DNS

Sujet

Réseau à échelettes

Dans le domaine de l'optique ultra-rapide, l'amplification des impulsions lumineuses se heurte à une difficulté majeure. En effet, lors de l'amplification, l'intensité crête, inversement proportionnelle à la durée des impulsions, peut prendre des valeurs bien supérieures au seuil de dommage du milieu amplificateur. Pour éviter cela, on utilise des dispositifs optiques permettant d'étirer temporellement l'impulsion avant amplification, et de la « re-comprimer » après amplification.

Dans ce problème on se propose d'étudier le principe d'un étireur d'impulsions constitué par l'association de deux réseaux à réflexion. Dans la première partie on étudiera les propriétés dispersives d'un seul réseau puis dans la deuxième partie, on étudiera celles résultant de l'association de deux réseaux identiques parallèles entre eux.

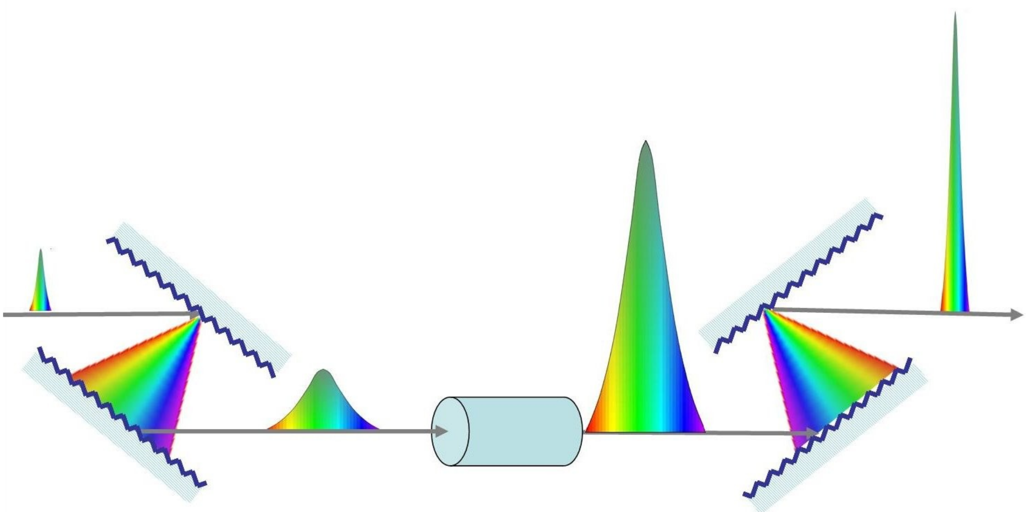


Schéma d'amplification d'une impulsion femtoseconde par étirement temporel,
amplification et compression temporelle de l'impulsion
par dispersion de la lumière sur des réseaux.
(Image CEA Iramis)

I. Réseau à échelettes

On considère le réseau en réflexion dit à échelettes représenté dans la *figure* 1, constitué d'une succession de facettes réfléchissantes (largeur b) inclinées d'un angle γ par rapport au plan du réseau. Une onde plane monochromatique (longueur d'onde λ) éclaire le réseau sous un angle i_0 par rapport à la normale $\vec{e}_r$ et on observe l'onde diffractée à l'infini dans la direction qui fait un angle θ avec $\vec{e}_r$. Les angles d'incidence et de diffraction par rapport à la normale de la facette sont respectivement α_0 et α.

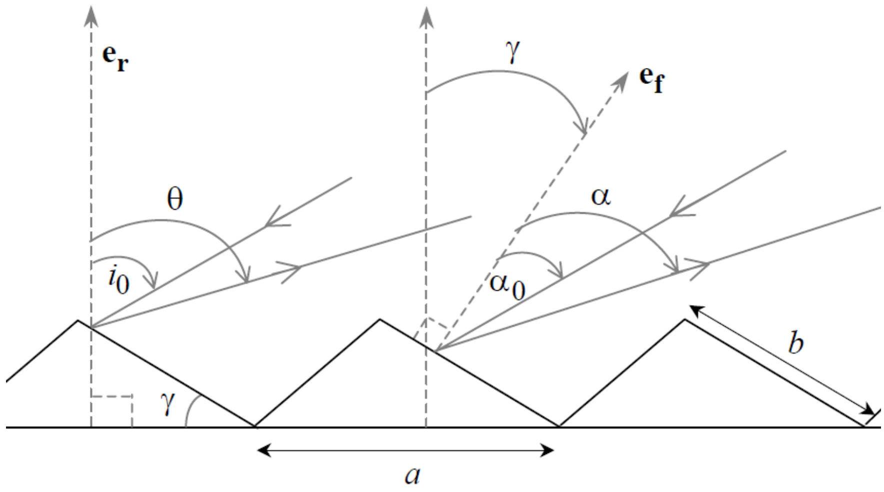


Figure 1

A. Diffraction par une facette

1. Exprimer la différence de phase entre les ondes véhiculées par deux rayons incidents dont l'un tombe sur une extrémité de l'arête de la facette en fonction de α_0, α et de la distance y (*figure* 2).

2. En déduire l'expression de l'amplitude complexe diffractée par une facette dans la direction α.

3. Donner l'expression de l'intensité diffractée $I(\alpha)$. Dans quelle direction de l'espace se situe le centre de la figure de diffraction ? Commenter le résultat obtenu.

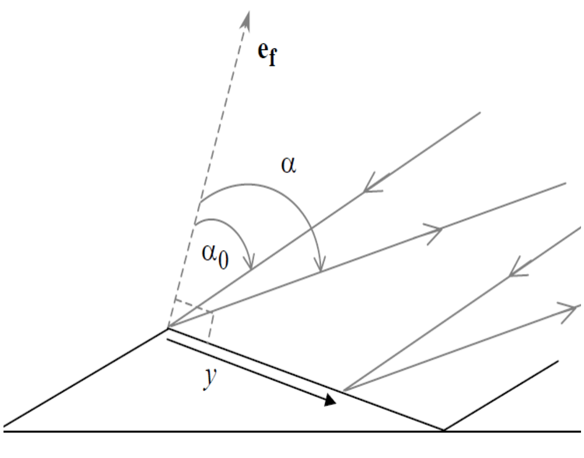


Figure 2

B. Diffraction par le réseau

4. Exprimer la différence de phase entre les ondes véhiculées par deux rayons homologues incidents tombant sur deux facettes consécutives, séparés d'une distance a et des angles i_0 et θ (*figure* 3).

5. En déduire la position des maxima principaux $\theta^{(m)}$ en fonction de λ , a , i_0 et d'un nombre entier m . On définira m de telle façon que $\theta^{(m)}$ soit une fonction croissante de m .

6. On veut faire coïncider pour une longueur d'onde λ_0 l'ordre $+1$ du réseau avec le maximum de la courbe de diffraction d'une facette. Calculer la distance a entre les facettes qui permette de réaliser cette condition. Donner aussi la valeur de $\theta=\theta_0$ en degré. Application numérique : $\gamma=30\,°$, $i_0=45\,°$, $\lambda_0=2\,\mu m$.

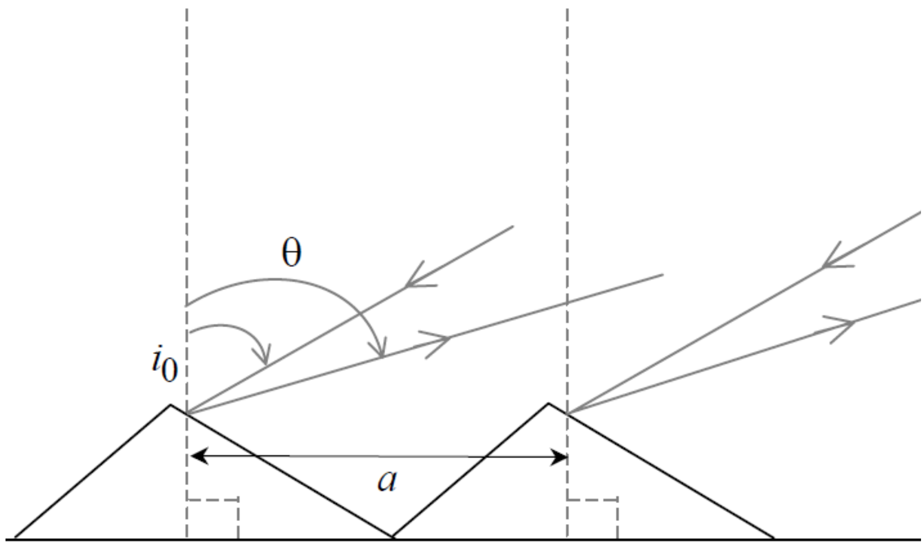


Figure 3

On suppose par la suite que la condition précédente est réalisée et que le réseau (avec $\gamma=30\,°$) se comporte comme un miroir, réfléchissant l'onde incidente dans la direction $\theta(\omega)$ donnée par $\sin\theta(\omega)=\dfrac{2\pi c}{\omega a}-\sin i_0$ pour des longueurs d'ondes $\lambda=\dfrac{2\pi c}{\omega}$ proches de $\lambda_0=2\,\mu m$ et où c est la vitesse de la lumière ($c=3\,10^8 m/s$). On néglige ainsi l'énergie répartie sur les autres maximums. On supposera aussi que la largeur du pic principal est négligeable.

II. Combinaison de deux réseaux à échelettes

On considère maintenant deux réseaux à échelettes (mêmes paramètres γ et a) parallèles entre eux disposés comme le montre la *figure* 4 . La distance z entre les réseaux est supposée être grande de sorte que l'on se trouve dans les conditions de diffraction à l'infini quand l'onde lumineuse irradie le *réseau* 2 . On envoie une onde plane véhiculée par le rayon incident faisant un angle $i_0=45\,°$ avec la normale au *réseau* 1 .

L'onde à l'entrée du *réseau* 1 est une impulsion lumineuse gaussienne qui s'écrit sous la forme : $E(t)=E_0 \exp\left[-(t/\tau)^2\right]\ \exp(i\omega_0 t)$ (c'est à dire le produit d'une composante lumineuse monochromatique $E_0\ \exp(i\omega_0 t)$ par une impulsion de forme gaussienne $\exp\left[-(t/\tau)^2\right]$). τ est une constante et $\omega_0=2\pi c/\lambda_0$ est la pulsation centrale.

On définit les relations de passage entre une fonction complexe $E(t)$ et sa transformée de Fourier $\hat{E}(\omega)$:

$$\hat{E}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)\ \exp(-i\omega t)\ dt \quad \text{et} \quad E(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(\omega)\ \exp(i\omega t)\ d\omega$$

$\hat{E}(\omega)$ est une fonction complexe de ω . L'impulsion lumineuse peut être décrite comme une superposition d'ondes monochromatiques dont le poids de chaque composante est donné par $\frac{1}{2\pi}|\hat{E}(\omega)|^2$. On a dessiné sur la *figure* 4 le trajet correspondant à une onde de pulsation centrale ω_0 . On pose $\theta_0=\theta(\omega_0)$.

On donne la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-(c_1 t^2+2ic_2 t)\right) dt=\sqrt{\frac{\pi}{c_1}}\exp(-c_2^2/c_1)$ avec c_1 , c_2 réels et $c_1>0$.

On convient de définir la « largeur » d'une courbe comme la demi-largeur à $1/e$ du maximum de cette courbe.

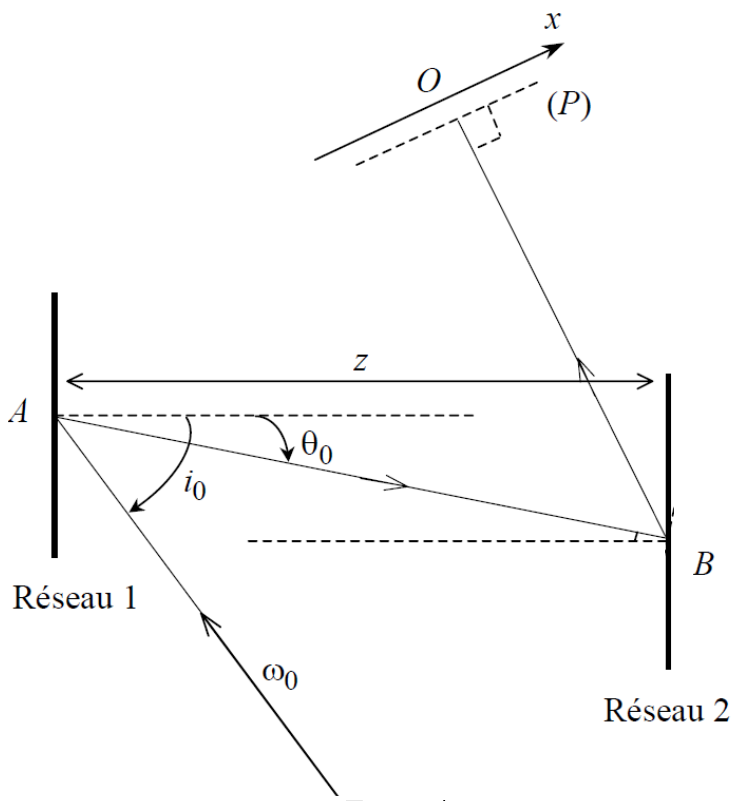


Figure 4

A. Largeur de l'impulsion en pulsations

7. Déterminer la largeur temporelle à $1/e$ de l'impulsion gausienne. Représenter la partie réelle de $E(t)$ en tenant compte des valeurs numériques $\tau=100\ fs$ ($1\ fs=10^{-15}s$) et $\lambda_0=2\,\mu m$.
8. Déterminer la transformée de Fourier $\hat{E}(\omega)$ de l'impulsion lumineuse.
9. En déduire sa « largeur » spectrale.

B. Direction des rayons en sortie

10. On considère le rayon lumineux associé à ω_0 . Montrer qu'il est diffracté par le *réseau* 2 dans une direction parallèle à celle du rayon incident sur le *réseau* 1 .
11. Dessiner le trajet d'un rayon correspondant à une composante spectrale quelconque proche de ω_0 .
12. Conclure quant aux directions des rayons diffractés par le deuxième réseau.

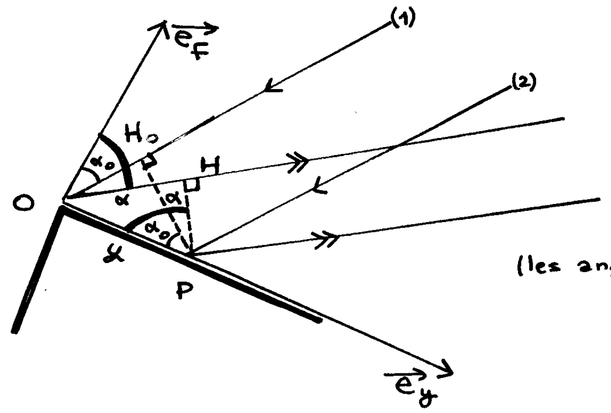
C. Dispersion spatiale de l'impulsion en sortie

On désire étudier l'étalement du spectre dans le plan d'observation (P) perpendiculaire au trajet du rayon associé à ω_0 . Dans ce plan, on prend l'origine $x=0$ pour le point d'impact du rayon de pulsation $\omega=\omega_0$.

13. Trouver la relation $x(\theta)$ donnant le point d'impact du rayon lumineux diffracté par le *réseau* 1 sous un angle θ sur le plan (P) .
14. A partir de la relation $\theta(\omega)$ sachant que θ est proche de θ_0 , par un calcul approché, trouver la relation entre $\Delta\theta=\theta(\omega)-\theta_0$ et $\Delta\omega=\omega-\omega_0$.
15. En déduire la relation $x(\omega)$ caractérisant l'étalement spatial du spectre de l'impulsion le long du plan (P) .
16. En ne tenant compte que de la dispersion spatiale déterminée précédemment, déterminer le profil spatial de l'intensité lumineuse au niveau de ce plan (P) .
17. Application numérique : Calculer la « largeur » de la courbe de l'intensité diffractée dans le plan (P) pour $\tau=100\ fs$, $z=2\text{m}$ et $a=2{,}07\,\mu m$.

Réponses

1)



(les angles α_0

L'indice étant égal à 1, on a alors :

$$\delta_{2/1} = -(OH_0 + OH)$$
$$= -(y \sin\alpha_0 + y \sin\alpha)$$

En comptant positivement une phase retard
(c'est à dire en travaillant en $\exp j(\omega t - \varphi)$ ou en $\exp j(\varphi - \omega t)$)
on aura

$$\varphi_{2/1} = \frac{2\pi\, \delta_{2/1}}{\lambda_{vide}}$$

$$\boxed{\varphi_{2/1} = -\frac{2\pi y}{\lambda}(\sin\alpha + \sin\alpha_0)}$$

remarque : La formule vectorielle reste toujours utilisable.

$$\varphi_{SM\ trajet\ 1} = \vec{k_0}\,\overrightarrow{SO} + \vec{k}\,\overrightarrow{OM}$$
$$\varphi_{SM\ trajet\ 2} = \vec{k_0}\,\overrightarrow{SP} + \vec{k}\,\overrightarrow{PM}$$

$$\varphi_{2/1} = \varphi_{SM\ trajet 2} - \varphi_{SM\ trajet\ 1}$$
$$= \vec{k_0}(\overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SO}) + \vec{k}(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{OM})$$
$$= \vec{k_0}\,\overrightarrow{OP} + \vec{k}\,\overrightarrow{PO}$$
$$= -\overrightarrow{OP}(\vec{k} - \vec{k_0})$$
$$= -\begin{vmatrix} 0 \\ y \end{vmatrix}_{\vec{e_F}, \vec{e_y}} \begin{vmatrix} k\cos\alpha \\ k\sin\alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -k\cos\alpha_0 \\ -k\sin\alpha_0 \end{vmatrix}$$

$$= -y\,k(\sin\alpha + \sin\alpha_0)$$
$$= -\frac{2\pi}{\lambda} y (\sin\alpha + \sin\alpha_0)$$

2) A une constante de proportionnalité près, l'amplitude complexe diffractée est (en travaillant en $\exp j(\varphi - \omega t)$)

$$\underline{A}(\alpha) = \int_{y=0}^{y=b} e^{\left[-i\frac{2\pi y}{\lambda}(\sin\alpha + \sin\alpha_0)\right]} dy$$

$$= \frac{\exp\left[-i\frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\alpha+\sin\alpha_0)\right] - 1}{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha_0)}$$

$$\boxed{\underline{A}(\alpha) = \exp\left[-i\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\alpha+\sin\alpha_0)\right]\ b\ \mathrm{sinc}\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\alpha+\sin\alpha_0)\right]}$$

---

3)

$$I(\alpha) = \underline{A}(\alpha)\ \underline{A}^*(\alpha)$$

$$I(\alpha) = b^2\ \mathrm{sinc}^2\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\alpha+\sin\alpha_0)\right]$$

$$\boxed{\frac{I(\alpha)}{I_{MAX}} = \mathrm{sinc}^2\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\alpha+\sin\alpha_0)\right]}$$

Le maximum de la figure correspond au centre de la figure de diffraction.

Il est obtenu pour

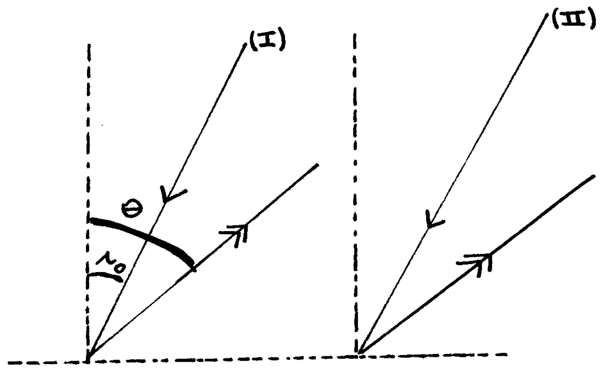
$$\sin\alpha + \sin\alpha_0 = 0$$

$$\boxed{\alpha = -\alpha_0}$$

Il s'agit de la direction prévisible obtenue par les lois de Snell-Descartes pour la réflexion spéculaire (réflexion par un miroir)

---

4)



En utilisant la même démarche que pour 1)

$$\boxed{\varphi_{II/I} = -\frac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta + \sin i_0)}$$

---

5) En posant $\phi = \frac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta + \sin i_o)$

la condition d'interférences constructives s'écrit

$$\phi = 2m\pi \qquad m \in \mathbb{Z}$$

soit $\sin\theta + \sin i_o = m\frac{\lambda}{a}$

$$\boxed{\sin\theta^{(m)} = m\frac{\lambda}{a} - \sin i_o}$$

---

6) → relations entre les angles :

$$\theta = \alpha + \gamma$$
$$i_o = \alpha_o + \gamma$$

→ relation pour le maximum de diffraction

$$\alpha = -\alpha_o$$

→ ordre 1 pour $\lambda = \lambda_o$, condition d'interférences constructives

$$\sin\theta = \frac{\lambda_o}{a} - \sin i_o$$

soit finalement :

$$\theta = \gamma - \alpha_o$$
$$\boxed{\theta = 2\gamma - i_o}$$

A.N. $\theta = 2 \times 30 - 45$

$$\boxed{\theta_o = 15\,°}$$

$$a = \frac{\lambda_o}{\sin\theta + \sin i_o}$$

$$\boxed{a = \frac{\lambda_o}{\sin(2\gamma - i_o) + \sin i_o}}$$

A.N. $a = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sin 15° + \sin 45°}$

$$\boxed{a = 2{,}07\,\mu m}$$

(cette valeur étant d'ailleurs fournie en fin de problème)

On a donc pour ce réseau utilisé à l'ordre 1 :

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} - \sin i_0$$

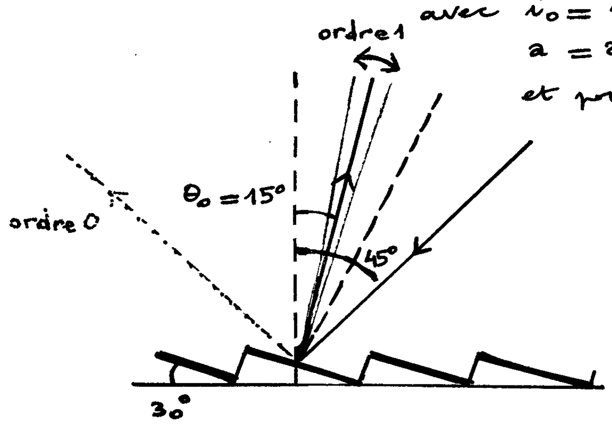
$$\boxed{\sin\theta = \frac{2\pi c/\omega}{a} - \sin i_0}$$

avec $i_0 = 45°$

$a = 2{,}07\,\mu m$

et pour $\lambda = \lambda_0 = 2\,\mu m$ $(\omega = \omega_0)$

$\theta = \theta_0 = 15°$



---

7) → La gaussienne est :

$$g(t) = \exp -\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$$

Le max est pour $t = 0$:

$$g_{MAX} = 1$$

La demi largeur Δt à $1/e$ du maximum est donnée par

$$g(\Delta t) = \frac{1}{e} = \exp -\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)^2$$

donc $\boxed{\Delta t_{(1/e)} = \tau}$

→ Représentation de :

$$\mathcal{R}e\left(E(t)\right) = E_0 \, e^{\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right]} \cos\omega_0 t$$

avec $\tau = 100 \; 10^{-15}\,s$

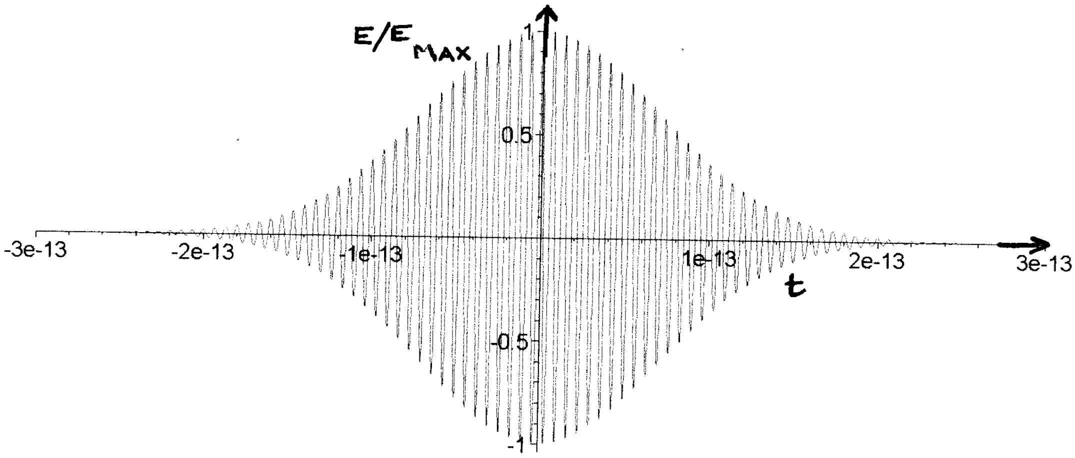
$\lambda_0 = 2\,\mu m$

donc : $\omega_0 = \dfrac{2\pi c}{\lambda_0} = \dfrac{2\pi \; 3 .\, 10^{8}}{2 .\, 10^{-6}}$

$$\boxed{\omega_0 = 9{,}42 \; 10^{14}\,rad\,s^{-1}}$$

ou $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$f_0 = 1,5 \ 10^{14}$ Hz



---

8) Transformée de Fourier de l'impulsion lumineuse :

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \ \exp(-i\omega t) \ dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 \ \exp -\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \ \exp -i(\omega-\omega_0)t \ dt$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -c_1 t^2 \ \exp -2i\, c_2 t \ dt$$

avec $c_1 = \frac{1}{\tau^2}$

$c_2 = \frac{\omega-\omega_0}{2}$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{c_1}} \ \exp(-c_2^2/c_1)$$

$$\boxed{\hat{E}(\omega) = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2}} \exp\left[-\left(\frac{(\omega-\omega_0)}{2/\tau}\right)^2\right]}$$

---

9) Le max est pour $\omega = \omega_0$:

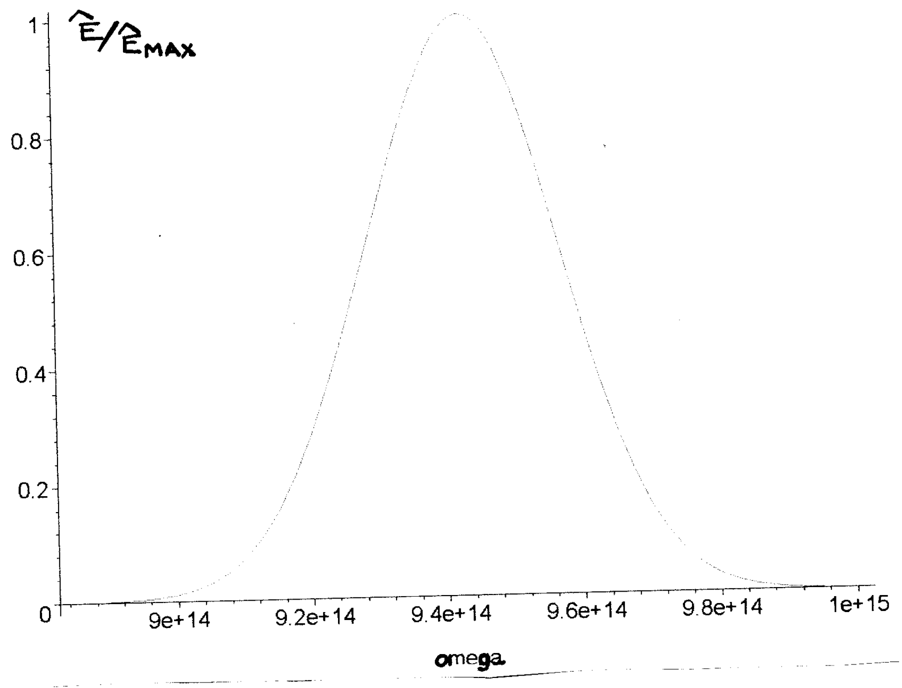
$$\hat{E}_{MAX} = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2}}$$

La demi largeur $\Delta\omega$ à $1/e$ du maximum est donnée par

$$\frac{\hat{E}(\Delta\omega)}{\hat{E}_{MAX}} = \frac{1}{e}$$

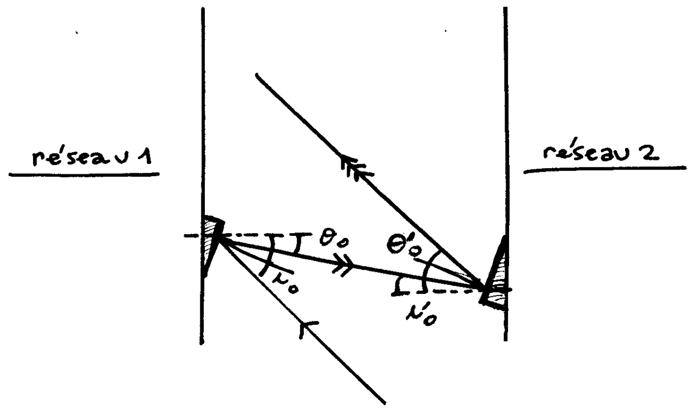
$$= \exp -\left(\frac{\Delta\omega}{2/\tau}\right)^2$$

donc $\boxed{\Delta\omega(1/e) = \frac{2}{\tau}}$



---

10) Pour ω_0, on aura la figure suivante :



(tous les angles sont considérés comme positifs sur la figure)

réseau (1) : $\sin i_0 + \sin \theta_0 = \dfrac{\lambda_0}{a}$

réseau (2) : $\sin i'_0 + \sin \theta'_0 = \dfrac{\lambda_0}{a}$

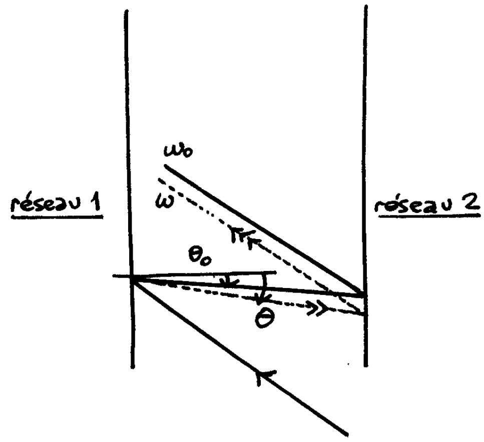
donc puisque $i'_0 = \theta_0$

on aura $\boxed{\theta'_0 = i_0}$

Le rayon diffracté par le deuxième réseau est parallèle au rayon incident.

---

11)



Pour $\omega \neq \omega_0$ (proche de ω_0 donc on reste aussi près du max de diffraction)

réseau (1) : $\sin i_0 + \sin\theta = \frac{\lambda}{a}$

réseau (2) : $\sin i' + \sin\theta' = \frac{\lambda}{a}$

avec $i' = \theta$

donc

$$\boxed{\theta' = i_0}$$

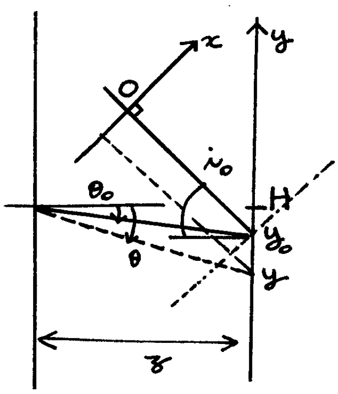
Le rayon diffracté par le deuxième réseau est à nouveau parallèle au rayon incident

---

12) les rayons sortants sont donc parallèles à la direction incidente pour ω (ω proche de ω_0)

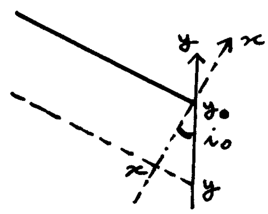
---

13)



On choisit un axe des y avec origine en H pour étudier préalablement l'étalement selon y.

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = -z \tan\theta_0 \\ y = -z \tan\theta \end{array}\right\} y - y_0 = -z(\tan\theta - \tan\theta_0)$$



Il reste à projeter sur x

$$x = (y - y_0)\cos i_0$$

$$\boxed{x_{(\theta)} = -z\,(\tan\theta_{(\omega)} - \tan\theta_0)\,\cos i_0}$$

---

14) Relation entre $\Delta\theta$ et $\Delta\omega$

on part de $\theta = \theta(\omega)$ et <u>on différencie</u> pour obtenir la relation au premier ordre entre $\Delta\theta$ et $\Delta\omega$

$$\sin\theta_{(\omega)} = \frac{2\pi c}{a}\,\frac{1}{\omega} - \sin i_0$$

$$\cos\theta\, d\theta = -\frac{2\pi c}{a}\,\frac{d\omega}{\omega^2}$$

donc
$$\cos\theta_0\,\Delta\theta \simeq -\frac{2\pi c}{a}\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}$$

$$\boxed{\Delta\theta = -\frac{2\pi c}{a\,\omega_0^2\cos\theta_0}\,\Delta\omega}$$

(le signe − traduit le fait que si ω augmente, θ diminue)

---

15) On note
$$\Delta x = x(\theta) - x(\theta_0)$$
$$= x(\theta)$$

<u>on différencie</u> $x(\theta)$

$$x(\theta) = -z\,(\tan\theta - \tan\theta_0)\cos i_0$$

$$dx = -z\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\,\cos i_0$$

donc $$\boxed{\Delta x = -z\,\frac{\cos i_0}{\cos^2\theta_0}\,\Delta\theta}$$

(si θ augmente, x diminue)

On reporte la relation précédente 14)

$$\Delta x = -z\,\frac{\cos i_0}{\cos^2\theta_0} \times -\frac{2\pi c}{a\,\omega_0^2\cos\theta_0}\,\Delta\omega$$

$$\boxed{x = \frac{2\pi c\, z}{a\,\omega_0^2}\,\frac{\cos i_0}{\cos^3\theta_0}\,\Delta\omega}$$

(si ω augmente, x augmente)

---

16) On a :

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{E}(\omega)\,\exp i\omega t\;d\omega$$

L'intensité est donc, en faisant la somme sur les différentes composantes monochromatiques :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)\;d\omega$$

avec (rappelé d'ailleurs par l'énoncé)

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\widehat{E}(\omega) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\widehat{E}^*(\omega)$$

$$\boxed{I(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\left|\widehat{E}(\omega)\right|^2}$$

Ici (voir 8) et 15))

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{E_0^2\tau^2}{2}\,\exp\left(-\frac{\Delta\omega^2\,\tau^2}{2}\right)$$

soit : $$\boxed{I(x) = \frac{E_0^2\tau^2}{4\pi}\,\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\,\frac{a^2\omega_0^4\cos^6\theta_0}{4\pi^2c^2z^2\cos^2 i_0}\,x^2\right)}$$

de la forme $$I(x) = I_{MAX}\,\exp\left(-\frac{x^2}{L^2}\right)$$

C'est donc à nouveau une gaussienne.

---

17) La "largeur" est donc :

$$\Delta x_{(1/e)} = L$$

$$= \frac{\sqrt{2}\ 2\pi c\ z\ \cos i_0}{\tau\ a \left(\frac{2\pi c}{\lambda_0}\right)^2 \cos^3\theta_0}$$

$$\boxed{\Delta x(1/e) = \frac{\sqrt{2}\ z\ \lambda_0^2\ \cos i_0}{\tau\ a\ 2\pi\ c\ \cos^3\theta_0}}$$

A.N.
$$= \frac{\sqrt{2}\ .\ 2\ .\ (2.10^{-6})^2 .\ \cos 45°}{100\ 10^{-15}\ .\ 2{,}07\ 10^{-6}\ .\ 2\pi\ .\ 3\ 10^{8}\ .\ \cos^3(15°)}$$

$$\boxed{\Delta x(1/e) = 2{,}3 \text{ cm}}$$