

# Concours Centrale-Supelec 2003 - Physique MP

## Une solution au problème du dioxyde de carbone atmosphérique ?

Corrigé proposé par D. DEVERNAY avec la collaboration de F. MASSIAS

### Partie I - Vibrations de la molécule de $CO_2$ et interaction avec une onde e.m.

#### I.A Vibrations longitudinales

I.A.1) Le référentiel barycentrique de la molécule est en translation par rapport au référentiel galiléen du laboratoire, et son origine est au centre d'inertie  $G$  de la molécule. Les forces extérieures (pesanteur) étant négligées, le théorème du centre d'inertie montre que  $G$  a un mouvement rectiligne et uniforme : le référentiel barycentrique est donc galiléen.

I.A.2)

a) Par définition du centre d'inertie, on peut écrire lorsque la molécule est au repos :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_{i,0}} = \vec{0}$$

et pour une position quelconque :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Par différence de ces deux relations :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{M_{i,0}M_i} = \vec{0}$$

Soit, en projection sur  $Ox$  :

$$m_1(x_1 + x_3) + m_2x_2 = 0$$

b) Appliquons la loi de Newton à l'atome 1 :

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1)$$

En remplaçant  $x_2$  par son expression tirée du a) :

$$\ddot{x}_1 + k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) x_1 + \frac{k}{m_2} x_3 = 0$$

On opère de même pour l'atome 3 :

$$m_1\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2)$$

D'où en remplaçant  $x_2$  :

$$\ddot{x}_3 + k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) x_3 + \frac{k}{m_2} x_1 = 0$$

Les équations différentielles ont bien la forme indiquée dans l'énoncé, avec :

$$a = k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad \text{et} \quad b = \frac{k}{m_2}$$

c) On cherche des solutions sinusoidales. En notations complexes, on obtient après simplification par  $\exp(j\omega t)$  le système homogène :

$$\begin{cases} \left( -\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) A_1 + \frac{k}{m_2} A_3 = 0 \\ \frac{k}{m_2} A_1 + \left( -\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) A_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a de solutions autre que la solution triviale  $A_1 = A_3 = 0$  que si son déterminant est nul, ce qui implique :

$$-\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} = \pm \frac{k}{m_2}$$

d'où les deux pulsations propres :

$$\begin{aligned} \omega_I &= \sqrt{\frac{k}{m_1}} \\ \omega_{II} &= \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{2k}{m_2}} \end{aligned}$$

d) Application numérique :

$$\begin{aligned} \omega_I &= 2,31 \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1} \\ \omega_{II} &= 4,43 \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned}$$

e) Étude des modes propres d'oscillation.

- Pulsation  $\omega_I$ . La première équation du c) donne alors  $A_3 = -A_1$  (*mode symétrique*), ce qui implique d'après le a) que  $A_2 = 0$ . Les deux atomes d'oxygène vibrent symétriquement, et l'atome de carbone est fixe : pour chaque atome d'oxygène, tout se passe comme s'il était simplement fixé à un point fixe par le ressort de raideur  $k$ , d'où la valeur prévisible de  $\omega_I$ .
- Pulsation  $\omega_{II}$ . La première équation du c) donne maintenant  $A_3 = A_1$  (*mode antisymétrique*), ce qui implique d'après le a) que :

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{2m_1}{m_2}$$

## I.B Modes de flexion de la molécule

I.B.1) Les deux situations correspondant à  $\varphi$  et  $-\varphi$  sont identiques et correspondent à la même valeur de l'énergie potentielle :  $E_p$  est donc une fonction paire de  $\varphi$ , et son développement limité au voisinage de  $\varphi = 0$  s'écrit à une constante additive près :

$$E_p = \frac{1}{2}C\varphi^2 + O(\varphi^4)$$

Par ailleurs, la stabilité de l'équilibre  $\varphi = 0$  implique l'existence d'un minimum d'énergie potentielle, donc  $C > 0$ .

I.B.2) Étude d'un mode particulier.

a) On voit sur la figure 2 que :

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{y_2 - y_1}{r_0} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r_0 - x_1}{r_0}$$

Soit, au premier ordre en  $\varphi$  :

$$y_2 - y_1 = r_0 \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = 0$$

D'autre part, comme le centre d'inertie doit rester fixe :

$$m_1 x_1 + m_3 x_3 = 0 \quad \text{et} \quad 2m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$$

En éliminant  $y_2$  avec la relation précédente, on obtient bien :

$$y_2 \left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right) = r_0 \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = x_3 = 0$$

b) L'énergie cinétique vaut :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2$$

Avec les résultats du a) :

$$E_c = \frac{r_0^2 m_1 m_2}{4(2m_1 + m_2)} \dot{\varphi}^2$$

c) La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{r_0^2 m_1 m_2}{4(2m_1 + m_2)} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}C\varphi^2 = c^{\text{te}}$$

On peut identifier ceci avec la conservation de l'énergie pour un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_{III}$  :

$$\dot{\varphi}^2 + \omega_{III}^2 \varphi^2 = c^{\text{te}}$$

à condition de poser :

$$\omega_{III} = \sqrt{\frac{2C}{r_0^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right)}$$

Application numérique :  $\omega_{III} = 8,79 \times 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$

## I.C Interaction avec une onde e.m.

I.C.1) Le milieu étant dilué, la vitesse de phase est pratiquement égale à  $c$ , donc  $E \simeq cB$ . On pourra négliger la force magnétique devant la force électrique si :

$$\left\| q \vec{v} \wedge \vec{B} \right\| \ll \left\| qc\vec{B} \right\|$$

ce qui sera vérifié si  $v \ll c$ , c'est-à-dire si la particule est non-relativiste, ce que nous supposons bien entendu.

La molécule étant neutre, la force électrique totale est nulle, donc le référentiel barycentrique reste galiléen. On peut alors reprendre les équations différentielles du I.A.2.b) en ajoutant les forces électriques calculées dans le plan  $z = 0$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) x_1 + \frac{k}{m_2} x_3 = -\frac{\delta e}{m_1} E_0 \cos(\Omega t) \\ \ddot{x}_3 + k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) x_3 + \frac{k}{m_2} x_1 = -\frac{\delta e}{m_1} E_0 \cos(\Omega t) \end{cases}$$

I.C.2) En régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\Omega$ , on obtient en notations complexes :

$$\begin{cases} \left( -\Omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) A_1 + \frac{k}{m_2} A_3 = -\frac{\delta e}{m_1} E_0 \\ \frac{k}{m_2} A_1 + \left( -\Omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) A_3 = -\frac{\delta e}{m_1} E_0 \end{cases}$$

On fait la somme et la différence de ces deux équations :

$$\begin{cases} (\omega_{II}^2 - \Omega^2)(A_1 + A_3) = -\frac{2\delta e}{m_1} E_0 \\ (\omega_I^2 - \Omega^2)(A_1 - A_3) = 0 \end{cases}$$

Si  $\Omega \neq \omega_I$  et  $\Omega \neq \omega_{II}$  :

$$A_1 = A_3 = \frac{\delta e E_0}{m_1(\Omega^2 - \omega_{II}^2)}$$

Il ne se passe rien de particulier quand  $\Omega \rightarrow \omega_I$ . Mais lorsque  $\Omega \rightarrow \omega_{II}$ , un phénomène de résonance intervient, ce qui était prévisible car le champ électrique excite les atomes d'oxygène de façon antisymétrique. De plus les amplitudes deviennent infinies, du fait que le modèle ne donne pas à la molécule la possibilité de restituer l'énergie qu'elle reçoit.

I.C.3) Le moment dipolaire vaut :

$$\vec{p}(t) = \sum_i q_i \overrightarrow{GM}_i = \sum_i q_i \overrightarrow{GM}_{i,0} + \sum_i q_i \overrightarrow{M_{i,0}M_i}$$

Le premier terme est nul car  $CO_2$  n'est pas une molécule polaire. Comme les déplacements se font uniquement suivant  $Ox$ , il vient en utilisant la relation du I.A.1) :

$$\vec{p}(t) = \delta e(-x_1 + 2x_2 - x_3)\vec{e}_x = -\delta e(x_1 + x_3) \left(1 + \frac{2m_1}{m_2}\right) \vec{e}_x$$

On remplace  $x_1 = A_1 \cos(\Omega t)$  et  $x_3 = A_3 \cos(\Omega t)$  :

$$\vec{p}(t) = \frac{2\delta^2 e^2}{\omega_{II}^2 - \Omega^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right) E_0 \cos(\Omega t) \vec{e}_x$$

I.C.4) Absorption de l'onde incidente.

a) La puissance émise par la molécule de  $CO_2$  vaut :

$$P = \frac{\mu_0 \delta^4 e^4 E_0^2 \Omega^4}{3\pi c (\omega_{II}^2 - \Omega^2)^2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2} \right)^2$$

b) L'intensité de l'onde incidente est la moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting :

$$I_0 = \left\langle \frac{EB}{\mu_0} \right\rangle_t = \frac{\langle E^2 \rangle_t}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad \text{car} \quad \langle \cos^2(\Omega t) \rangle_t = \frac{1}{2}$$

On peut alors écrire  $P = \eta I_0$  avec :

$$\eta = \frac{2\mu_0^2 \delta^4 e^4 \Omega^4}{3\pi (\omega_{II}^2 - \Omega^2)^2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2} \right)^2$$

Comme  $P$  est une puissance et  $I_0$  une puissance surfacique,  $\eta$  a la dimension d'une surface : c'est la section efficace d'interaction de la molécule  $CO_2$  avec l'onde.

c) Écrivons un bilan d'énergie pour l'élément de volume  $\Sigma dz$  : la puissance entrante  $I(z)\Sigma dz$  est égale à la somme de la puissance sortante  $I(z+dz)\Sigma dz$  et de la puissance diffusée par les molécules ; elles sont au nombre de  $n\Sigma dz$ , dont le tiers statistiquement est dans l'orientation  $Ox$  :

$$I(z)\Sigma dz = I(z+dz)\Sigma dz + \frac{n\Sigma dz}{3} P$$

Puisque  $P = \eta I_0$ , ceci s'écrit :

$$\frac{dI}{I} = -\frac{n\eta}{3} dz$$

En intégrant :

$$I(z) = I(0) \exp\left(-\frac{n\eta z}{3}\right) = I(0) \exp\left(-\frac{z}{l}\right) \quad \text{avec} \quad l = \frac{3}{n\eta}$$

$\eta$  est une surface et  $n$  l'inverse d'un volume, par conséquent  $l$  est bien une longueur : c'est la « profondeur de pénétration » de l'onde dans le milieu. Lorsque  $\Omega \rightarrow \omega_{II}$ , alors  $\eta \rightarrow \infty$  et  $l \rightarrow 0$ , l'onde est très fortement absorbée.

d) Les forces électriques qui s'exercent sur les deux atomes d'oxygène sont identiques, elles ne peuvent donc pas exciter le mode I dans lequel ces deux atomes vibrent en opposition de phase. En revanche, le mode III peut être excité si la molécule est placée perpendiculairement au champ électrique, c'est-à-dire soit dans la direction  $Oy$ , soit dans la direction  $Oz$ . (Dans ce dernier cas on pourra considérer que le champ électrique reste uniforme car la longueur de la molécule est négligeable devant la longueur d'onde du rayonnement.)

Les longueurs d'ondes dans le vide s'obtiennent par la relation  $\lambda = 2\pi c/\omega$  ce qui donne :

$$\lambda_{II} = 4,25 \mu\text{m}$$

$$\lambda_{III} = 21,5 \mu\text{m}$$

Il s'agit de rayonnement infra-rouge.

## Partie II - $CO_2$ et effet de serre

Il faut comprendre ici que  $\Phi_s$  est égal au flux solaire total reçu par la Terre, divisé par la surface de la Terre :

$$\Phi_s = \frac{\pi R_t^2 \langle \Pi \rangle}{4\pi R_t^2} = \frac{\langle \Pi \rangle}{4}$$

où  $\langle \Pi \rangle$  est la moyenne temporelle du vecteur de Poynting du rayonnement solaire. À condition d'utiliser  $\Phi_s$ , on peut donc raisonner comme si la Terre était plate et recevait les rayons solaires en incidence normale.

### II.A Modèle à une couche

II.A.1)

a) La « loi de déplacement » de Wien indique que lorsque la température passe de  $T_1$  à  $T_2$  la courbe de distribution spectrale en longueurs d'onde  $\Phi_\lambda$  se transforme par une affinité de rapport  $(T_2/T_1)^{-1}$  parallèlement à l'axe des abscisses et une affinité de rapport  $(T_2/T_1)^5$  parallèlement à l'axe des ordonnées.

Il en résulte que l'abscisse  $\lambda_m$  du maximum est inversement proportionnelle à la température :  $\lambda_m T = c^{\text{te}}$ .

b) D'après les données relatives au soleil, on voit que la constante précédente vaut approximativement  $3000 \text{ K} \cdot \mu\text{m}$ ,

d'où les longueurs d'ondes d'émission radiative maximale :

$$\text{Terre : } T = 300 \text{ K} \quad \lambda_m = 10 \mu\text{m}$$

$$\text{Couche de } CO_2 : T = 250 \text{ K} \quad \lambda_m = 12 \mu\text{m}$$

c) Ces longueurs d'onde sont du même ordre de grandeur que celles obtenues au I.C.4.d), par conséquent la couche de  $CO_2$  absorbe le rayonnement infra-rouge émis par la Terre.

d) Loi de Stefan : le flux surfacique hémisphérique émis par un corps noir vaut  $\Phi = \sigma T^4$ . (Il est aussi égal à la densité volumique d'énergie du rayonnement d'équilibre multipliée par  $c/4$ .)

II.A.2)

a) Les équilibres radiatifs s'écrivent :

$$\text{Couche + croûte terrestre : } \Phi_c = \Phi_s$$

$$\text{Croûte terrestre seule : } \Phi_t = \Phi_s + \Phi_c$$

b) On en déduit  $\Phi_t = 2\Phi_s$ , soit en utilisant la loi de Stefan :

$$T_t = \sqrt[4]{\frac{2\Phi_s}{\sigma}}$$

Si la couche n'existait pas, le bilan s'écrirait simplement  $\Phi_t = \Phi_s$ , d'où une température :

$$T_t^0 = \sqrt[4]{\frac{\Phi_s}{\sigma}} = \frac{T_t}{\sqrt[4]{2}}$$

Comme  $\sqrt[4]{2} \simeq 1,19$ , cela signifie que la couche produit une augmentation de température d'environ 20%.

## II.B Modèle à couches multiples

II.B.1) Les équilibres radiatifs s'écrivent maintenant :

$$\text{Pour l'ensemble : } \Phi_{CN} = \Phi_s \quad (1)$$

$$\text{p}^{\text{e}} \text{ couche : } 2\Phi_{Cp} = \Phi_{Cp-1} + \Phi_{Cp+1} \quad (2)$$

$$\text{1}^{\text{re}} \text{ couche : } 2\Phi_{C1} = \Phi_{C2} + \Phi_t \quad (3)$$

$$\text{Croûte terrestre seule : } \Phi_t = \Phi_s + \Phi_{C1} \quad (4)$$

II.B.2) La relation (2) peut encore s'écrire :

$$\Phi_{Cp+1} - \Phi_{Cp} = \Phi_{Cp} - \Phi_{Cp-1}$$

ce qui montre que  $\Phi_{Cp}$  est une fonction affine de  $p$ , soit  $\Phi_{Cp} = \alpha + p\beta$ . Pour déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  on peut utiliser d'une part la relation (1) :

$$\alpha + N\beta = \Phi_s$$

et d'autre part la relation  $\Phi_{C1} = \Phi_{C2} + \Phi_s$  obtenue en éliminant  $\Phi_t$  entre (3) et (4) :

$$\alpha + \beta = \alpha + 2\beta + \Phi_s$$

D'où  $\beta = -\Phi_s$  et  $\alpha = (N+1)\Phi_s$  soit finalement :

$$\Phi_{Cp} = (N+1-p)\Phi_s$$

et en reportant dans (4) :

$$\Phi_t = (N+1)\Phi_s$$

II.B.3) La loi de Stefan pour la Terre donne maintenant :

$$T_t = \sqrt[4]{\frac{(N+1)\Phi_s}{\sigma}}$$

La température de la Terre est en gros proportionnelle à la racine 4<sup>e</sup> du nombre de couches.

## II.C Modèle continu

II.C.1)

a) Le nombre de molécules de  $CO_2$  dans l'atmosphère vaut, dans ce modèle où la densité moléculaire  $C_0$  est supposée constante :  $N_0 = 4\pi R_t^2 h C_0$ . En identifiant avec  $N_0 = \gamma N$  on obtient bien  $N = \alpha h$  avec :

$$\alpha = \frac{4\pi R_t^2 C_0}{\gamma}$$

Puis en reprenant l'expression de la température de la Terre en fonction du nombre de couches obtenue en B.3) :

$$T_t = \sqrt[4]{\frac{\Phi_s(1+\alpha h)}{\sigma}}$$

b)  $\alpha$  est l'inverse d'une longueur. Numériquement :

$$\alpha = \frac{1}{h} \left( \frac{\sigma T_t^4}{\Phi_s} - 1 \right) = 0,028 \text{ km}^{-1}$$

II.C.2) Si le volume de  $CO_2$  augmente de 10%, la hauteur  $h$  augmentera de 10%, soit  $\Delta h = 0,5 \text{ km}$ . En prenant la différentielle logarithmique de la formule du 1.a) :

$$\frac{\Delta T_t}{T_t} = \frac{\Delta h}{4(h+1/\alpha)}$$

On trouve une élévation de température  $\Delta T_t = 0,9 \text{ K}$ .

## II.D Validité du modèle

- On a considéré la densité moléculaire  $C_0$  comme indépendante de l'altitude, ce qui est certainement faux.
- On a supposé que le dioxyde de carbone absorbait intégralement le rayonnement infra-rouge autour de  $\lambda = 10 \mu\text{m}$ , alors qu'on observe en réalité des *bandes* d'absorption.
- On a négligé l'*albedo* de la Terre, c'est-à-dire le fait qu'une partie du rayonnement visible est réfléchi.

## Partie III - Transport du $CO_2$ industriel au fond des océans par torpilles de $CO_2$ solide

### III.A Changements de phase en surface des torpilles

III.A.1) La pression dans l'océan est obtenue par intégration de la loi de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \rho_0 \overrightarrow{g} \implies P = P_0 + \rho_0 g z$$

III.A.2) On aura sublimation si la pression est inférieure à celle du point triple, et fusion au-delà. La profondeur cor-

respondante  $Z_S$  est telle que  $P(Z_S) = P_T$  d'où :

$$Z_S = \frac{P_T - P_0}{\rho_0 g} = 40,7 \text{ m}$$

III.A.3) Vitesse de diminution du rayon

a) Pour que le rayon varie de  $dr$  (négatif), il faut provoquer la sublimation ou la fusion d'une masse  $-2\pi r h \rho dr$  de  $CO_2$ , et par conséquent fournir à la torpille une énergie :  $\delta Q = -2\pi r h \rho L(z) dr$ .

b) Le transfert thermique est de type conducto-convectif.  $\delta Q = 2\pi r h P_{th} dt$ , d'où l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{dt} = -K \frac{T_0 - T_{eq}(z)}{\rho L(z)}$$

c) On obtient numériquement :

$$\text{Pour } z < Z_S : \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_{subl} = -0,58 \text{ mm.s}^{-1}$$

$$\text{Pour } z > Z_S : \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_{fus} = -1,33 \text{ mm.s}^{-1}$$

### III.B Étude dynamique de la torpille

III.B.1) Considérons comme système la torpille de masse  $M(t)$  à la date  $t$ . Puisque l'on suppose que la masse perdue  $-dM$  a une vitesse nulle, la variation de quantité de mouvement entre  $t$  et  $t + dt$  vaut :

$$\left[ (M + dM)(\vec{V} + d\vec{V}) + (-dM)\vec{0} \right] - M\vec{V} = d(M\vec{V})$$

et le théorème de la résultante cinétique s'écrit :

$$\frac{d(M\vec{V})}{dt} = M\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}$$

III.B.2) On projette sur  $Oz$ , on développe et on divise le tout par  $M$  :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{M} \frac{dM}{dt} = g + \frac{F_a}{M} + \frac{F}{M}$$

Comme la masse de la torpille est proportionnelle au carré du rayon :

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{2}{r} \frac{dr}{dt}$$

D'autre part, les forces  $F_a$  et  $F$  sont dirigées vers les  $z < 0$  et on a :

$$\frac{F_a}{M} = -\frac{\pi r^2 h \rho_0 g}{\pi r^2 h \rho} = -\frac{\rho_0}{\rho} g$$

$$\frac{F}{M} = -\frac{\alpha_f r^2 V}{\pi r^2 h \rho} = -\frac{\alpha_f}{\pi h \rho} V$$

On obtient bien :

$$\frac{dV}{dt} + \left( \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau_0} \right) V = \beta g$$

en posant :

$$\tau_0 = \frac{\pi h \rho}{\alpha_f} \quad \text{et} \quad \beta = 1 - \frac{\rho_0}{\rho}$$

III.B.3)

a) Avec l'approximation indiquée, l'équation devient linéaire :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau_0} = \beta g$$

qui s'intègre facilement en :

$$V = \beta g \tau_0 \left( 1 - e^{-t/\tau_0} \right)$$

La vitesse limite  $V_l = \beta g \tau_0$  est atteinte avec une constante de temps  $\tau_0$ . On peut retrouver cette vitesse limite en écrivant que la force massique  $\beta g$  résultant du poids et de la poussée d'Archimède est compensée par la force de frottement massique  $V_l/\tau_0$ , raisonnement qui « oublie » de tenir compte du fait que la masse de la torpille varie au cours du temps.

b) Application numérique :

$$\tau_0 = 14,1 \text{ s}$$

$$V_l = 43,4 \text{ m.s}^{-1}$$

### III.C Évaluation de la perte de masse

III.C.1) La profondeur atteinte au bout d'un temps  $t$  vaut :

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t V(t') dt' = V_l \int_0^t \left( 1 - e^{-t'/\tau_0} \right) dt' \\ &= V_l \left( t - \tau_0 + \tau_0 e^{-t/\tau_0} \right) \end{aligned}$$

Si on suppose, ce qui sera largement vérifié, que  $\exp(-t_c/\tau_0) \ll 1$ , on en déduit :

$$t_c = \tau_0 + \frac{z_{fond}}{V_l} = 106,9 \text{ s}$$

III.C.2) On vérifie numériquement (sans négliger cette fois le terme exponentiel) que  $z(t_S) \simeq Z_S$ , ce qui est réconfortant. Le rayon final de la torpille sera :

$$r_c = r_0 + \left(\frac{dr}{dt}\right)_{subl} t_S + \left(\frac{dr}{dt}\right)_{fus} (t_c - t_S) = 2,36 \text{ m}$$

La perte relative de masse vaut :

$$1 - \left(\frac{r_f}{r_0}\right)^2 = 11\%$$

valeur acceptable dans la pratique.

Le procédé étudié dans cette partie III permet de soustraire à l'écosystème planétaire une partie des quantités massives de carbone qui y sont injectées en permanence, du fait de l'extraction des hydrocarbures du sous-sol. Très séduisant dans son principe, il pose les problèmes suivants :

- Coût énergétique de la solidification du  $CO_2$ , et financement des installations.
- Impact d'une augmentation en  $CO_2$  (massive même si elle est locale) sur la vie sous-marine.
- Même si le temps de remontée (de l'ordre de 1000 ans) peut sembler long à l'échelle d'une vie d'homme, ce dioxyde de carbone finira par réapparaître. Nos descendants auront-ils résolu le problème ?