(r)e^{i\omega t}$ avec $\underline{\psi}(r) = \psi_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)}$.

I. Principe d'Huygens - Fresnel

L'interprétation quantitative la plus simple de la diffraction repose sur le principe d'Huygens - Fresnel

1. Principe d'Huygens – Fresnel : Chaque élément de surface $d\Sigma$ (P) centrée autour d'un point P, atteint par une onde, se comporte comme une source secondaire re-émettant une « ondelette » sphérique, de même phase et de même fréquence que l'onde incidente, et dont l'amplitude élémentaire mesurée au point M, $d\underline{\psi}(M)$ est proportionnelle à l'élément de surface $d\Sigma$ (P) du point considéré, ainsi qu'à l'amplitude $d\underline{\psi}(P)$ de l'onde incidente.

2. Le principe précédent se traduit mathématiquement par $\underline{\psi}(M) = K_1 \iint_S \underline{t}(P) \underline{\psi}(S) e^{-ik(SP)} \frac{e^{-ik(PM)}}{PM} d\Sigma_{(P)}$

On pose $r = PM$ et $\underline{\psi}_0(P) = \underline{t}(P) \underline{\psi}(S) e^{-ik(SP)}$ l'amplitude de l'onde incidente à un point P situé sur la surface S. L'amplitude complexe d'une onde monochromatique diffractée s'écrit alors :

$$\underline{\psi}(M) = C \iint_S \underline{\psi}_0(P) \frac{e^{-ikr}}{r} dS \quad (1) \text{ avec } C = K_1 \text{ et } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ est le nombre d'onde de la vibration.}$$

- Dans l'expression de $\underline{\psi}(M)$, le terme en e^{-ikr} traduit le déphasage associé à la propagation de l'onde du point P au point M.
- la fonction $\frac{1}{r}$ caractérise la décroissance des amplitudes des ondelettes sphériques réémise à partir du front de l'onde primaire.
- La constante C est homogène à l'inverse d'une longueur.

II. Diffraction de Fraunhofer

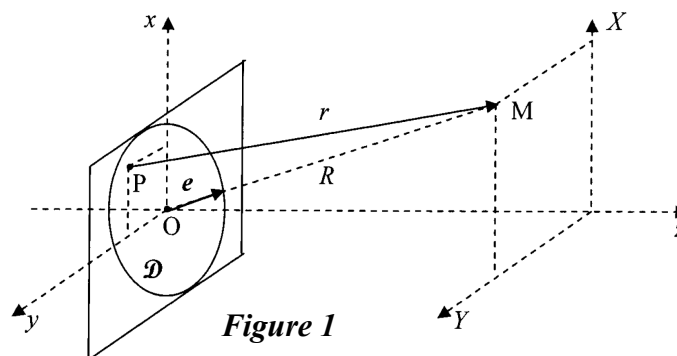


Figure 1

1. On a vu que, d'après le principe d'Huygens – Fresnel, l'amplitude de l'onde diffractée s'écrit :

$$\underline{\psi}(M) = C \iint_S \underline{\psi}_0(P) \frac{e^{-ikr}}{r} dS$$

On sait que $r = PM = \sqrt{PM^2}$ et que, d'après la relation de Chasles : $\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP}$.

Par conséquent, $PM = \sqrt{PM^2} = \sqrt{(\overline{OM} - \overline{OP})^2} = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OM} \cdot \overline{OP}}$

On sait que : $\overline{OP}^2 = x^2 + y^2$, $\overline{OM}^2 = R^2$ et que $\overline{OM} \cdot \overline{OP} = xX + yY$

On obtient donc : $PM = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2 - 2(xX + yY)} = R \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} - 2 \frac{(xX + yY)}{R^2}}$

On développe cette expression car la théorie de la diffraction n'est valide qu'à la condition où :
 $R \gg x, y, X, Y$ et ainsi :

$$r = PM = R \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} - 2 \frac{(xX + yY)}{R^2}} \approx R \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2R^2} - \frac{(xX + yY)}{R^2} \right) \approx R + \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{(xX + yY)}{R}$$

$$\text{Ainsi, on trouve que : } r = PM \approx R + \frac{x^2 + y^2}{2R^2} - \left(\frac{X}{R}x + \frac{Y}{R}y \right) = OM + \frac{OP^2}{OM} - \frac{\vec{OM}}{OM} \cdot \vec{OP} \approx OM + \frac{OP^2}{OM} - \vec{e} \cdot \vec{OP}$$

Et PM s'exprime en fonction de $R = OM$, de OP et du produit scalaire $\vec{e} \cdot \vec{OP}$ où $\vec{e} = \frac{\vec{OM}}{OM}$ est le vecteur unitaire caractérisant la direction d'observation.

2. Les conditions d'observation de la diffraction de Fraunhofer sont les suivantes : $R \gg \frac{a^2}{\lambda}$

où R est la distance d'observation, λ la longueur d'onde et a une dimension caractéristique de la fente diffractante.

3. Dans l'approximation de Fraunhofer, la simplification de r s'effectue :

- Avec le terme d'ordre 0 $r \approx R$ dans l'expression en $\frac{1}{r}$

- L'approximation du terme de phase e^{-ikr} est plus délicate car il peut y avoir des rotations de phase de 2π même pour de très faibles variations de position. On sait que : $r = PM \approx R + \frac{OP^2}{R} - \vec{e} \cdot \vec{OP}$ et donc :

$$kr \approx kR + k \frac{OP^2}{R} - k \vec{e} \cdot \vec{OP} \approx \frac{2\pi}{\lambda} R + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{OP^2}{OM} - k \vec{e} \cdot \vec{OP}. \text{ Dans les conditions de Fraunhofer } R \gg \frac{a^2}{\lambda}, \text{ vu}$$

que $OP \approx a$, on voit que l'on peut négliger le terme : $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{OP^2}{OM} \ll 1$ et donc ne garder le terme

$$\text{développé à l'ordre 1 : } kr \approx \frac{2\pi}{\lambda} R - k \vec{e} \cdot \vec{OP} \approx kR - \vec{k} \cdot \vec{OP} \text{ avec : } \vec{k} = k \vec{e} \text{ et : } e^{-ikr} = e^{-i(kR - \vec{k} \cdot \vec{OP})} = e^{-ikR} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OP}}$$

L'intégration de l'expression (1) ne porte que sur le domaine où l'amplitude $\psi_0(P)$ est non nulle, c'est-à-dire sur le diaphragme D et cela conduit à l'expression approchée suivante :

$$\underline{\psi}(M) = \underline{K} \iint_D \psi_0(P) e^{i\vec{k} \cdot \vec{OP}} dS \text{ où } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e} \text{ et avec la constante } \underline{K} = C \frac{e^{-ikR}}{R}.$$

4. La dimension physique de \underline{K} est celle de l'inverse du carré d'une longueur.

5. On introduit les fréquences spatiales $u = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $v = \frac{\beta}{\lambda}$ où $\alpha = \vec{e} \cdot \vec{e}_x$ et $\beta = \vec{e} \cdot \vec{e}_y$

L'amplitude complexe de l'onde diffractée est :

$$\underline{\psi}(M) = \underline{\psi}(u, v) = \underline{K} \iint_D \psi_0(P) e^{i\vec{k} \cdot \vec{OP}} dS = \underline{K} \iint_D \psi_0(x, y) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e} \cdot (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)} dx dy = \underline{K} \iint_D \psi_0(x, y) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (ux + vy)} dx dy$$

$$\underline{\psi}(M) = \underline{\psi}(u, v) = \underline{K} \iint_D \psi_0(x, y) e^{i2\pi(ux + vy)} dx dy \quad (3) \text{ (c'est une transformée de Fourier à 2D) !!!}$$

6. L'intensité $I(u, v)$ diffractée dans les directions (u, v) est $I(u, v) = \frac{K |\underline{\psi}(u, v)|^2}{2} = \frac{K |\underline{K}|^2}{2} \left| \iint_D \psi_0(x, y) e^{i2\pi(ux + vy)} dx dy \right|^2$

III. Diffraction par une fente

Le système optique représenté en figure 2 comprend un écran opaque (E) percé d'un diaphragme rectangulaire (figure 3) placé entre deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 de distance focale f chacune. Les deux lentilles sont placées sur le même axe optique (Oz).

Une source ponctuelle (S) émettant une radiation monochromatique de longueur d'onde λ est placée au foyer objet de L_1 . La lumière diffractée est observée sur un écran (E') placé au niveau du plan focal image de L_2 .

On repère un point P situé dans la pupille (E) par ses coordonnées (x, y) et un point M de l'écran (E') par ses coordonnées (X, Y) dans (E').

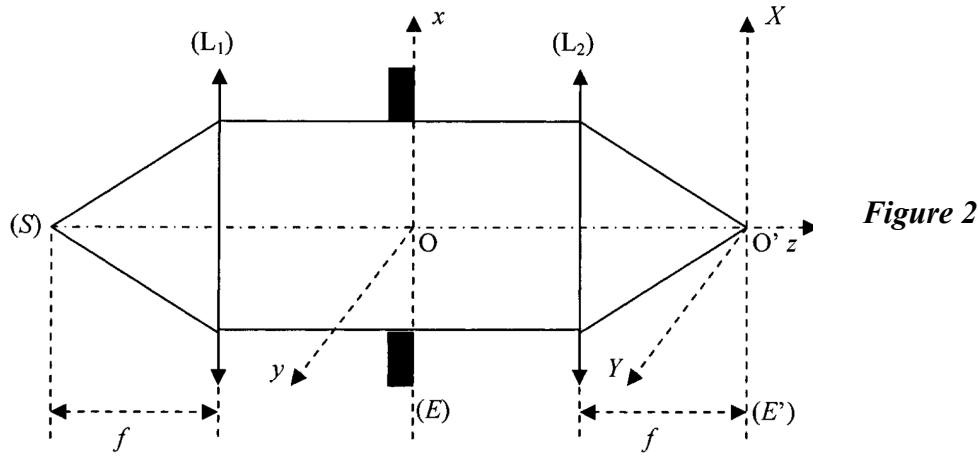


Figure 2

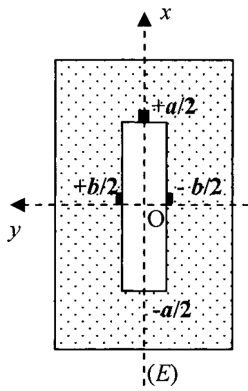


Figure 3

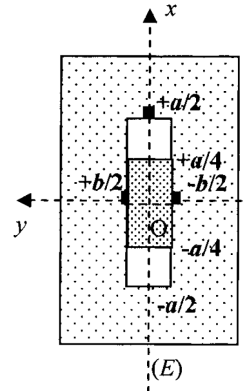


Figure 4

1. L'amplitude de l'onde lumineuse arrivant sur la fente est uniforme : $\underline{\psi}_0(x, y) = \underline{\psi}_0$

L'expression (3) devient : $\underline{\psi}(u, v) = \underline{K} \underline{\psi}_0 \iint_D e^{i2\pi(ux+vy)} dx dy = \underline{K} \underline{\psi}_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{i2\pi ux} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{i2\pi vy} dy$

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{iux} dx = \left[\frac{e^{i2\pi ux}}{i2\pi u} \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{e^{i\pi ua} - e^{-i\pi ua}}{i2\pi u} = \frac{2i \sin(\pi ua)}{i2\pi u} = a \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} = a \frac{\sin(U)}{U} \text{ avec } U = \pi ua = \left(\frac{\pi \alpha a}{\lambda} \right)$$

Et de même avec : $\int_{-b/2}^{b/2} e^{i2\pi vy} dy = b \frac{\sin(V)}{V}$ avec $U = \pi vb = \left(\frac{\pi \beta b}{\lambda} \right)$, on trouve que :

$$\underline{\psi}(M) = \underline{\psi}(u, v) = \underline{\zeta}_0 \frac{\sin U}{U} \frac{\sin V}{V} \text{ avec } \underline{\zeta}_0 = \underline{K} \underline{\psi}_0 ab$$

$$2. I(u, v) = \frac{K}{2} |\underline{\psi}(u, v)|^2 = \frac{K}{2} |\underline{\zeta}_0|^2 \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2 \left(\frac{\sin V}{V} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi \alpha a}{\lambda} \right)}{\frac{\pi \alpha a}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi \beta b}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi \beta b}{\lambda} \right)} \right)^2 \text{ avec } I_0 = \frac{K}{2} |\underline{\zeta}_0|^2$$

3. L'amplitude de l'onde issue de la pupille rectangulaire $\underline{\psi}_0(x, y)$ dépend maintenant uniquement de x .

En effet, on voit d'après la figure 4 que :

- pour $-\frac{a}{2} < x < -\frac{a}{4}$ et $\frac{a}{4} < x < \frac{a}{2}$: $\underline{\psi}_0(x) = \underline{\psi}_0$
- pour $-\frac{a}{4} < x < \frac{a}{4}$: $\underline{\psi}_0(x) = \underline{\psi}_0 e^{i\pi} = -\underline{\psi}_0$

Par conséquent, l'amplitude de la nouvelle onde diffractée est :

$$\underline{\psi}'(u, v) = \underline{K} \iint_D \underline{\psi}_0(x) e^{i2\pi(ux+vy)} dx dy = \underline{K} \int_{-a/2}^{a/2} \underline{\psi}_0(x) e^{i2\pi ux} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{i2\pi vy} dy$$

$$\text{soit : } \underline{\psi}'(u, v) = \underline{K} \underline{\psi}_0 \left(\int_{-a/2}^{-a/4} e^{i2\pi ux} dx - \int_{-a/4}^{a/4} e^{i2\pi ux} dx + \int_{a/4}^{a/2} e^{i2\pi ux} dx \right) \int_{-b/2}^{b/2} e^{i2\pi vy} dy$$

$$\text{Soit : } \underline{\psi}'(u, v) = \underline{K}\underline{\psi}_0 \left(\left[\frac{e^{i2\pi ux}}{i2\pi u} \right]_{-a/2}^{-a/4} - \left[\frac{e^{i2\pi ux}}{i2\pi u} \right]_{-a/4}^{a/4} + \left[\frac{e^{i2\pi ux}}{i2\pi u} \right]_{a/4}^{a/2} \right) \left[\frac{e^{i2\pi vx}}{i2\pi v} \right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$\underline{\psi}'(u, v) = \frac{\underline{K}\underline{\psi}_0}{i2\pi u} \left(e^{-\frac{i\pi ua}{2}} - e^{-i\pi ua} - e^{\frac{i\pi ua}{2}} + e^{\frac{-i\pi ua}{2}} + e^{i\pi ua} - e^{\frac{i\pi ua}{2}} \right) \left(\frac{e^{i\pi vb} - e^{-i\pi vb}}{i2\pi v} \right)$$

$$\underline{\psi}'(u, v) = \frac{\underline{K}ab\underline{\psi}_0}{i2\pi ua} \left((e^{i\pi ua} - e^{-i\pi ua}) + 2 \left(e^{-\frac{i\pi ua}{2}} - e^{\frac{i\pi ua}{2}} \right) \right) \left(\frac{e^{i\pi vb} - e^{-i\pi vb}}{i2\pi vb} \right) = \underline{K}ab\underline{\psi}_0 \left(\frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} - 2 \frac{\sin\left(\frac{\pi ua}{2}\right)}{(\pi ua)} \right) \left(\frac{\sin(\pi vb)}{\pi vb} \right)$$

$$\underline{\psi}'(u, v) = \underline{K}ab\underline{\psi}_0 \left(\frac{2 \cos\left(\frac{\pi ua}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi ua}{2}\right)}{(\pi ua)} - 2 \frac{\sin\left(\frac{\pi ua}{2}\right)}{(\pi ua)} \right) \left(\frac{\sin \pi vb}{(\pi vb)} \right) = \underline{K}ab\underline{\psi}_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi ua}{2}\right)}{\left(\frac{\pi ua}{2}\right)} \right) \left(\frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} \right) \left(\cos\left(\frac{\pi ua}{2}\right) - 1 \right)$$

L'intensité diffractée est donc :

$$I(u, v) = \frac{K}{2} |\underline{\psi}'(u, v)|^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi ua}{2}\right)}{\left(\frac{\pi ua}{2}\right)} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} \right)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi ua}{2}\right) \right)^2 \text{ avec } I_0 = \frac{K}{2} a^2 b^2 |\underline{K}|^2 |\underline{\psi}_0|^2$$

Problème III : Cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling

(D'après CCP 2000 filière MP)

I. Machine ditherme

1. Pour un cycle du gaz, le premier principe s'écrit : $0 = \Delta U = W + Q_f + Q_c$ (1).

Le second principe appliqué au système isolé constitué du gaz, de la source chaude et de la source froide donne : $\Delta S = \Delta S_{\text{gaz/cycle}} + \Delta S_f + \Delta S_c \geq 0$.

On pose donc : $\Delta S = S_p + S^{\text{éch}} = S_p$ car $S^{\text{éch}} = 0$ car le système est isolé thermiquement.

Par ailleurs, sur un cycle, S étant une fonction d'état, il est évident que : $\Delta S_{\text{gaz/cycle}} = 0$.

Les sources chaudes et froides possédant une température constante, et n'échangeant que de la chaleur, en intégrant

la différentielle de l'entropie, il vient que : $dS_{f/c} = \frac{dU_{f/c}}{T_{f/c}}$ donne : $\Delta S_f = \frac{\Delta U_f}{T_f} = -\frac{Q_f}{T_f}$ et $\Delta S_c = \frac{\Delta U_c}{T_c} = -\frac{Q_c}{T_c}$.

Au final, on a : $0 - \frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_c}{T_c} = \Delta S = S_p + S^{\text{éch}} = S_p$

Donc, on obtient : $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = -\Delta S = -S_p$. (2)

2. $S_p \geq 0$ et, pour un cycle moteur, $W < 0$, ce qui permet le tracé. Le point de fonctionnement, intersection des deux courbes, est donc dans la quadrant : $Q_c > 0$ et $Q_f < 0$ (le gaz reçoit effectivement de la source chaude et fournit effectivement à la source froide).

3. Par définition : $\eta = \frac{-W}{Q_c}$

D'après le premier principe, appliqué sur un cycle, on a : $0 = \Delta U = W + Q_f + Q_c$ soit : $W = -(Q_f + Q_c)$.

Ainsi, on a : $\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$, et donc en utilisant (2)

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f S_p}{Q_c}$$

4. Pour le cycle de Carnot réversible : $S_p = 0$, donc :

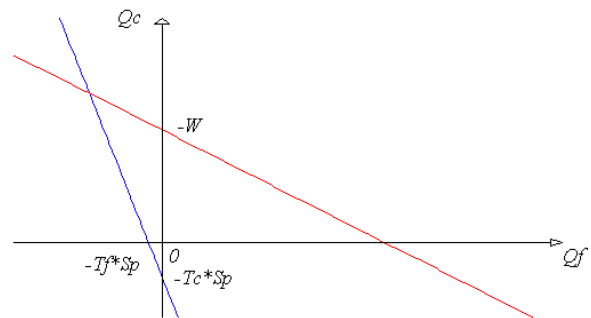
$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0,80.$$

$\eta_c < 1$ à cause d'une limitation fondamentale, il faut bien fournir de l'énergie à la source froide : un moteur ne peut pas fonctionner avec une seule source.

5. $\eta = r \eta_c = 0,752$ et $Q_c = \frac{-W}{\eta} = 19,9 \text{ kJ/cycle}$. $Q_f = -Q_c - W = -4,9 \text{ kJ/cycle}$.

$$S_p = -\frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_c}{T_c} = 3,2 \text{ J.K}^{-1}/\text{cycle}.$$

On peut alors tracer le graphe plus précisément, avec : $T_c S_p = 4,64 \text{ kJ/cycle}$ et $T_f S_p = 0,93 \text{ kJ/cycle}$.



II. Entropie d'un gaz parfait

1. Pour un gaz : $C_v = \frac{1}{2} R N$ où N est le nombre de degrés de liberté d'une molécule, $C_p = C_v + R$ et

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{N+1}{N}.$$

Pour un gaz monoatomique, il y a 3 degrés de liberté de translation, pour un gaz diatomique, il y a en plus 2 degrés de liberté de rotation, d'où $\gamma_{\text{mono}} = \frac{5}{3} \approx 1,67$ et $\gamma_{\text{di}} = \frac{7}{5} = 1,4$.

2. La différentielle de l'entropie s'écrit pour un système fermé : $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$.

On en déduit que : $dH = T dS + V dP$, et vu que $dH = C_p dT$ avec $C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} n R$ et $V = n R \frac{T}{P}$, on a une autre

expression de la différentielle de l'entropie : $dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T} dp$ que l'on intègre et ainsi :

$$S(T,P) = n R \left(- \ln P + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln T + \text{Cste} \right), \text{ soit : } \alpha = n R \text{ et } \beta = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

A pression P constante, on intègre la différentielle de l'entropie et ainsi :

$$S(T,P) = S(T_0,P) + \int_{T_0}^T C_p(T) dT,$$

Cette expression permet d'accéder à $S(T,P)$ en connaissant $S(T_0,P)$. Il faut aussi tenir compte en toute rigueur des changements d'états...

3. Pour le gaz parfait diatomique il y a $N = 5$ degrés de liberté, on a bien $\beta = \frac{\gamma}{\gamma - 1} = 7/2$ car $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{N+1}{N} = \frac{7}{5}$.

Au cours d'une transformation isentropique, S est une constante, donc : $S(T,P) = n R \left(- \ln P + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln T \right) = \text{Cste}$

Soit $\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T}{P} \right) = \beta \ln \left(\frac{T}{P} \right) = \text{Cste}$ et donc $\ln \left(\frac{T^\beta}{P} \right) = \text{Cste}$, d'où : $\frac{T^\beta}{P} = \text{Cste}$ (loi de Laplace).

III. Cycle de Beau de Rochas et Otto

1. BC et DA sont deux isochores donc : $V_A = V_C$

AB et CD sont deux isentropiques : la loi de Laplace s'applique $P V^\gamma = \text{Cste}$.

Elle donne alors :

$$P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma = P_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^\gamma = P_A \alpha_v^\gamma = 18,4 \text{ bar},$$

$$P_D = P_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^\gamma = P_C \left(\frac{V_C}{V_A} \right)^\gamma = P_C \alpha_w^{-\gamma} = 2,2 \text{ bar},$$

On en déduit les volumes :

$$V_D = V_A = \frac{m R T_A}{M P_A} = 2,41 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 2,41 \text{ L} \text{ et } V_B = V_C = \frac{V_A}{\alpha_v} = 0,30 \text{ L}.$$

2. Le cycle est décrit dans le sens inverse trigonométrique ou le sens des aiguilles d'une montre car c'est un cycle moteur.

3. AB constitue une isentropique : $\Delta S_{AB} = 0$, $Q_{AB} = 0$,

Le premier principe s'écrit pour cette transformation : $W_{AB} = \Delta U_{AB} = C_v \Delta T_{A \rightarrow B} = \frac{m R}{M(\gamma - 1)} (T_B - T_A) =$

et $\Delta U_{AB} = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1}$ soit numériquement : $W_{AB} = 0,78 \text{ kJ}$.

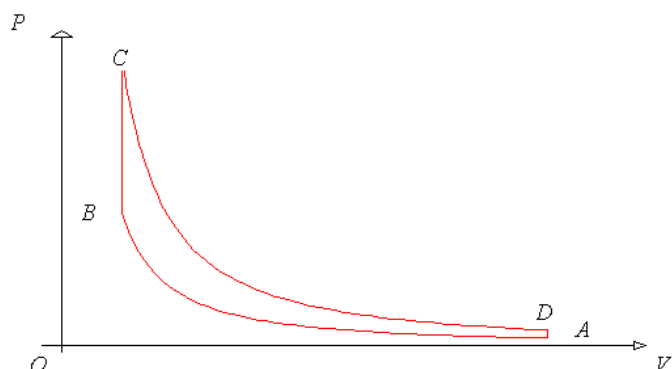
De même, CD constitue une isentropique :

$\Delta S_{CD} = 0$, $Q_{CD} = 0$, $W_{CD} = \Delta$

$U_{CD} = \frac{P_D V_D - P_C V_C}{\gamma - 1}$, soit :

$$W_{CD} = -1,67 \text{ kJ}.$$

BC est une isochore donc $W_{BC} = 0$, et le premier principe s'écrit :



$$Q_{BC} = Q_c = \Delta U_{BC} = \frac{P_C V_C - P_B V_B}{\gamma - 1}, \text{ soit : } Q_{BC} = 1,62 \text{ kJ.}$$

De même, DA est une isochore donc : $W_{DA} = 0$, et le premier principe donne :

$$Q_{DA} = Q_f = \Delta U_{DA} = \frac{P_A V_A - P_D V_D}{\gamma - 1}, \text{ soit : } Q_{DA} = -0,72 \text{ kJ.}$$

On retrouve bien pour un cycle complet : $W + Q_f + Q_c = 0$.

4. $\eta_{BO} = -\frac{W}{Q_{BC}} = 0,55 < \eta_c$, ce qui est normal car le rendement du cycle ne peut excéder celui du « cycle parfait »,

le cycle de Carnot, qui échange réversiblement de la chaleur avec les sources chaude et froide .

IV. Cycle de Stirling

1. $B'C'$ est une isochore donc : $V_{B'} = V_{C'}$.

$A'B'$ est une isotherme ($T_{A'} = T_{B'}$), donc, d'après la loi des gaz parfait $P_{B'} V_{B'} = P_{A'} V_{A'} = nRT_{B'}$:

$$\text{Soit : } P_{B'} = P_{A'} \left(\frac{V_{A'}}{V_{B'}} \right) = P_{A'} \left(\frac{V_{A'}}{V_{C'}} \right) = P_{A'} \alpha_v = 8,0 \text{ bar.}$$

De même : $P_{D'} = P_{C'} \alpha_v^{-1} = 5 \text{ bar.}$

2. Le cycle de Stirling ressemble beaucoup au cycle de Beau de Rochas et d'Otto, mais $P_{B'} < P_B$ et $P_{D'} > P_D$, donc l'aire du cycle de Stirling est plus grande et le travail aussi (donc peut-être aussi le rendement).

3. $B'C'$ est une isochore donc : $W_{B'C'} = 0$.

$$\text{Le premier principe s'écrit : } Q_{B'C'} = \Delta U_{B'C'} = \frac{P_C V_C - P_{B'} V_{B'}}{\gamma - 1}, \text{ soit numériquement : } Q_{B'C'} = 2,41 \text{ kJ.}$$

De même, $D'A'$ est une isochore donc : $W_{D'A'} = 0$,

$$\text{Le premier principe s'écrit : } Q_{D'A'} = \Delta U_{D'A'} = \frac{P_A V_A - P_{D'} V_{D'}}{\gamma - 1}, \text{ soit : } Q_{D'A'} = -2,41 \text{ kJ.}$$

AB' est une isotherme, donc le premier principe donne : $\Delta U_{A'B'} = C_V \Delta T_{A' \rightarrow B'} = C_V (T_{A'} - T_{B'}) = 0 = Q_{AB'} + W_{AB'}$,

$$\text{Soit : } -Q_{AB'} = W_{AB'} = \int_A^{B'} -P dV = -\frac{m}{M} R T_A \ln \left(\frac{V_{B'}}{V_A} \right), \text{ soit : } -Q_{AB'} = W_{AB'} = 0,5 \text{ kJ.}$$

$$\text{De même : } \Delta U_{C'D'} = 0 \text{ et } -Q_{C'D'} = W_{C'D'} = -\frac{m}{M} R T_C \ln \left(\frac{V_{D'}}{V_C} \right) = -2,5 \text{ kJ.}$$

4. $\eta_S = -\frac{W}{Q_{C'D'}} = 0,80 = \eta_c > \eta_{BO}$. On retrouve ce qu'une analyse qualitative à la question 3 laissait présager.