PROBLEME II/ ECRANTAGE D'UN CHAMP MAGNETIQUE   CCP MP 2009 ③ Phy 2

I]

1) a) cours : $\vec{B_1} = \mu_0 n_1 i \ \vec{u_z}$ à l'intérieur et $\vec{B_1} = \vec{0}$ à l'extérieur

b) $\phi_{1\,propre} = \iint_{S_1} \vec{B_1}\cdot\vec{dS_1} = N_1 \iint_{1\,spire} \vec{B_1}\cdot\vec{dS_1} = N_1 B_1 \pi r_1^2 = \frac{\mu_0 N_1^2}{L}\pi r_1^2\, i \underset{def}{=} L_1 i$ $\boxed{L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 \pi r_1^2}{L}}$

de même : $\boxed{L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 \pi r_2^2}{L} = 12\ mH}$

c) $\Phi_{1\to 2} \underset{def}{=} M i$ $\Phi_{1\to 2} = \iint_{S_2} \vec{B_1}\cdot\vec{dS_2} = N_2 \iint_{1\,spire} \vec{B_1}\cdot\vec{dS_2}$

$= N_2 \mu_0 n_1 i \,\pi r_2^2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2}{L} i$ $\boxed{M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2}{L}}$

2) a) Fem totale induite dans Σ_2 : $e_2 = -M\frac{di_0}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt} = R i_2$ (bobine fermée sur sa résistance) par Faraday

en complexes : $\underline{e_2} = -Mj\omega \underline{i_0} - L_2 j\omega \underline{i_2} = R\underline{i_2} \Leftrightarrow \underline{i_2} = \frac{-Mj\omega}{R + j\omega L_2}\underline{i_0}$

On trouve bien : $\boxed{\underline{i_2} = \frac{Kj\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}}$ avec $K = -\frac{N_1}{N_2}$, $\omega_c = \frac{R_2}{L_2}$

b) A l'intérieur, on somme le champ créé par Σ_1 et par Σ_2 :

$\underline{B_2} = \mu_0 n_1 \underline{i_0} + \mu_0 n_2 \underline{i_2}$
$= \frac{\mu_0 N_1}{L}\underline{i_0} + \frac{\mu_0 N_2}{L}\frac{Kj\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$
$= \frac{\mu_0 N_1}{L}\underline{i_0}\left(1 - \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}\right)$

en HF $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$ et $\underline{B_2} \to 0$

L'amplitude de $\vec{B_2}$ tend vers 0 : on observe un écrantage du champ de Σ_1 par Σ_2 à l'intérieur de Σ_2.

$\boxed{\underline{B_2} = \frac{\mu_0 N_1}{L\,(1+j\frac{\omega}{\omega_c})}\underline{i_0}}$

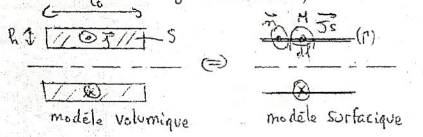
c) $\omega_c = \frac{R_2}{L_2} = 4{,}1\cdot 10^3\ rad/s$ $I_2 = \frac{I_0 |K| \frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$ $\omega = 2\pi f$ et $\frac{\omega}{\omega_c} = 47$ $\underline{I_2 = 1{,}4\ A}$

Amplitude de $\vec{B_2}$: $B_{2m} = \frac{\mu_0 N_1 I_0}{L\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = \underline{2{,}6\cdot 10^{-4}\ T}$ $B_{1m} = \frac{\mu_0 N_1 I_0}{L} = 4{,}4\ mT$

$\frac{B_{2m}}{B_{1m}} = 5{,}9\cdot 10^{-2}$ (Bon écrantage)

II]

1) Soit une longueur l_0 de cylindre



égalité des intensités dans les deux modèles :

$\iint_S \vec{j}\cdot\vec{dS} = \int_{(\Gamma)} \vec{j_S}\cdot\vec{n}\,dl \Leftrightarrow j l_0 h = j_S l_0 \Leftrightarrow j_S = jh$

$\vec{j_S} = h\vec{j} = h\gamma\vec{E}$ par loi d'ohm dans le modèle volumique

$\vec{j}$ et $\vec{j_S}$ sont orthoradiaux, car ce sont des vrais vecteurs et ils obéissent à la loi de Curie : ils ont au moins la symétrie du phénomène qui les crée soit celle des courants de Σ_1 or le plan (axe, M) est un plan d'antisymétrie → en M : $\vec{j}$ et $\vec{j_S} \perp$ plan (axe, M)

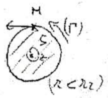
2) a) Un plan ⊥ axe est plan de symétrie des courants (tous les courants). Donc $\vec{B} \perp$ à plan $\vec{B} = B\vec{u_z}$

b) Entre r_1 et r_2 on retrouve le champ créé par Σ_1 seul. En effet, le cylindre conducteur crée le même champ qu'un solénoïde, donc nul à l'extérieur ($r > r_2$) $\vec{B_e} = \mu_0 n_1 i_0 \vec{u_z} = \frac{\mu_0 N_1}{L} i_0 \vec{u_z}$

c) C'est la superposition de 2 champs de solénoïdes uniformes tous deux dans cet espace.

d) Plan (axe, M) = plan d'antisymétrie des courants. $\vec{E}(M) \perp$ Plan donc $\vec{E}$ orthoradial : $\vec{E} = E\vec{u_\theta}$

pas de charge : $\vec{E} = \vec{E_m} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Sur un cercle (Γ) centré sur l'axe et orienté suivant $\vec{u_\theta}$

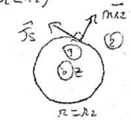


$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E_m}\cdot\vec{dl} = \oint_{(\Gamma)} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{dl} \underset{\text{stokes}}{=} \iint_S \vec{rot}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\cdot\vec{dS} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B_i}\cdot\vec{dS} = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} = E\, 2\pi r$

en complexes : $\underline{E} = -\frac{r}{2}\frac{d\underline{B_i}}{dt} = -\frac{r}{2} j\omega \underline{B_i}$

En $r = r_2$ ($r < r_2$), au niveau du cylindre conducteur : $\underline{E} = -\frac{r_2}{2} j\omega \underline{B_i}$

e)



On considère la surface du cylindre conducteur :

Dans le modèle surfacique : $\vec{E}$ est tangentiel et continu $\vec{E}\binom{r = r_2}{r<r_2} = \vec{E}\binom{r = r_2}{r>r_2}$

$\vec{B}$ est tangentiel et discontinu : $\vec{B_2} - \vec{B_1} = \vec{B_e} - \vec{B_i} = \mu_0 \vec{J_S}\wedge\vec{n_{12}}$

avec $\vec{J_S} = J_S\vec{u_\theta}$, $\vec{n_{12}} = \vec{u_r}$ on obtient sur $\vec{u_z}$: $B_e - B_i = -\mu_0 J_S \Leftrightarrow B_i = B_e + \mu_0 J_S = B_e + \mu_0 h\gamma E$

en complexes : $\underline{B_i} = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1}{L}\underline{i_0}}_{\underline{B_e}} + \mu_0 h\gamma\left(-\frac{r_2}{2} j\omega \underline{B_i}\right) \Leftrightarrow \boxed{\underline{B_i} = \frac{\underline{B_e}}{1 + j\omega\tau} \text{ et } \tau = \frac{\mu_0\gamma h r_2}{2}}$

f) $B_{em} = \frac{\mu_0 N_1}{L} I_0 = 4{,}4\ mT$ $B_{im} = \frac{B_{em}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = \frac{B_{em}}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2\left(\frac{\mu_0\gamma h r_2}{2}\right)^2}} = \underline{0{,}99\ mT}$

Intensité totale à travers la longueur L : $\underline{i_2} = \underline{J_S} L = \gamma h \underline{E} L = -\gamma h L \frac{r_2}{2} j\omega \underline{B_i}$

amplitude $I_2 = \gamma h L \frac{r_2}{2}\omega B_{im} = \underline{680\ A}$

on obtient une valeur élevée, mais du même ordre que $N_2 I_2 = 700\ A$ en I] 2) c)

L'écrantage est dû aux courants de Foucault (intensité I_2), qui suivant Lenz créent un champ propre qui s'oppose à $\vec{B_e}$: d'où cet effet d'écran.

3) a) le cylindre est équivalent à un solénoïde avec $j_S = ni$ (cours)

$B_{int} = \mu_0 j_S = \mu_0 j h$ si $r < r_2$
$B_{ext} = 0$ si $r > r_2 + h$

pour $r_2 < r < r_2 + h$, seul le j_S entre r_2 et r est à prendre en compte : $j_S' = j(r - r_2)$
$B = \mu_0 j_S' = \mu_0 j (r - r_2)$

b) $I = jhL$

c) $U_m = \iiint_{espace} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint_{intérieur\ (r<r_2)} B^2/\mu_0\, d\tau = \left(\frac{B_{int}}{2\mu_0}\right)^2 \pi r_2^2 L = \frac{\mu_0 j^2 h^2 \pi r_2^2 L}{2} \underset{def}{=} \frac{1}{2} L_2 I^2$

$L_2 = \frac{\mu_0 \pi r_2^2}{L}$

d) $U = \frac{j}{\gamma} 2\pi r_2$ (avec $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, $\vec{E} = -\vec{grad}\,V$)

$I = jhL$ $R_2 = \frac{U}{I} = \frac{2\pi r_2}{\gamma L h}$

On peut aussi utiliser la formule de la résistance d'un conducteur quasi-cylindrique $R_2 = \frac{1}{\gamma}\frac{\text{longueur}}{\text{section}}$

e) $\tau_c = \frac{L_2}{R_2} = \frac{\mu_0 \pi r_2^2}{L} \times \frac{\gamma L h}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0\gamma h r_2}{2} = \underline{\tau = 6{,}3\cdot 10^{-5}\ s}$

cette étude permet de mesurer τ.

CCP MP 2003
Phy 2 Partie B2

DIFFRACTION

2.1. énoncé voir cours – contribution de Fresnel :
L'amplitude des sources secondaires est proportionnelle à la surface – les ondes secondaires sphériques se propagent jusqu'en M où elles interfèrent → intégrale de Fresnel

2.2) dans e^{jkr}, kr est la phase de l'onde sphérique (partie spatiale)
$kr - \omega t$ → propa vers les r croissants. $\frac{1}{r}$: terme de diminution d'amplitude des ondes sphériques
$c\,dS/r$ sans dimension → C en m^{-1}

$r^2 = \vec{PM}^2 = (\vec{OM} - \vec{OP})^2 = R^2 + OP^2 - 2R\,\vec{e}\cdot\vec{OP}$ avec $OP \ll R$ (Fraunhofer)

$r \simeq R\left(1 - \frac{\vec{e}\cdot\vec{OP}}{R}\right) = R - \vec{e}\cdot\vec{OP}$. De plus $\frac{1}{r} \simeq \frac{1}{R}$ d'où le résultat avec : $\underline{K} = \frac{C\,e^{jkR}}{R}$ (en m^{-2})

en exprimant $\vec{k}\cdot\vec{OP}$ → $\underline{\psi}(u,v) = \underline{K} \iint_D \underline{\psi_0}(P)\, e^{-2j\pi(ux+vy)}\,dx\,dy$ et $I = \underline{\psi}\,\underline{\psi}^*/2$

2.3) Avec le dispositif proposé arrive sur le diaphragme une onde plane parallèle à l'axe.
Donc $\underline{\psi_0}(P) = c^{te}$ sur l'ouverture et sort de l'intégrale.

$$\underline{\psi}(u,v) = \underline{K}\,\underline{\psi_0}(P) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2j\pi ux}\,dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-2j\pi vy}\,dy = \boxed{\underline{K}\,\underline{\psi_0}(P)\,ab\,\frac{\sin(\pi ua)}{\pi ua}\,\frac{\sin(\pi vb)}{\pi vb}}$$

$$I(u,v) = \frac{\underline{\varphi_0}\,\underline{\varphi_0}^*}{2}\,\frac{\sin^2 U}{U^2}\,\frac{\sin^2 V}{V^2}$$ $(\underline{\varphi_0} = \underline{K}\,\underline{\psi_0}\,ab)$ $(U = \pi ua$ et $V = \pi vb)$

2.3.2) → il faut décomposer l'intégrale en 3 morceaux correspondant aux 3 domaines de x :

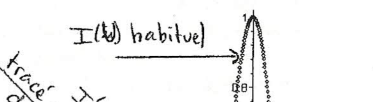
$$\iint_D \underline{t}(P)\,e^{-2j\pi(ux+vy)}\,dx\,dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-2j\pi vy}\,dy \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{4}} e^{-2j\pi ux}\,dx + \int_{-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}} e^{j\pi}\,e^{-2j\pi ux}\,dx + \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} e^{-2j\pi ux}\,dx\right]$$

$$\underline{\psi}'(u,v) = \underline{K}\,b\,\underline{\psi_0}(P)\,\frac{\sin V}{V}\left[\frac{a}{4}\,e^{\frac{3j\pi ua}{4}}\,\frac{\sin(\pi ua/4)}{(\pi ua/4)} - \frac{a}{2}\,\frac{\sin(\pi ua/2)}{(\pi ua/2)} + \frac{a}{4}\,e^{-\frac{3j\pi ua}{4}}\,\frac{\sin(\pi ua/4)}{(\pi ua/4)}\right]$$

$$= \underline{K}\,ab\,\underline{\psi_0}(P)\,\frac{\sin V}{V}\,\frac{2}{\pi ua}\,\sin(\pi ua/4)\left[\cos\frac{3\pi ua}{4} - \cos\frac{\pi ua}{4}\right]$$

$$\boxed{\underline{\psi}'(u,v) = -2\,\underline{\varphi_0}\,\frac{\sin V}{V}\,\frac{\sin(U/2)}{(U/2)}\left(1 - \cos^2\frac{U}{4}\right)}$$

$$I'(u,v) = 2\,\underline{\varphi_0}\,\underline{\varphi_0}^*\,\frac{\sin^2 V}{V^2}\,\frac{\sin^2(U/2)}{(U/2)^2}\left[1 - \cos^2\left(\frac{U}{4}\right)\right]^2$$




```
plot([(sin(Pi*x)/(Pi*x))^2,(2*sin(Pi*x/2)
/(Pi*x/2)*(1-(cos(Pi*x/4))^2))^2],
x=-4..4,colour=[black,black],
style=[point,line],numpoints=800);
```

2.4)₁) Remplacer $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$ par $\int_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}}$

→ $\underline{\psi_0}(u,v) = \underline{\psi}(u,v)\,e^{-2j\pi ux_0}$

simple déphasage de $-2\pi ux_0$ → $I_0(u,v) = I(u,v)$

2.4.2) $\underline{\psi_1}(u,v) = \underline{\psi}(u,v)\,e^{-2j\pi vd}$
$\underline{\psi_2}(u,v) = \underline{\psi}(u,v)\,e^{2j\pi vd}$

→ $\underline{\psi}'' = \underline{\psi_1} + \underline{\psi_2} = \underline{\psi}\,2\cos(2\pi vd)$

→ $I'' = I\,4\cos^2(2\pi vd) = 2I(1 + \cos 4\pi vd)$

$I''_0 = \frac{\underline{\varphi_0}\,\underline{\varphi_0}^*}{2}$ $f(u) = \frac{\sin^2 U}{U}$ $g(v) = \frac{\sin^2 V}{V^2}(1 + \cos 4\pi vd)$

2.4.3) $g(v)$ est le produit de l'enveloppe de diffraction (qui donne a) d'une fente $\frac{\sin^2 V}{V^2}$ et de la fonction d'interférence à 2 ondes $1 + \cos(4\pi vd)$ → ces franges permettent de déterminer d