

# Considérations sur une raie spectrale

Mohamed Afekir ([cpgeafek@gmail.com](mailto:cpgeafek@gmail.com))

École Royale de l'Air

CPGE - Marrakech

## Partie I - Préambule

Q1.

$$\mathcal{E}^* - \mathcal{E} = h\nu_o = h \frac{\omega_o}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{\mathcal{E}^* - \mathcal{E}}{\hbar}$$

## Partie II - Oscillations au sein de l'atome de Thomson

### II.1- Force électrostatique ressenti par l'électron

Q2.

$$+e = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

Q3.  $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$

- $\Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est plan de *symétrie* de la distribution.
- $\Pi(M, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$  est plan de *symétrie* de la distribution.

$$\vec{E}(M) \in \Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \cap \Pi(M, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$$

- la distribution est *invariante* par rotation de  $\varphi$  autour de  $\vec{e}_z$  et par rotation de  $\theta$  autour de  $\vec{e}_\varphi$ ;  $E(M)$  est, alors, indépendant de  $\theta$  et de  $\varphi$ :  $E(M) = E(r, \theta, \varphi) = E(r)$

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

Q4. théorème de Gauss (( $\Sigma$ ) sphère de rayon  $r$ , centrée en  $O$ ):

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{intérieure à } (\Sigma)}}{\epsilon_o}$$

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma} = 4\pi r^2 E(r) \quad \text{et} \quad q_{\text{intérieure à } (\Sigma)} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

soit:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_o} \vec{r}$$

**Q5.** la force ressentie par l'électron:

$$\vec{F} = -e \vec{E}(M) = -e \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r} = -m_e \omega_o^2 \vec{OM}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e}}$$

c'est une force de rappel élastique.

**II.2- Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié**

**Q6.** Relation fondamentale de la dynamique:

$$m_e \vec{a}_e = \vec{F} = -m_e \omega_o^2 \vec{OM} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_o^2 \vec{r} = \vec{0}$$

Solution:

$$\vec{r}(t) = \vec{C}_1 \cos(\omega_o t) + \vec{C}_2 \sin(\omega_o t)$$

Conditions initiales:  $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$  et  $\vec{v}(t=0) = -V_o \vec{e}_z$

$$\vec{r}(t) = -\frac{V_o}{\omega_o} \vec{e}_z \sin(\omega_o t)$$

**Q7.** Moment dipolaire:  $\vec{p}(t) = -e \vec{r}$

$$\vec{p}(t) = \frac{eV_o}{\omega_o} \vec{e}_z \sin(\omega_o t) = p_z(t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad p_z(t) = \frac{eV_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t)$$

**Q8.** Longueur d'onde:

$$\lambda_o = \frac{2\pi c}{\omega_o} = 2\pi c \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e}{e^2}}$$

Application numérique:  $\lambda_o = 0,133 \mu m$ ; ce rayonnement se trouve dans le domaine de l'Ultra-Violet du spectre électromagnétique.

**II.3- Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié**

$$\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau} \vec{V}$$

**Q9.**  $\vec{F}_f$  est due au chocs entre électrons.  $\tau$  à la dimension d'un temps, en effet:

$$[\tau] = \frac{[m_e] \times [V]}{[F_f]} = \frac{M \times LT^{-1}}{MLT^{-2}} = T$$

**Q10.** La relation fondamentale appliquée à l'électron, en présence de  $\vec{F}_f$ , s'écrit:

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m_e \omega_o^2 \vec{r} - \frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{p}(t) = -e \vec{r}(t)$ ; soit:

$$\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \omega_o^2 \vec{p}(t) = \vec{0}$$

Solution:  $\vec{p}(t) \propto e^{Xt}$ ; l'équation caractéristique:

$$X^2 + \frac{X}{\tau} + \omega_o^2 = 0 \quad ; \quad \Delta_X = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_o^2 \approx -4\omega_o^2 \quad \text{avec} \quad X_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega_o$$

$$\underbrace{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_o^2}_{\frac{1}{\tau} \ll \omega_o}$$

Soit:

$$\vec{p}(t) = e^{-t/2\tau} \left( \vec{A} \cos(\omega_o t) + \vec{B} \sin(\omega_o t) \right)$$

Si on écrit la solution sous la forme:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_o e^{\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad |\alpha| \ll \Omega$$

$$\begin{aligned} \vec{p}(t=0) = -e \vec{r}(t=0) = \vec{0} &\Rightarrow \vec{A} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \\ \alpha = -\frac{1}{2\tau} &\text{et} \quad \Omega = \omega_o \\ \vec{\dot{p}}(t=0) = -e \vec{v}(t=0) = eV_o \vec{e}_z &\Rightarrow \vec{B} = \vec{p}_o = \frac{eV_o}{\omega_o} \vec{e}_z = -e \vec{r}_o \end{aligned}$$

**Q11.** L'énergie potentielle:  $\vec{F} = -m_e \omega_o^2 \vec{r}$

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m_e \omega_o^2 \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\mathcal{E}_p(t)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r^2 + Cte$$

A  $t = 0$ , l'électron est en 0:  $\mathcal{E}_p(t=0) = 0$  et  $Cte = 0$ ;

$$\mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r^2(t) = \frac{m_e \omega_o^2}{2e^2} p^2(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r_o^2 e^{-t/\tau} \sin^2(\omega_o t)$$

**Q12.** L'énergie cinétique:

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} m_e \left( \frac{dr(t)}{dt} \right)^2 = \frac{m_e}{2e^2} \left( \frac{dp(t)}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m_e r_o^2 e^{-t/\tau} \left[ -\frac{1}{\tau} \sin(\Omega t) + \Omega \cos(\Omega t) \right]^2$$

Amortissement faible:  $\Omega = \omega_o$  et  $\tau \omega_o \gg 1$

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r_o^2 e^{-t/\tau} \cos^2(\omega_o t)$$

**Q13.** L'énergie mécanique:

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r_o^2 e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r_o^2 \frac{[p_m(t)]^2}{p_o^2} \quad \text{avec} \quad p_o^2 = e^2 r_o^2$$

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{m_e \omega_o^2}{2e^2} [p_m(t)]^2 = \frac{m_e \omega_o^2}{2e^2} p_o^2 e^{-t/\tau} = \mathcal{E}_o e^{-t/\tau_m}$$

La durée caractéristique d'amortissement des oscillations, au terme de l'énergie mécanique est  $\tau_m = \tau$ .

## II.4- Modélisation du mouvement de l'électron par une méthode numérique

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\lambda \frac{r}{dt} + \omega_o^2 r = 0 \tag{1}$$

**Q14.** On transforme, tout d'abord, l'équation différentielle (1) en une équation différentielle du *premier ordre* sous forme *vectorielle* (*forme matricielle*). Pour cela on procède comme suite:

- on pose  $v = \frac{dr}{dt}$ , on obtient le système de deux équations différentielle à une dimension:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v \quad \text{avec} \quad v(t_0 = 0) = v_0 \quad \text{avec} \quad x(t_0 = 0) \\ \frac{dv}{dt} &= -2\lambda v - \omega_0^2 r \end{aligned}$$

- les variables sont  $r(t)$  et  $v(t)$  tels que:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}}_{X(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ -2\lambda v - \omega_0^2 r \end{pmatrix}}_{f(X,t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} \tag{2}$$

- on pose  $X(t) = \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}$ ; soit:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= f(X, t) \\ X(0) &= X_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- on choisit l'intervalle du temps:

$$t \in [t_0 = 0, T] \quad \text{de pas} \quad \Delta t = h \quad \text{tel que} \quad T = N \times h$$

soit, alors, une liste de valeurs de  $t$ :  $0, h, 2h, \dots, (N - 1)h$ ; on peut écrire:

$$t_n = t_0 + n \times h \quad \text{avec} \quad t_0 = 0 \quad \text{et} \quad n = 0 \dots N - 1$$

- il ne reste qu' à définir les valeurs de  $X(t_i)$  sous forme de tableau de valeurs.

$t$	$X(t)$
$t_0 = 0$	$X(t_0) = X_0$
$t_1$	$X(t_1) = X_1$
$t_2$	$X(t_2) = X_2$
$\vdots$	$\vdots$

pour ce faire, on prend comme point de départ  $X_0$ :

$$\frac{dX}{dt}(t_0) = f(X_0, t_0) = f(X_0, 0)$$

- on fait l'approximation suivante: la fonction  $X(t)$  est approximée par sa tangente au au voisinage de  $X(t_0) = X_0$ ;

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) + (t - t_0)\dot{X}(t_0) = X(t_0) + h \times f(X_0, t_0) \\ X(t_1) &= X(t_0) + (t_1 - t_0)\dot{X}(t_0) = X(t_0) + h \times f(X_0, t_0) \\ &\vdots = \end{aligned}$$

- en faisant la même approximation au voisinage de  $X_1, X_2, \dots$ ; on peut écrire:

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + h \times f(X_n, t_n) = X_n + h \times f(X_n, t_n)$$

soit, en utilisant la relation (2);

$$\begin{pmatrix} r(t_{n+1}) \\ v(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t_n) \\ v(t_n) \end{pmatrix} + h \times \begin{pmatrix} v(t_n) \\ -2\lambda v(t_n) - \omega_o^2 r(t_n) \end{pmatrix}$$

ou:

$$r(t_{n+1}) = r(t_n) + h \times v(t_n) \tag{3}$$

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + h \times [-2\lambda v(t_n) - \omega_o^2 r(t_n)] \tag{4}$$

- Les relations (3) et (4) sont celles qui figurent dans la ligne 17 du programme; avec l'approximation suivante faite sur (4):

$$v(t_{n+1}) \approx v(t_n) + h \times [-2\lambda v(t_n) - \omega_o^2 r(t_n)]$$

```

15 ...
16 for i in range(N):
17     (x, v, a) = (x+v*h, v+a*h, -2*lamda*v-omega*omega*x)
18     tab_1[i] = x
19     tab_2[i] = v
20 return tab_1
21 ...
    
```

**Q15.** L'instruction `euler(3,0,1)` retourne la liste de valeurs de  $r(t_n) = x(t_n)$  pour  $n = 0, 1, 2$  (tableau  $tab_1$ ). Sachant que  $h = \frac{150}{3} = 50$ ;

$$tab_1 = [50, -50, -300]$$

en effet:

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } N &= 3 \quad ; \quad h = 50; \quad \lambda = 0.03; \quad \omega = 1.4 \\
 x_0 &= 0 \quad \text{et} \quad v_0 = 1 \\
 x_1 &= x_0 + 50 \times v_0 = \boxed{50} \quad \text{et} \quad v_1 = v_0 + (-2 \times 0.03 \times 50 - 1.4^2 \times x_0) \times h = -2 \\
 x_2 &= x_1 + 50 \times v_1 = 50 - 2 \times 50 = \boxed{-50} \quad \text{et} \quad v_2 = v_1 + h \times (-2 \times \lambda v_0 - 1.4^2 \times x_0) = -5 \\
 x_3 &= x_2 + 50 \times v_2 = -50 - 5 \times 50 = \boxed{-300}
 \end{aligned}$$

**Q16.** `while` au lieu de `for`: on change les lignes de commande 16 à 20 par:

```

15 ...
16 i=0
17 while i < N:
18     (x, v, a) = (x+v*h, v+a*h, -2*lamda*v-omega*omega*x)
19     tab_1[i] = x
20     tab_2[i] = v
21     i=i+1
22 return tab_1
23 ...
    
```

**Q17.** On détermine la pseudo-pulsation  $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$  à partir du graphe  $r(t)$ . Sur l'intervalle du temps égale à 80 (*par exemple*), on compte 38 pseudo-périodes; soit:

$$\Delta t = 80 = 38 \times \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega \sim 2,98$$

**Q18.** En faisant pareil pour la première courbe donnée par la méthode d'Euler, on trouve;

$$\Delta t = 100 = 22 \times \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \Rightarrow \omega \sim 1,38$$

alors que la valeur choisie dans le programme python est de 1,4 (ligne 6);

```
5 ...
6 omega = 1.4
7 ...
```

On pourra dire que la méthode d'Euler est, alors, satisfaisante.

## Partie III - Rayonnement de l'atome de Thomson excité et largeur spectrale de la raie d'émission

### III.1- Puissance rayonnée par un atome excité

**Q19.**

- approximation dipolaire:  $r \gg a$ ;
- approximation non relativiste:  $\lambda \gg a$ ;
- zone de rayonnement ou rayonnement à grandes distances:  $r \gg \lambda$

**Q20.** le moment dipolaire  $\vec{p} \propto \vec{e}_z$ ; le plan  $\Pi_s(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est, alors, un plan de symétrie de la distribution:

- le champ électrique  $\vec{E}$  appartient à ce plan:  $\vec{E} \parallel \Pi_s$  et  $\vec{E} \perp \vec{e}_\varphi$ .
- le champ magnétique  $\vec{B}$  est orthogonal à ce plan:  $\vec{B} \perp \Pi_s$  et  $\vec{B} \parallel \vec{e}_\varphi$ .

$$\vec{E} = E_\theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi$$

- au terme d'homogénéité:

$$[E] = [Vitesse] \times [B]$$

- soient:

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin(\theta) \left[ \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \sin(\theta) \left[ \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{e}_\varphi$$

**Q21.** Vecteur de poynting:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{R}} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin(\theta) \left[ \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right)^2 \frac{\vec{e}_r}{\mu_0 c} \\ &= \left( \frac{\mu_0 \omega^2 p_m}{4\pi r} \sin(\theta) \right)^2 \sin^2 \left( \omega_0 t - \frac{\omega_0 r}{c} \right) \frac{\vec{e}_r}{\mu_0 c} \\ \langle \vec{\mathcal{R}} \rangle_t &= \frac{1}{2\mu_0 c} \left( \frac{\mu_0 \omega^2 p_m}{4\pi r} \sin(\theta) \right)^2 \vec{e}_r \end{aligned}$$

**Q22.** la puissance moyenne rayonnée:

$$\Phi_{ray} = \iint_{(S)} \langle \vec{\mathcal{E}}(r=R) \rangle_t \cdot \vec{dS} = \frac{\mu_o \omega_o^4 p_m^2}{32\pi^2 c} 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta}_{4/3}$$

soit:

$$\Phi_{ray} = \frac{\mu_o \omega_o^4 p_m^2}{12\pi c} = \frac{\omega_o^4 p_m^2}{12\pi \epsilon_o c^3} \quad ; \quad (\epsilon_o \mu_o c^2 = 1)$$

**Q23.** la puissance moyenne  $\Phi_{ray}$  rayonnée et énergie  $\mathcal{E}_m$  de l'oscillateur:

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{m_e \omega_o^2}{2e^2} p_o^2 e^{-2t/\tau} \quad \text{et} \quad \Phi_{ray} = \frac{\omega_o^4 p_o^2}{12\pi \epsilon_o c^3} e^{-2t/\tau}$$

on a, alors:

$$\Phi_{ray} = \frac{\omega_o^2 e^2}{6\pi \epsilon_o c^3 m_e} \mathcal{E}_m(t) = \gamma \mathcal{E}_m(t) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\omega_o^2 e^2}{6\pi \epsilon_o c^3 m_e}$$

### III.2- Amortissement des oscillations

**Q24.** Estimation qualitative grossière

$$\mathcal{E}_{ray} = \frac{hc}{\lambda_o} = \hbar \omega_o \quad \text{et} \quad \Delta t \sim \frac{\mathcal{E}_{ray}}{\Phi_{ray}} = \frac{12\pi \hbar \epsilon_o c^4}{\lambda_o \omega_o^4 e^2 a^2} \approx 10^{-10} \text{ s}$$

**Q25.**

$$\delta \mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(t + \delta t) - \mathcal{E}_m(t) = -\Phi_{ray} \delta t$$

**Q26.**

$$\frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} + \Phi_{ray} = \frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} + \gamma \mathcal{E}_m(t) = 0$$

$$\frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} + \frac{\mathcal{E}_m(t)}{\tau_e} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_e = \frac{1}{\gamma} \sim 0,34 \text{ ns}$$

En plus, en utilisant la question **Q13.**:

$$\frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{E}_m(t) \quad \Rightarrow \quad \tau_e = \tau = \frac{1}{\gamma}$$

**Q27.** durée d'un train d'onde:

$$\Delta T_{train} \sim 5\tau \approx 1,7 \times 10^{-9} \text{ s}$$

## Partie IV - Mesure interférométrique de la durée d'un train d'onde

### IV.1- Description de l'interféromètre de Michelson

**Q28.** Marche des rayons:

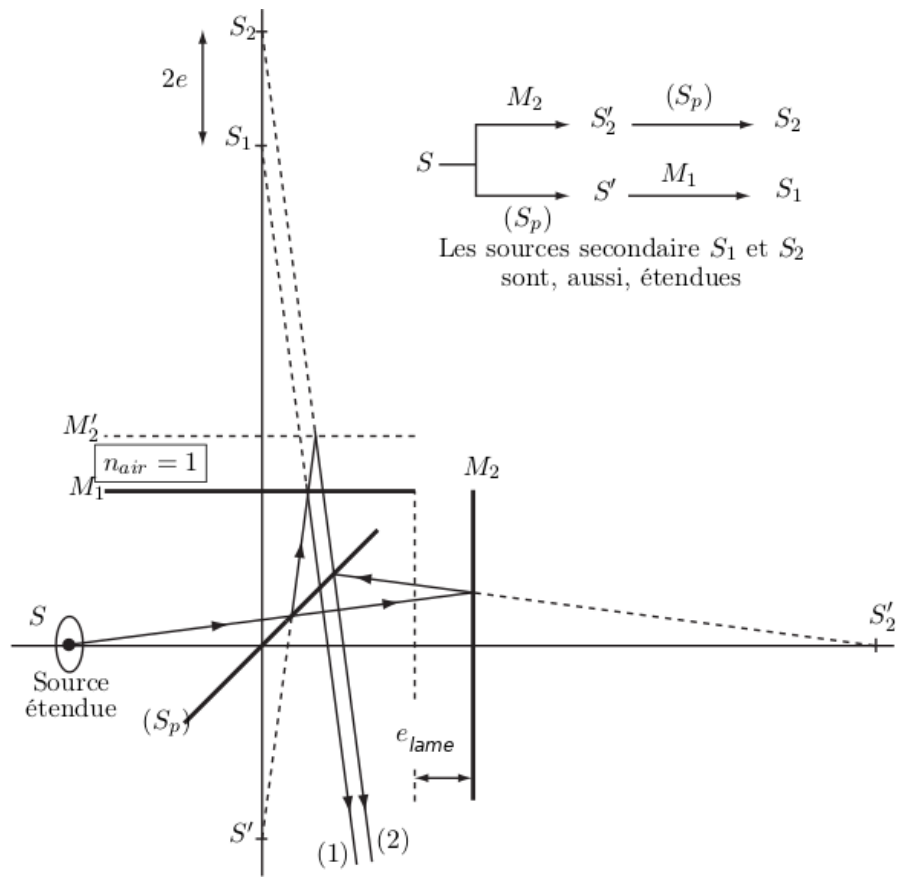


Figure 1: Modèle complet de l'interféromètre de Michelson en lame d'air

Q29. Différence de marche:

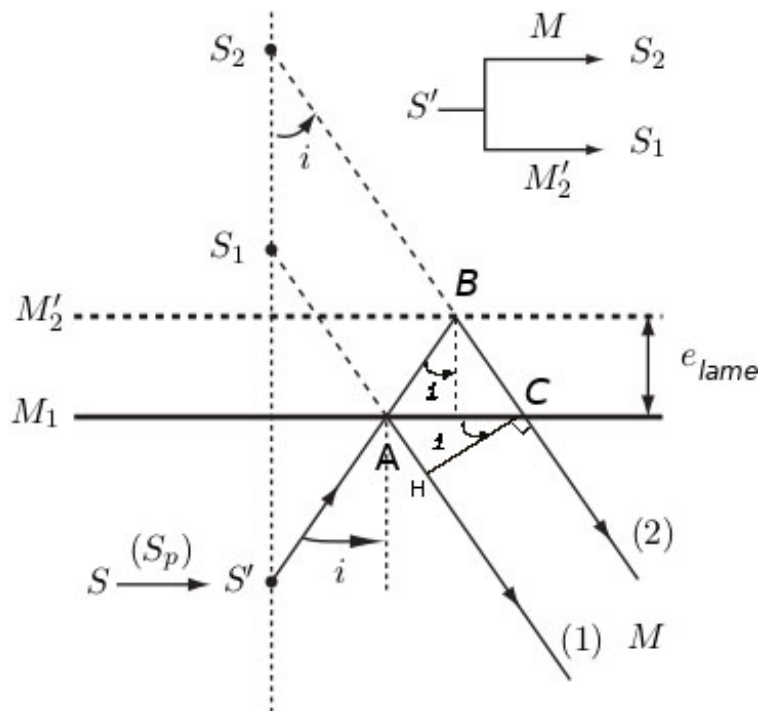


Figure 2: Modèle simplifié de l'interféromètre de Michelson en lame d'air



$$\delta = (2) - (1) = (ABC) - (AH) = 2AB - AH$$

avec  $AB = \frac{e_{lame}}{\cos(i)}$  ;  $AH = AC \sin(i)$  et  $AC = 2e_{lame} \tan(i)$

$$\delta = \frac{2e_{lame}}{\cos(i)} - \frac{2e_{lame} \sin^2(i)}{\cos(i)} = 2e_{lame} \cos(i)$$

L'intensité lumineuse:

$$I(M) = 2I_o \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right)$$

les franges d'interférence sont des anneaux concentriques localisés à l'infini.

**IV.2- Largeur spectrale d'une raie d'émission**

**Q30.**

- o La raie spectrale n'est pas strictement monochromatique, La raie spectrale n'est pas strictement monochromatique, elle est composé de plusieurs bandes spectrales monochromatique de fréquences comprises entre  $\nu_1 = \nu_o - \frac{\Delta\nu}{2}$  et  $\nu_2 = \nu_o + \frac{\Delta\nu}{2}$ .

Ces raies étant incohérentes; on a, donc, possibilité du brouillage.

- o la variation de l'ordre d'interférence

$$\Delta p = p\left(\nu_o + \frac{\Delta\nu}{2}\right) - p(\nu_o) = \frac{\delta}{c} \frac{\Delta\nu}{2}$$

**Q31.**

- anneaux contrastés:  $\delta = m\lambda = m\frac{c}{\nu}$ , avec  $m$  entier
- perte de contraste :  $\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{\nu}$
- à la frontière:

$$\delta_{lim} = m\frac{c}{\nu_o} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{\nu_o + \frac{\Delta\nu}{2}} \Rightarrow m = \frac{\nu_o}{\Delta\nu} = \frac{\nu_o}{c}\delta_{lim} \Rightarrow \delta_{lim} = \frac{c}{\Delta\nu}$$

soit;

$$2e_{lim} = \frac{c}{\Delta\nu} \Rightarrow e_{lim} = \frac{c}{2\Delta\nu}$$

**Calcul de l'intensité observée en  $F'$**

**Q32.** L'intensité donnée par une petite bande spectrale:

$$dI(F') = \frac{I_{vm}}{\Delta\nu} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}\delta(F')\right) \right] d\nu = \frac{I_{vm}}{\Delta\nu} [1 + \cos(2\pi\nu\tau(F'))] d\nu$$

$\tau(F')$  désigne le temps de cohérence.

Ordre d'interférence:

$$p(F', \nu) = \frac{\delta(F')}{\lambda} = \frac{\delta(F')}{c}\nu = \tau(F')\nu$$

**Q33.** L'intensité donnée par tout le spectre:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{[\Delta\nu]} dI(F') = \frac{I_{vm}}{\Delta\nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} [1 + \cos(2\pi\nu\tau(F'))] d\nu = \frac{I_{vm}}{\Delta\nu} \left( \Delta\nu + \left[ \frac{\sin(2\pi\nu\tau(F'))}{2\pi\nu\tau(F')} \right]_{\nu_1}^{\nu_2} \right) \\
 &= I_{vm} \left( 1 + \frac{\sin(\pi\tau(F')\Delta\nu)}{\pi\tau(F')\Delta\nu} \cos(2\pi\nu_o\tau(F')) \right) \\
 &= I_{vm} (1 + \Gamma(F') \cos(2\pi\nu_o\tau(F'))) \quad \text{où} \quad \Gamma(F') = \frac{\sin(\pi\tau(F')\Delta\nu)}{\pi\tau(F')\Delta\nu}
 \end{aligned}$$

**Q34.** Allure de  $I(\tau(F'))$

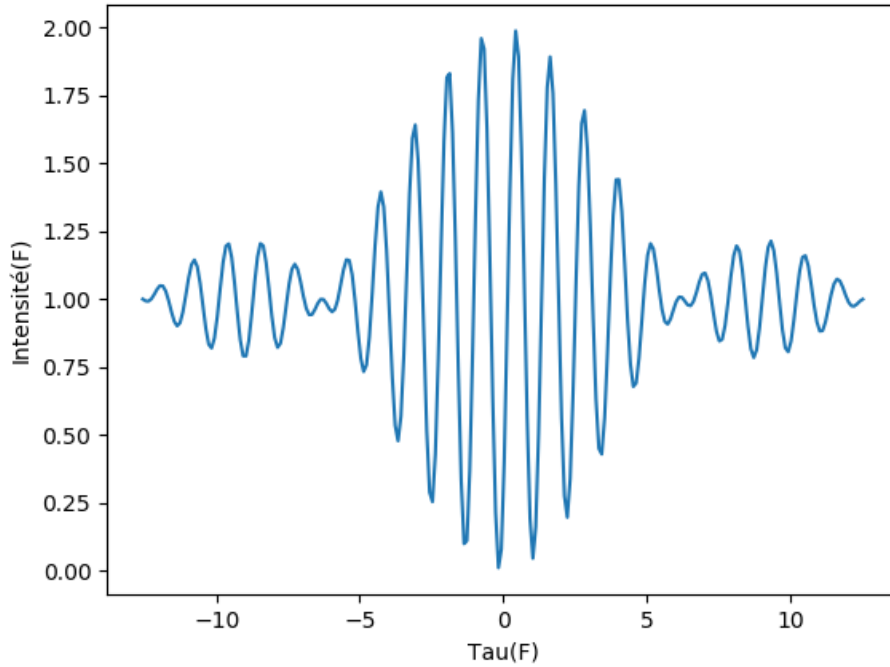


Figure 3: Intensité d'interférence

La première annulation de contraste est pour:

$$\pi\tau(F')\Delta\nu = \pi \quad \text{ou} \quad \tau(F') = \frac{1}{\Delta\nu} = \tau_o$$

**Q35.**

$$\Delta\nu_{exp} = \frac{c}{2e_{lim}} = 10^{10} \text{ Hz} \sim \frac{1}{\Delta T_{train}}$$

## Partie V - Largeur Doppler d'une raie d'émission

### V.1- Décalage Doppler

$$T_o = t_{e2} - \underbrace{t_{e1}}_{=0} \quad \text{avec} \quad t_{ei} : \text{l'instant d'émission du } i^{\text{ème}} \text{ maximum}$$

**Q36.** Le récepteur reçoit le premier maximum à l’instant:

$$t_1 = \frac{d}{c}$$

**Q37.**

- Le deuxième maximum est émis à l’instant:

$$t_{e2} = \frac{x}{V_x} = T_o$$

- La distance  $d_{O'R}$  entre l’émetteur  $O'$  et le récepteur  $R$  à cet instant:

$$d_{O'R} = d - x = d - V_x T_o$$

- La date  $t_2$  du réception du deuxième maximum:

$$t_2 = T_o + \frac{d_{O'R}}{c} = T_o + \frac{d - V_x T_o}{c}$$

**Q38.**

$$T = t_2 - t_1 = T_o - \frac{V_x T_o}{c} = T_o \left(1 - \frac{V_x}{c}\right)$$

$$v_o = v \left(1 - \frac{V_x}{c}\right) \quad \text{ou} \quad v \approx v_o \left(1 + \frac{V_x}{c}\right)$$

**V.2- Distribution des vitesses dans un gaz parfait unidimensionnel**

$$T_{gaz} = 1000 K \quad \text{et} \quad L = 10 cm$$

**Fonction d’onde d’un atome dans un état stationnaire**

**Q39.** Le spectre énergétique d’un atome est discret. La masse  $m^*$  d’un atome de Hg:

$$1 = n_{Hg}^* \mathcal{N}_A = \frac{m^*}{M_{Hg}} \quad \Rightarrow \quad m^* = \frac{M_{Hg}}{\mathcal{N}_A} \approx 10^{-21} g$$

**Q40.** Équation différentielle:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = \mathcal{E} \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k^2 \varphi(x) \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2m^*}{\hbar^2} \mathcal{E}$$

Conditions aux limites:

$$\varphi(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x=L) = 0$$

**Q41.** Solution:

$$\varphi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

- $\varphi(x=0) = 0$  donne  $A = 0$
- $\varphi(x=L) = 0$  donne  $B \sin(kL) = 0$

soit;

$$k_n L = n\pi \quad \text{avec} \quad n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \frac{2m^*}{\hbar^2} \mathcal{E}_n \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$\mathcal{E}_n = n^2 \times \mathcal{E}_1 \quad \text{où} \quad = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2}$$

**Q42.**

$$\mathcal{E}_{n1} = k_B T_{gaz} \quad \Rightarrow \quad n_1 = \sqrt{\frac{2k_B T_{gaz} m^* L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \approx 10^{12}$$

la variation  $\frac{\mathcal{E}_{n1+1} - \mathcal{E}_{n1}}{\mathcal{E}_{n1}} \sim 10^{-12}$ : l'approximation continue est, alors valable.

**Q43.**

$$n(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_1}}$$

**Q44.** Le nombre d'états quantiques et densité:

$$dn = n(\mathcal{E} + d\mathcal{E}) - n(\mathcal{E}) = \frac{dn}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{E}_1}} = \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

$$\rho(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{E}_1}}$$

**Q45.** Probabilité:

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = Ae^{-\beta\mathcal{E}} \quad \text{où} \quad \beta = \frac{1}{k_B T_{gaz}}$$

**Q46.**

$$d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = Ae^{-\beta\mathcal{E}} dn(\mathcal{E}) = Ae^{-\beta\mathcal{E}} \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = f(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

$$f(\mathcal{E}) = Ae^{-\beta\mathcal{E}} \rho(\mathcal{E}) = \frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

**Q47.**  $\int_0^{+\infty} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 1$  est la condition de normalisation.

$$\int_0^{+\infty} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 1 = \int_0^{+\infty} \frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} = \underbrace{\frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} d\mathcal{E}}_{\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}} \Rightarrow A = 2\sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{k_B T_{gaz}\pi}}$$

soit;

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{k_B T_{gaz}\pi}} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \times \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

**Q48.**

- La valeur moyenne  $\langle \mathcal{E} \rangle$  de l'énergie:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \int_0^{+\infty} \mathcal{E} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \int_0^{+\infty} \mathcal{E} f(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \sqrt{\mathcal{E}} e^{-\beta\mathcal{E}} d\mathcal{E}}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \beta^{-3/2}} = \frac{k_B T_{gaz}}{2}$$

- *Théorème d'équipartition de l'énergie:*

Pour un système en contact avec un thermostat à la température  $T$ , la valeur moyenne de toute contribution quadratique dans l'expression de l'énergie est égale à  $1/2k_B T$ .

- Vitesse quadratique moyenne:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} m^* \langle V_x^2 \rangle = \frac{k_B T_{gaz}}{2} = \frac{1}{2} m^* u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{k_B T_{gaz}}{m^*}}$$

- Ordre de grandeur de  $u$ :

$$u \approx 10^2 \text{ m s}^{-1}$$

### V.3- Élargissement spectral par effet Doppler

Q49.

$$v_+ = v_o \left(1 + \frac{u}{c}\right) = \frac{c}{\lambda_o} \left(1 + \frac{u}{c}\right) \quad \text{et} \quad v_- = \frac{c}{\lambda_o} \left(1 - \frac{u}{c}\right)$$

$$\Delta_{DOP} = v_+ - v_- = \frac{2u}{\lambda_o} = 10^8 \text{ Hz}$$

même ordre de grandeur que  $\Delta v_{exp}$  mesuré en Q35..