Jean-Marie DELORME Jean-Marie.Delorme@univ-orleans.fr
François-Xavier COQ Francois-Xavier.Coq@univ-orleans.fr
Lycée POTHIER ORLEANS

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

2000 CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES
EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP
PHYSIQUE 1

A- Caractère singulier de la gravitation

1. a) $F_{gravitation} = \dfrac{G\, m_1^* m_2^*}{r^2}$ et $F_{électrostatique} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, d'où : $\dfrac{F_{électrostatique}}{F_{gravitation}} = 2{,}5.10^{35} \gg 1$: à l'échelle atomique, les forces de gravitation sont négligeables par rapport aux forces électriques.

b) La variation d'énergie potentielle entre deux instants est : $dE_P = -\delta W = -\boldsymbol{F}_{2\to1}.d\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{F}_{1\to2}.d\boldsymbol{r}_2$,

donc $dE_P = -\boldsymbol{F}_{2\to1}.d\boldsymbol{r} = -\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dr}{r^2}$, ce qui donne $\boxed{E_{Pél} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ et $\boxed{E_{Pgrav} = -G\dfrac{m_1^* m_2^*}{r}}$.

2. a) *i*) Par analogie à l'électrostatique : **rot G = 0**, qui donne par intégration : $\oint \mathbf{G}.d\boldsymbol{r} = 0$

ii) et $\operatorname{div}\mathbf{G} = -4\pi G\rho^*$ où ρ^* est la masse volumique grave, d'où : $\oiint_S \mathbf{G}.d\boldsymbol{S} = -4\pi G\, M^*_{\mathrm{int}(S)}$.

b) L'axe *OM* est un axe de symétrie, donc : $\mathbf{G}(M) = G(M)\,\mathbf{e}_r$. De plus la distribution de masse est invariante par rotation autour de *O*, donc : $\mathbf{G}(M) = G_r(r)\,\mathbf{e}_r$.

En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de centre *O*, il vient :

$$G_r(r)\,4\pi r^2 = -4\pi G\int_0^r \mu^*(r')\,4\pi r'^2\,dr' \quad \text{si } r \le R.$$

Ici, nous supposons que la masse volumique μ^* est uniforme, ce que le texte laisse supposer, en lisant entre les lignes… "à symétrie sphérique" n'est pas suffisant et pour faire les tracés, il faut l'expression de μ^*.

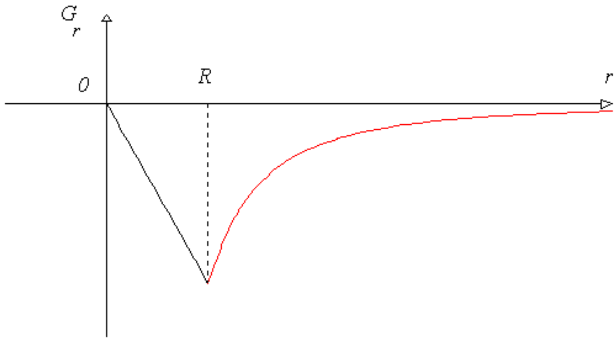
Alors : si $r \le R$: $G_r(r) = -G M^* \dfrac{r}{R^3}$ et si $r \ge R$: $G_r(r) = -G M^* \dfrac{1}{r^2}$.

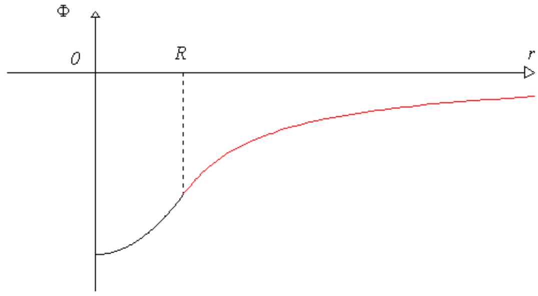
On trouve alors le potentiel gravitationnel $\phi(r)$ (*cette notation n'étant pas définie dans le texte, il faut deviner que c'est le potentiel gravitationnel, ce qui est logique pour un prof, mais pour un étudiant ?*)

si $r \ge R$: $\phi(r) = -G M^* \dfrac{1}{r}$, en prenant $\phi(r \to \infty) = 0$,

si $r \le R$: $\phi(r) = G M^* \dfrac{r^2}{2R^3}$ + cste, et la continuité de ϕ en $r = R$ donne : $\phi(r) = \dfrac{G M^*}{2R^3}\left(r^2 - 3R^2\right)$.

Les tracés sont les suivants :





2. c) Par analogie, l'énergie potentielle de gravitation vaut : $E_g = - \int_{esp} \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi G} G^2\, dV$, ce qui donne après calcul des deux intégrales (de 0 à R et de R à +) : $E_g = - \frac{3}{5}\frac{G\, M^*}{R}$.

3. a) R* est le référentiel lié au centre de masse C et en translation par rapport à R_g.

b) $m\, \boldsymbol{a}_{R*}(A) = \mathbf{F}_{oc} + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic} + m^*\, \mathbf{G}(A)$, avec : $\mathbf{F}_{ic} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{F}_{ie} = - m\, \boldsymbol{a}_e(A) = - m\, \boldsymbol{a}_{Rg}(C)$, donc :

$m\, \boldsymbol{a}_{R*}(A) = \mathbf{F}_{oc} - m\, \boldsymbol{a}_{Rg}(C) + m^*\, \mathbf{G}(A)$.

c) Pour la cabine : $M_C\, \boldsymbol{a}_{Rg}(C) = M_C^*\, \mathbf{G}(C)$, donc : $\boldsymbol{a}_{R*}(A) = \frac{1}{m}\mathbf{F}_{oc} - \frac{M_c^*}{M_c}\mathbf{G}(C) + \frac{m^*}{m}\mathbf{G}(A)$.

Le point ***B*** cherché est donc C.

d) Principe d'inertie : dans un référentiel Galiléen, le centre d'inertie d'un système isolé a un mouvement rectiligne uniforme.

Dans le cas où $\mathbf{F}_{oc} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a}_R(A) = \mathbf{0}$, on en déduit : $\frac{M_c^*}{M_c}\mathbf{G}(C) = \frac{m^*}{m}\mathbf{G}(A)$. De plus si $\mathbf{G}$ est uniforme, il vient : $\frac{M_c^*}{M_c} = \frac{m^*}{m}$. Donc pour tout système, **la masse grave et la masse inerte sont proportionnelles**, si on les exprime avec la même unité, elles sont égales. C'est le *principe d'équivalence* en relativité générale.

4. a) $\mathbf{F}_{S/L} = 4{,}40\ .10^{20}$ et $\mathbf{F}_{T/L} = 2{,}00\ .10^{20}$, donc ces deux forces sont du même ordre de grandeur, alors que la Lune tourne autour de la Terre et non du Soleil. Cependant, dans le référentiel R_g qui n'est pas galiléen, il faut tenir compte de la force d'inertie d'entraînement qui va compenser en grande partie la force exercée par le Soleil sur la Lune (voir question suivante) : dans R_g, la Lune est pratiquement isolée du Soleil.

b) Dans R_g, pour la lune : $\boldsymbol{a}_{Rg}(L) = \mathbf{G}_{T◖L} + \mathbf{G}_{S◖L} - \boldsymbol{a}_e(L)$. R_g étant en translation par rapport à R_C, $\boldsymbol{a}_e(L) = \boldsymbol{a}_{RC}(T) = \mathbf{G}_{L◖T} + \mathbf{G}_{S◖T}$. On voit donc que l'influence du soleil apparaît comme la différence entre l'attraction solaire sur la lune et l'attraction solaire sur la terre, $\mathbf{G}_{S◖L} - \mathbf{G}_{S◖T}$, qui un **terme différentiel** faible par rapport à l'attraction terrestre sur la lune.

5. a) $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{\tau} = g$ d'où **b)** $v(t) = g\,\tau\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ (car $v(0) = 0$) et un tracé immédiat.

Si $t << \tau$, il vient : $v(t) \approx g\,t$, en effet pour des durées faibles, la force de frottement reste négligeable.

c) $x(t) = g\,\tau\left(t - \tau + \tau\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ (car $x(0) = 0$) et si $t << \tau$, il vient : $x(t) \approx \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$, comme s'il n'y avait pas de frottement.

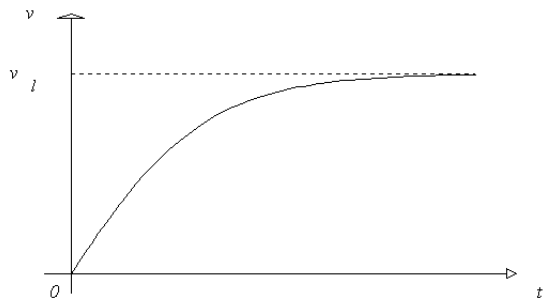
d) $\tau_1 = 5{,}4.10^4$ s et $\tau_2 = 4{,}5.10^3$ s. Si la force de frottement est faible, la durée de chute est $t'_{chute} = \sqrt{\dfrac{2\,h}{g}} = 0{,}64$ s. Avec les frottements la durée de chute étant plus grande, nous obtenons : $\tau_1 > \tau_2 >> t_{chute}$, donc la force de frottement est négligeable et la durée de chute est la même pour les deux billes.

6. a) $m\,\dfrac{dv}{dt} = m\,g - \beta\,v^2$. $\sqrt{\dfrac{m\,g}{\beta}}$ est donc homogène à une vitesse, et sera noté v_L (c'est la vitesse limite, c'est-à-dire lorsque $\dfrac{dv}{dt}$ tend vers zéro).

b) L'équation se met sous la forme : $\dfrac{dv}{v_L^2 - v^2} = \dfrac{\beta}{m}\,dt$. En posant $u = \tanh\left(\dfrac{g\,t}{v_L}\right)$, il vient après quelques calculs : $\dfrac{d\left(\dfrac{v}{v_L}\right)}{1 - \left(\dfrac{v}{v_L}\right)^2} = \dfrac{du}{1 - u^2}$, ce qui donne :

$\dfrac{v}{v_L} = \text{u} + \text{cste} = \tanh\left(\dfrac{g\,t}{v_L}\right) + \text{cste}$. De plus $v(0) = 0$, donc :

$v = v_L \tanh\left(\dfrac{g\,t}{v_L}\right)$. Si $t << \dfrac{v_L}{g}$, on obtient : $v(t) \approx g\,t$ qui est encore l'expression de la vitesse sans frottement. Le graphe a l'allure ci-contre :



c) En intégrant l'expression et en utilisant $x(0) = 0$, il vient : $x(t) = \dfrac{v_L^2}{g}\ln\left(\cosh\left(\dfrac{g\,t}{v_L}\right)\right)$

Si $t << \dfrac{v_L}{g}$, on pose $\varepsilon = \dfrac{g\,t}{v_L}$, alors : $x(t) = \dfrac{v_L^2}{g}\ln(\cosh(\varepsilon))$, on utilise : $\cosh(\varepsilon) \approx 1 + \dfrac{\varepsilon^2}{2} + \dfrac{\varepsilon^4}{24} + \ldots$ et

$\ln(1 + \alpha) \approx \alpha - \dfrac{\alpha^2}{2} + \dfrac{\alpha^3}{3} + \dfrac{\alpha^4}{4} \ldots$, donc : $x(t) \approx \dfrac{v_L^2}{g}\left(\dfrac{\varepsilon^2}{2} - \dfrac{\varepsilon^4}{12} + \ldots\right)$, ce qui donne :

$x(t) \approx \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 - \dfrac{1}{12}\,\dfrac{g^3\,t^4}{v_L^2} + \ldots$ le premier terme est bien celui de la chute libre, le deuxième est bien négatif, donc le frottement ralentit la chute.

Il aurait été bon pour cette question de donner le développement de cosh(ε).

d) $v_{L1} = 75{,}6$ m.s^{-1} et $v_{L2} = 21{,}8$ m.s^{-1}. Sans frottement, la durée de chute est $t'_{chute} = 0{,}64$ s, donc la vitesse au sol est $v(t'_{chute}) = g\, t'_{chute} = 6{,}3$ m.s^{-1}.

On a donc : $v(t'_{chute}) << v_{L1}$, donc la chute de la bille 1 peut être considérée sans frottement (écart d'environ 8 %). Mais $v(t'_{chute})$ n'est pas négligeable devant v_{L2}, donc pour la bille 2, il faut tenir compte des frottement.

e) Nous calculons $x_1 - x_2$ pour la durée de chute t'_{chute} de la bille 1 : $\Delta x \approx \dfrac{1}{12}\dfrac{g^3\, t'^{\,4}_{chute}}{v_{L2}^{\,2}} = 2{,}8$ cm.

Le calcul précis (avec MAPLE) de x_1 - x_2 donne 2,4 cm

Conclusion : 1) 2 cm, ça se voit : **un ancien ministre** très contesté **avait** donc **tort**…

2) Si on pense que 2 cm, ça ne se voit pas, alors **un ancien ministre** très contesté avait un peu raison, mais comme il ne savait pas le dire sans s'attirer les foudres du monde entier, il **avait** en grande partie **tort**.

B- Cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling

1. Machine ditherme

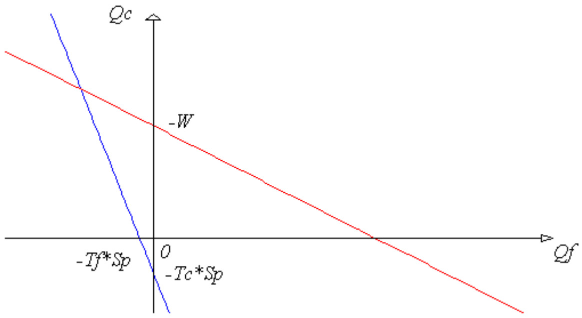
a) Pour un cycle du gaz : $0 = \Delta U = W + Q_f + Q_c$.

Le second principe à {gaz, SF, SC} donne : $0 - \dfrac{Q_f}{T_f} - \dfrac{Q_c}{T_c} = S^p + S^{éch}$ où $S^{éch} = 0$ car le système est isolé thermiquement. Donc : $\dfrac{Q_f}{T_f} + \dfrac{Q_c}{T_c} = - S^p$.

b) $S^p \geq 0$ et, pour un cycle moteur, $W < 0$, ce qui permet le tracé. Le point de fonctionnement, intersection des deux courbes, est donc dans la quadrant : $Q_c > 0$ et $Q_f < 0$ (le gaz reçoit effectivement de la source chaude et fournit effectivement à la source froide).

c) $\eta = \dfrac{-W}{Q_c} = 1 + \dfrac{Q_f}{Q_c}$, donc :

$\eta = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} - \dfrac{T_f\, S^p}{Q_c}$.



d) Pour le cycle de Carnot réversible : $S^p = 0$, donc : $\eta_c = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 0{,}80$.

$\eta_c < 1$ à cause d'une limitation fondamentale, il faut bien fournir de l'énergie à la source froide : un moteur ne peut pas fonctionner avec une seule source.

e) $\eta = r\, \eta_c = 0{,}752$ et $Q_c = \dfrac{-W}{\eta} = 19{,}9$ kJ/cycle. $Q_f = - Q_c - W = - 4{,}9$ kJ/cycle.

$S^p = - \dfrac{Q_f}{T_f} - \dfrac{Q_c}{T_c} = 3{,}2$ J.K^{-1}/cycle.

On peut alors tracer le graphe plus précisément, avec : $T_c\, S^p = 4{,}64$ kJ/cycle et $T_f\, S^p = 0{,}93$ kJ/cycle.

2. Entropie d'un gaz parfait

a) Pour un gaz : $C_v = \frac{1}{2}$ R N où N est le nombre de degrés de libertés d'une molécule, $C_p = C_v + \mathrm{R}$ et $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{N+1}{N}$.

Pour un gaz monoatomique, il y a 3 degrés de liberté de translation, pour un gaz diatomique, il y a en plus 2 degrés de liberté de rotation, d'où $\gamma_{\text{mono}} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ et $\gamma_{\text{di}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

b) $C_p\,\mathrm{d}T = \mathrm{d}H = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P$, avec $C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,n\,R$ et $V = n\,R\,\frac{T}{P}$, ce qui donne :

S(T,P) = n R (- ln$P$ + $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ ln$T$ + *Cste), soit :* $\alpha = n\,R$ *et* $\beta = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$.

$S(T,P) = S(T_0,P) + \int_{T_0}^{T} C_p(T)\,\mathrm{d}T$, ce qui permet d'accéder à $S(T,P)$ connaissant $S(T_0,P)$, il faut aussi tenir compte des changements d'états…

c) Pour le GP diatomique, on a bien $\beta = 3{,}5$. Au cours d'une transformation isentropique, S est une constante, donc : $\ln\left(\frac{T^\beta}{P}\right)$ = cste, d'où : $\frac{T^\beta}{P}$ = cste (loi de Laplace).

3. Cycle de Beau de Rochas et Otto

a) AB et CD sont deux isentropiques : la loi de Laplace $P\,V^{\gamma}$ = cste donne alors :

$P_B = P_A\,\alpha_v^{-\gamma} = 18{,}4$ bar, $P_D = P_C\,\alpha_v^{-\gamma} = 2{,}2$ bar, puis les volumes :

$V_D = V_A = \frac{m\,R\,T_A}{M\;P_A}\;2{,}41.10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = 2{,}41$ L ; $V_B = V_C = \frac{V_A}{\alpha_v} = 0{,}30$ L.

b) Le cycle est décrit dans le sens inverse trigonométrique car c'est un cycle moteur.

c) AB isentropique : $\Delta S_{AB} = 0$, $Q_{AB} = 0$, $W_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{m\,R}{M\,(\gamma - 1)}\,(T_B - T_A) = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1}$, soit :

$W_{AB} = 0{,}78$ kJ.

De même : $\Delta S_{CD} = 0$, $Q_{CD} = 0$, $W_{CD} = \Delta U_{CD} = \frac{P_D V_D - P_C V_C}{\gamma - 1}$, soit :

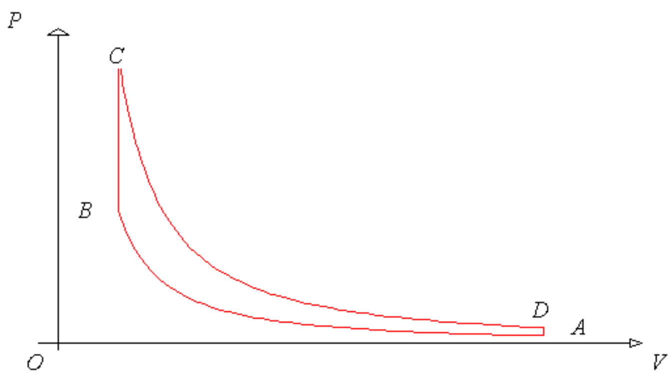
$W_{CD} = -\,1{,}67$ kJ.

BC isochore : $W_{BC} = 0$, $Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{P_C V_C - P_B V_B}{\gamma - 1}$, soit :

$Q_{BC} = 1{,}62$ kJ.

De même : $W_{DA} = 0$, $Q_{DA} = \Delta U_{DA} = \frac{P_A V_A - P_D V_D}{\gamma - 1}$, soit :

$Q_{DA} = -\,0{,}72$ kJ.



On trouve bien pour un cycle complet : $W + Q = 0$.

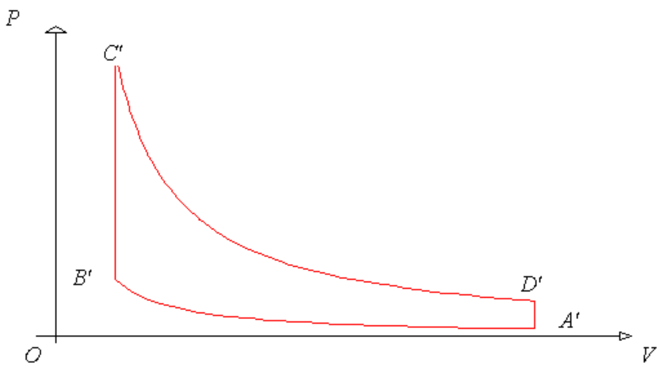
d) $\eta_{BO} = -\dfrac{W}{Q_{BC}} = 0{,}55 < \eta_c$, ce qui est normal.

4. Cycle de Stirling

a) *A'B'* isotherme, donc :
$P_{B'} = P_{A'}\ \alpha_v = 8{,}0$ bar.

De même : $P_{D'} = P_{C'}\ \alpha_v^{-1} = 5$ bar.

b) Le cycle de Stirling ressemble beaucoup au cycle de Beau de Rochas et d'Otto, mais $P_{B'} < P_B$ et $P_{D'} > P_D$, donc l'aire du cycle de Stirling est plus grande et le travail aussi (donc peut-être aussi le rendement).



c) $B'C$ isochore : $W_{B'C} = 0$, $Q_{B'C} = \Delta U_{B'C} = \dfrac{P_C V_C - P_{B'} V_{B'}}{\gamma - 1}$, soit : $Q_{B'C} = 2{,}41$ kJ.

De même : $W_{D'A} = 0$, $Q_{D'A} = \Delta U_{D'A} = \dfrac{P_A V_A - P_{D'} V_{D'}}{\gamma - 1}$, soit : $Q_{DA} = -\ 2{,}41$ kJ.

AB' est isotherme réversible, donc : $\Delta U_{AB'} = 0$, $-\ Q_{AB'} = W_{AB'} = \int_A^{B'} -P\,dV = -\dfrac{m}{M} R\, T_A \ln\left(\dfrac{V_{B'}}{V_A}\right)$, soit : $-\ Q_{AB'} = W_{AB'} = 0{,}5$ kJ.

De même : $\Delta U_{CD'} = 0$, $-\ Q_{CD'} = W_{CD'} = -\dfrac{m}{M} R\, T_C \ln\left(\dfrac{V_{D'}}{V_C}\right) = -\ 2{,}5$ kJ.

d) $\eta_S = -\dfrac{W}{Q_{C'D'}} = 0{,}80 = \eta_C > \eta_{BO}$.