R 9

Trajectoires de particules chargées

Dans ce chapitre, afin d'alléger les écritures, les composantes de la vitesse seront notées v_x, v_y et v_z et non $v_x\,(t)$, $v_y\,(t)$ et $v_z\,(t)$. Il en sera de même pour x, y et z à la place de $x\,(t)$, $y\,(t)$ et $z\,(t)$.

9.1 Force de Lorentz

9.1.1 Champ électrique, champ magnétique

9.1.1.1 Clamp électrique

— Champ électrique —

À chaque fois qu'on détecte une différence de potentiel entre deux points de l'espace, on introduit une grandeur vectorielle, appelé champ électrique, noté $\overrightarrow{E}$, d'unité Volt/mètre (symbole $V.m^{-1}$).

9.1.1.2 Champ magnétique

— Champ magnétique —

Un aimant ou un circuit parcouru par un courant peux avoir une action sur une boussole. On modélise cette action par un champ magnétique, noté $\overrightarrow{B}$, d'unité le tesla (symbole T).

9.1.2 Force de Lorentz

— Force de Lorentz —

Soit $M(m,q)$ une particule de masse m et de charge q observée dans le référentiel $\mathcal{R}$.
Si M est plongée dans la zone d'action d'un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ avec un vitesse $\overrightarrow{V_{(M)/\mathcal{R}}}$, elle subit la force de Lorentz :

$$\overrightarrow{F_\ell} = q\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V_{(M)/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{B})$$

— Remarque —

Au cours de l'étude du mouvement d'une particule élémentaire chargée, on néglige en général l'influence de son poids car sa valeur est petite devant les composantes de la force de Lorentz.

9.2 Particule dans un champ électrique

Une particule de charge électrique q et de masse m pénètre à l'instant $t = 0$ en O $(x = y = z = 0)$ avec une vitesse $\vec{v_0}$ dans une région où règnent un champ électrique uniforme $\vec{E}$ uniforme, dirigé suivant l'axe Oz d'un référentiel muni d'un repère $Oxyz$ orthonormé direct.

La vitesse $\vec{v_0}$ est contenue dans le plan yOz et fait un angle α avec le champ $\vec{E}$.

Cet angle α, angle entre Oz et $\vec{v}_0$, est compris entre 0 et π.

Déterminons les composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse $\vec{v}$ de la particule à l'instant quelconque t.

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = q\;\vec{E}$$

Avec $\vec{E}\,(0, 0, E)$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcll} m\,\dot{v}_x & = & 0 & (1) \\ m\,\dot{v}_y & = & 0 & (2) \\ m\,\dot{v}_z & = & q\,E & (3) \end{array}\right.$$

L'intégration de ces relations donne :

$$\left\{\begin{array}{lcll} v_x & = & 0 & (4) \\ v_y & = & v_0\,\sin\alpha & (5) \\ v_z & = & \dfrac{q\,E}{m}\,t + v_0\,\cos\alpha & (6) \end{array}\right.$$

Déterminons la trajectoire de la particule à l'instant quelconque t.

Grâce aux équations (4), (5) et (6), on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lcccl} x & = & \int v_x & = & x_1 \\ y & = & \int v_y & = & v_0\,t\,\sin\alpha + y_1 \\ z & = & \int v_z & = & \dfrac{q\,E}{2\,m}\,t^2 + v_0\,t\,\cos\alpha + z_1 \end{array}\right.$$

Les conditions initiales permettent d'exprimer x_1, y_1 et z_1 (**Attention, ces valeurs ne sont pas les valeurs de x, y et z à l'instant initial !**) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0 \\ y_1 & = & 0 \\ z_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

On a alors les expressions complètes :

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & 0 & (8) \\ y & = & v_0\,t\,\sin\alpha & (9) \\ z & = & \dfrac{q\,E}{2\,m}\,t^2 + v_0\,t\,\cos\alpha & (10) \end{array}\right.$$

On obtient l'équation de la trajectoire en éliminant le temps t :

$$z\,(y) = \frac{q\,E}{2\,m\,v_0^2\,\sin\alpha^2}\,y^2 + \frac{y}{\tan\,\alpha}$$

Cette trajectoire est donc une parabole.

En prenant $\dfrac{q\,E}{2\,m} = 0{,}40$, $v_0 = 2{,}0\,m.s^{-1}$ et α variant de 0 à $\dfrac{9\,\pi}{10}$ par pas de $\dfrac{\pi}{10}$, on peut tracer l'allure de la trajectoire.

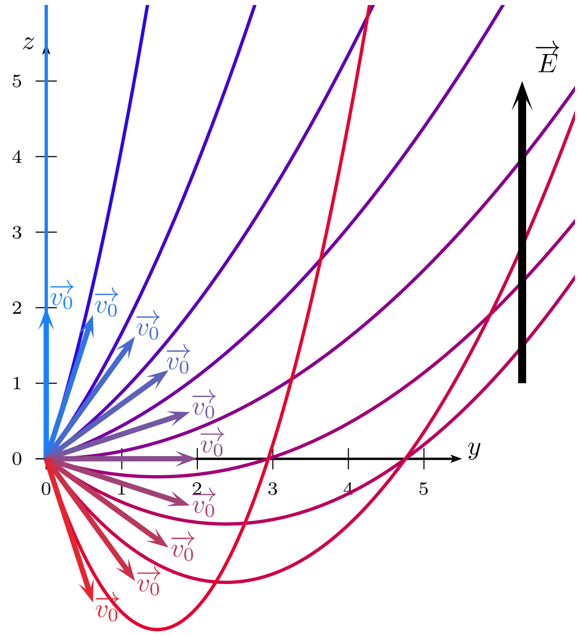

FIGURE 9.1 – Particule dans un champ électrique

9.2.1 Focalisation

Considérons un faisceau de particules chargées passant dans la zone d'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\ \overrightarrow{e_z}$ avec la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\ \cos\alpha\ \overrightarrow{e_z} + v_0\ \sin\alpha\ \overrightarrow{e_y}$. On a alors :

$$\begin{cases} \dot{z} = -\dfrac{e}{m}\, E\, t + v_0\ \cos\alpha \\ \dot{y} = v_0\ \sin\alpha \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} z = \dfrac{q}{m}\, E\, t^2 + v_0\ t\ \cos\alpha \\ y = v_0\ t\ \sin\alpha \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$z(y) = \frac{q\, E\ \sin^2\alpha}{m\, v_0^2}\, y^2 + \frac{y}{\tan(\alpha)}$$

La portée maximale est donnée par $z(y) = 0$ et $y \neq 0$, soit :

$$y_p = \frac{m\, v_0^2}{e\, E}\ \sin(2\,\alpha)$$

La portée est maximale pour $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Pour des angles proches de α, le faisceau focalise autour de y_p.

9.2.2 Canon à électrons

Pour émettre des électrons, on chauffe un filament et on impose aux électrons de passer par des petites ouvertures.
Les électrons sont arrachés au filament. Soit B le point d'entrée de la phase d'accélération, et A le point de sortie. On obtient :

$$dE_{c_{B\rightarrow A}} = \delta W(\overrightarrow{F_\ell}) = -dE_p = -q\, dV$$

On a alors :

$$\Delta E_{c_{B\to A}} = E_{c_A} - E_{c_B} = \frac{1}{2}\,m\,\left(v_A^2 - v_B^2\right) = q\,(V_B - V_A) = -e\,(V_B - V_A) = e\,U_{AB}$$

En négligeant la diffraction en A ($\lambda_{dB} = \dfrac{h}{p} \ll d$, avec d diamètre de l'ouverture) et en posant $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{0}$, on obtient :

$$v_B = \sqrt{\frac{2\,e\,U_{AB}}{m}}$$

9.3 Particule dans un champ magnétique

— Propriété —

Par application du théorème de l'énergie cinétique, on montre qu'un champ magnétique ne peut pas modifier la norme de la vitesse, mais il peut modifier la trajectoire de la particule.

Si $\overrightarrow{v_0}$ est quelconque, la trajectoire de $M\,(m,q)$, point matériel de masse m et de charge q, est hélicoïdale uniforme de vitesse constante en norme ($v = v_0 = C^{te}$).

— Cas particulier —

Si $\overrightarrow{v_0}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$, la trajectoire de $M\,(m,q)$, point matériel de masse m et de charge q, est un mouvement circulaire uniforme.

Une particule de charge électrique q et de masse m pénètre à l'instant $t = 0$ en O ($x = y = z = 0$) avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ dans une région où règnent un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$, dirigé suivant l'axe Oz d'un référentiel muni d'un repère $Oxyz$ orthonormé direct.
La vitesse $\overrightarrow{v_0}$ est contenue dans le plan yOz et fait un angle α avec le champ $\overrightarrow{B}$.
On introduit le paramètre $\omega = \dfrac{q\,B}{m}$.
Déterminons les composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de la particule à l'instant quelconque t.

$$m\,\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Avec $\overrightarrow{B}(0,0,B)$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\,\dot{v}_x & = & q\,B\,v_y \\ m\,\dot{v}_y & = & -q\,B\,v_x \\ m\,\dot{v}_z & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dot{v}_x & = & \omega\,v_y & (1) \\ \dot{v}_y & = & -\omega\,v_x & (2) \\ \dot{v}_z & = & 0 & (3) \end{array}\right.$$

— Remarque —

On pourrait tout de suite en déduire :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{v}_x(0) = \omega\,v_y(0) = \omega\,v_0\,\sin\alpha \\ \dot{v}_y(0) = -\omega\,v_x(0) = 0 \\ \dot{v}_z(0) = 0 \end{array}\right.$$

- **Par intégration des équations différentielles du mouvement :**
  Comme on cherche les composantes de la vitesse, il est ici plus judicieux de dériver que d'intégrer une des relations 1 ou 2.
  La dérivation de la relation 2 donne $\ddot{v}_y = -\omega\,\dot{v}_x$.
  La relation 1 permet alors d'écrire :

  $$\ddot{v}_y + \omega^2\,v_y = 0$$

  On en déduit $v_y = A_1\,\cos\omega\,t + B_1\sin\omega\,t$.
  À $t = 0$, $v_y(0) = v_0\sin\alpha$ (donné dans l'énoncé) et $\dot{v}_0(0) = 0$ (trouvé grâce à la relation 2 à l'instant initial).
  On en déduit donc $v_y = v_0\,\sin\alpha\,\cos\omega\,t$.
  D'où $v_x = v_0\,\sin\alpha\,\sin\omega\,t$.
  Quant à la relation 3, son intégration donne $v_z = v_0\,\cos\alpha$.
  On obtient donc finalement :

  $$\left\{\begin{array}{lcll} v_x &=& v_0\,\sin\alpha\,\sin\omega\,t & (4)\\ v_y &=& v_0\,\sin\alpha\,\cos\omega\,t & (5)\\ v_z &=& v_0\,\cos\alpha & (6)\end{array}\right.$$

- **Par la méthode complexe :**
  On pose :

  $$\underline{Z} = v_x + j\,v_y$$

  Les équations 1 et 2 permettent d'écrire :

  $$\frac{d\underline{Z}}{dt} = \dot{v}_x + j\,\dot{v}_y = \omega\,v_y - j\,\omega\,v_x = -j\,\omega\,\underline{Z}$$

  On obtient alors l'équation différentielle suivante :

  $$\frac{d\underline{Z}}{dt} = -j\,\omega\,\underline{Z}$$

  qui donne par intégration $\underline{Z} = \underline{Z_0}\,e^{-j\,\omega\,t}$.
  Les conditions initiales donnent à $t = 0$:
  $\underline{Z}(0) = v_x(0) + j\,v_y(0) = j\,v_0\,\sin\alpha = \underline{Z_0}\,e^0 = \underline{Z_0}$.
  On en déduit :

  $$\underline{Z} = j\,v_0\,\sin\alpha\,(\cos\omega\,t - j\,\sin\omega\,t)$$

  Par identification avec $\underline{Z} = v_x + j\,v_y$, on trouve :

  $$\left\{\begin{array}{lcll} v_x &=& v_0\,\sin\alpha\,\sin\omega\,t & (4)\\ v_y &=& v_0\,\sin\alpha\,\cos\omega\,t & (5)\end{array}\right.$$

  Comme précédemment, l'intégration de la relation 3 donne :

  $$v_z = v_0\,\cos\alpha \quad (6)$$

Déterminons les équations paramétriques du mouvement.

Grâce aux équations 4, 5 et 6, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x &=& \int v_x &=& -\dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\,\cos\omega\,t + x_1\\[2ex] y &=& \int v_y &=& \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\,\sin\omega\,t + y_1\\[2ex] z &=& \int v_z &=& v_0\,t\,\cos\alpha + z_1\end{array}\right.$$

Les conditions initiales permettent d'exprimer x_1, y_1 et z_1 (**Attention, ces valeurs ne sont pas les valeurs de x, y et z à l'instant initial !**) :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega} \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= 0 \end{cases}$$

On a alors les expressions complètes :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\,(1-\cos\omega\,t) & (7) \\[2ex] y &= \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\,\sin\omega\,t & (8) \\[2ex] z &= v_0\,t\,\cos\alpha & (9) \end{cases}$$

Définissons sa trajectoire.
Le mouvement est :

- uniforme suivant l'axe Oz.
- circulaire de rayon $\dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}$ et tangent à l'axe Oy, en projection sur le plan Oxy.

La trajectoire est donc une hélice tangente à l'axe O, d'axe parallèle à Oz,

de rayon $R = \sqrt{\left(x - \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\right)^2 + y^2} = \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}$

et de pas constant tel que $\dfrac{h}{z} = \dfrac{T}{t}$:

$$h = 2\,\pi\,\frac{v_0\,\cos\alpha}{\omega}$$

En prenant $\omega = 10\,rad.s^{-1}$, $B = 1{,}0\,T$, $v_0 = 10\,m.s^{-1}$ et $\alpha = 80^o$, on peut tracer l'allure de la trajectoire.

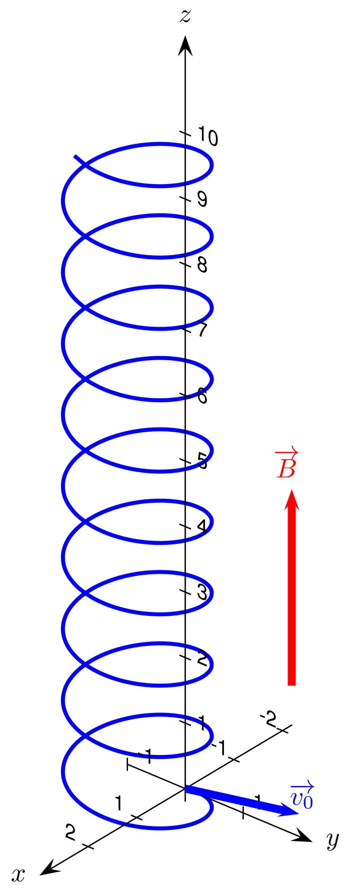

FIGURE 9.2 – Particule dans un champ magnétique

— Cas particulier —

Dans le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique :
Cela revient à prendre α égal à $\frac{\pi}{2}$.
Dans ce cas, on a toujours :

$$m\,\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Avec $\overrightarrow{B}(0, 0, B)$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\,\dot{v}_x & = & q\,B\,v_y \\ m\,\dot{v}_y & = & -q\,B\,v_x \\ m\,\dot{v}_z & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dot{v}_x & = & \omega\,v_y & (1) \\ \dot{v}_y & = & -\omega\,v_x & (2) \\ \dot{v}_z & = & 0 & (3) \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcll} v_x & = & v_0\,\sin\omega\,t & (4) \\ v_y & = & v_0\,\cos\omega\,t & (5) \\ v_z & = & 0 & (6) \end{array}\right.$$

Par intégration, on trouve alors :

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & \dfrac{v_0}{\omega}\,(1-\cos\omega\,t) & (7) \\ y & = & \dfrac{v_0}{\omega}\,\sin\omega\,t & (8) \\ z & = & 0 & (9) \end{array}\right.$$

La trajectoire est bien sûr un cercle tangent à l'axe O, d'axe parallèle à Oz,
de rayon $R = \sqrt{\left(x - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y^2} = \frac{v_0}{\omega}$.
En prenant $\omega = 10\,rad.s^{-1}$, $B = 1{,}0\,T$ et $v_0 = 10\,m.s^{-1}$, on peut tracer l'allure de la trajectoire.

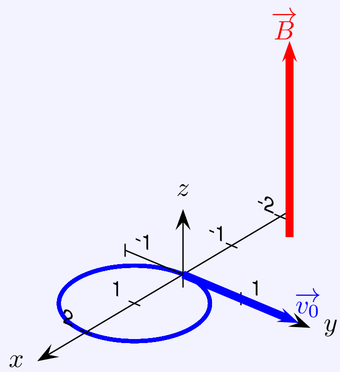

FIGURE 9.3 – Particule dans un champ magnétique : vitesse et champ perpendiculaires

9.4 Particule dans un champ magnétique avec frottement fluide

Considérons un frottement fluide de type $\overrightarrow{f} = -k\,\overrightarrow{v}$ et supposons que la vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ soit colinéaire et de même sens que l'axe Ox.
En posant $\omega = \dfrac{q\,B}{m}$ et $\tau = \dfrac{m}{k}$, les nouvelles équations s'écrivent :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcll} \ddot{x} & = & +\omega\,\dot{y} - \dfrac{\dot{x}}{\tau} & (1) \\ \ddot{y} & = & -\omega\,\dot{x} - \dfrac{\dot{y}}{\tau} & (2) \\ \ddot{z} & = & -\dfrac{\dot{z}}{\tau} & (3) \end{array}\right.}$$

La dernière équation donne $z = 0$.
Pour le reste, cette fois, la méthode complexe s'impose si on veut être efficace. On pose alors $\underline{Z} = x = j\,y$.
En effectuant la somme (1) $+ j$ (2), on obtient :

$$\ddot{x} + j\,\ddot{y} = -\frac{1}{\tau}\,(\dot{x} + j\,\dot{y}) - j\,\omega\,(\dot{x} + j\,\dot{y})$$

Soit :

$$\ddot{\underline{Z}} + \left(\frac{1}{\tau} + j\,\omega\right)\dot{\underline{Z}} = 0$$

En intégrant, on obtient :

$$\dot{\underline{Z}} + \left(\frac{1}{\tau} + j\,\omega\right)\underline{Z} = \dot{\underline{Z}}(0) + \left(\frac{1}{\tau} + j\,\omega\right)\,\underline{Z}(0) = v_0$$

C'est une équation différentielle du premier ordre en $\underline{Z}$ de solution :

$$\underline{Z} = \underline{\lambda}\,e^{-t/\underline{\tau}'} + \underline{Z_p}$$

avec

$$\frac{1}{\underline{\tau}'} = \frac{1}{\tau} + j\,\omega$$

et

$$\underline{Z_p} = \frac{v_0}{\dfrac{1}{\tau} + j\,\omega} = \frac{v_0\,\left(\dfrac{1}{\tau} - j\,\omega\right)}{\dfrac{1}{\tau^2} + \omega^2}$$

De plus, à l'instant initial, $\underline{Z}(0) = 0$ donne $\underline{\lambda} = -\underline{Z_p}$. On obtient dans ce cas :

$$\underline{Z} = \underline{Z_p}\left(1 - e^{-t/\underline{\tau}'}\right) = \frac{v_0\,\tau\,(1 - j\,\omega\,\tau)}{1 + \omega^2\,\tau^2}\left(1 - e^{-t/\tau}\,e^{-j\,\omega\,t}\right)$$

Utilisons la formule : $e^{j\,u} = \cos u + j\,\sin u$:

$$\underline{Z} = \frac{v_0\,\tau}{1 + \omega^2\,\tau^2}\,(1 - j\,\omega\,\tau)\,\left[1 - e^{-t/\tau}\,(\cos\omega\,t - j\,\sin\omega\,t)\right]$$

En utilisant $\underline{Z} = x + j\,y$, on peut identifier les parties réelle et imaginaire et on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{v_0\,\tau}{1 + \omega^2\,\tau^2}\,\left[1 - e^{-t/\tau}\,(\cos\omega\,t - \omega\,\tau\,\sin\omega\,t)\right] \\ y(t) & = & \dfrac{v_0\,\tau}{1 + \omega^2\,\tau^2}\,\left[-\omega\,\tau + e^{-t/\tau}\,(\omega\,\tau\,\cos\omega\,t + \sin\omega\,t)\right] \end{array}\right.$$

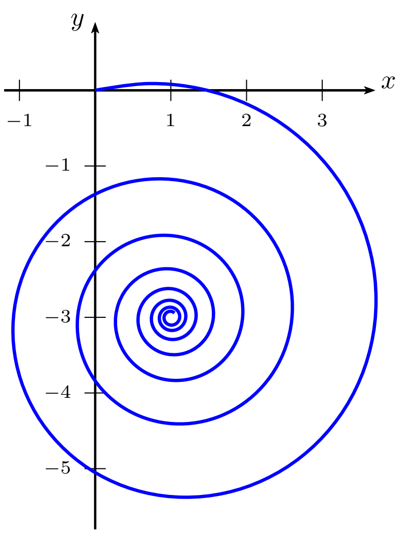

FIGURE 9.4 – Particule dans un champ magnétique avec frottement

Coordonnées du point asymptotique.
Lorsque le temps t tend vers l'infini, on a :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) & \longrightarrow & X_\infty = \dfrac{v_0\,\tau}{1+\omega^2\,\tau^2} \\ y(t) & \longrightarrow & Y_\infty = -\dfrac{\omega\,v_0\,\tau^2}{1+\omega^2\,\tau^2} \end{cases}}$$

Où X_∞ et Y_∞ sont les coordonnées du point asymptotique P.
Calculons la longueur de la trajectoire.

- Pour cela, il n'est pas nécessaire d'utiliser les équations différentielles précédentes.
  En effet, le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

  $$\frac{dE_c}{dt} = m\,v\frac{dv}{dt} = \mathcal{P}(\overrightarrow{f}) = -k\,v^2$$

  On en déduit :

  $$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

  Avec une vitesse initiale de norme v_0, on exprime la norme de la vitesse :

  $$v(t) = v_0\,e^{-t/\tau}$$

- La vitesse est liée à l'abscisse curviligne s par :

  $$v = \frac{ds}{dt}$$

  La longueur L de la trajectoire est alors donnée par :

  $$\begin{aligned} L &= \int ds \\ &= \int_0^\infty v(t)\,dt \\ &= v_0\,\int_0^\infty s^{-t/\tau}\,dt \\ &= -v_0\,\tau\,\left[e^{-t\tau}\right]_0^\infty \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\boxed{L = v_0\,\tau}$$

9.5 Particule dans des champs électrique et magnétique parallèles

Une particule de charge électrique q et de masse m pénètre à l'instant $t=0$ en O $(x=y=z=0)$ avec une vitesse $\overrightarrow{v}_0$ dans une région où règnent un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ parallèles, dirigés suivant l'axe Oz d'un référentiel muni d'un repère $Oxyz$ orthonormé direct.
La vitesse $\overrightarrow{v}_0$ est contenue dans le plan yOz et fait un angle α avec les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.
On introduira le paramètre $\omega = \dfrac{q\,B}{m}$.
Pour alléger les écritures, les composantes de la vitesse seront notées v_x, v_y et v_z et non $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v_z(t)$.
il en sera de même pour x, y et z à la place de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
Déterminons les composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de la particule à l'instant quelconque t.

$$m\,\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = q\,(\,\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B})$$

Avec $\overrightarrow{E}(0,0,E)$ et $\overrightarrow{B}(0,0,B)$, on obtient :

$$\begin{cases} m\,\dot{v}_x &=& q\,B\,v_y \\ m\,\dot{v}_y &=& -q\,B\,v_x \\ m\,\dot{v}_z &=& q\,E \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{v}_x & = & \omega\, v_y \quad (1) \\ \dot{v}_y & = & -\omega\, v_x \quad (2) \\ \dot{v}_z & = & \omega\, \dfrac{E}{B} \quad (3) \end{array}\right.$$

— Remarque —

On pourrait tout de suite en déduire :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{v}_x(0) = \omega\, v_y(0) = \omega\, v_0\, \sin\alpha \\ \dot{v}_y(0) = -\omega\, v_x(0) = 0 \\ \dot{v}_z(0) = \omega\, \dfrac{E}{B} \end{array}\right.$$

- **Par intégration des équations différentielles du mouvement :**
  Comme on cherche les composantes de la vitesse, il est ici plus judicieux de dériver que d'intégrer une des relations (1) ou (2).
  La dérivation de la relation (2) donne $\ddot{v}_y = -\omega\, \dot{v}_x$.
  La relation (1) permet alors d'écrire :

  $$\ddot{v}_y + \omega^2\, v_y = 0$$

  On en déduit $v_y = A_1\, \cos\omega\, t + B_1\, \sin\omega\, t$.
  À $t = 0$, $v_y\,(0) = v_0 \sin\alpha$ (donné dans l'énoncé) et $\dot{v}_0\,(0) = 0$ (trouvé grâce à la relation (2) à l'instant initial).
  On en déduit donc $v_y = v_0\, \sin\alpha\, \cos\omega\, t$.
  D'où $v_x = v_0\, \sin\alpha\, \sin\omega\, t$.
  Quant à la relation (3), son intégration donne $v_z = \omega\, \dfrac{E}{B}\, t + v_0\, \cos\alpha$.
  On obtient donc finalement :

  $$\left\{\begin{array}{lll} v_x & = & v_0\, \sin\alpha\, \sin\omega\, t \quad (4) \\ v_y & = & v_0\, \sin\alpha\, \cos\omega\, t \quad (5) \\ v_z & = & \omega\, \dfrac{E}{B}\, t + v_0\, \cos\alpha \quad (6) \end{array}\right.$$

- **Par la méthode complexe :**
  On pose :

  $$\underline{Z} = v_x + j\, v_y$$

  Les équations (1) et (2) permettent d'écrire :

  $$\frac{d\underline{Z}}{dt} = \dot{v}_x + j\, \dot{v}_y = \omega\, v_y - j\, \omega v_x = -j\, \omega\, \underline{Z}$$

  On obtient alors l'équation différentielle suivante :

  $$\frac{d\underline{Z}}{dt} = -j\, \omega\, \underline{Z}$$

  qui donne par intégration $\underline{Z} = \underline{Z_0}\, e^{-j\,\omega\, t}$.
  Les conditions initiales donnent à $t = 0$:

  $$\underline{Z}\,(0) = v_x\,(0) + j\, v_y\,(0) = j\, v_0\, \sin\alpha = \underline{Z_0}\, e^0 = \underline{Z_0}$$

  On en déduit :

  $$\underline{Z} = j\, v_0\, \sin\alpha\, (\cos\omega\, t - j\, \sin\omega\, t)$$

Par identification avec $\underline{Z} = v_x + j\,v_y$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_x & = & v_0\,\sin\alpha\,\sin\omega\,t \qquad 4 \\ v_y & = & v_0\,\sin\alpha\,\cos\omega\,t \qquad 5 \end{array}\right.$$

Comme précédemment, l'intégration de la relation (3) donne :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_z & = & \omega\,\dfrac{E}{B}\,t + v_0\,\cos\alpha \qquad 6 \end{array}\right.$$

Déterminons les équations paramétriques du mouvement.
Grâce aux équations 4, 5 et 6, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x & = & \int v_x & = & -\dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\,\cos\omega\,t + x_1 \\ y & = & \int v_y & = & \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\,\sin\omega\,t + y_1 \\ z & = & \int v_z & = & \omega\dfrac{E}{2\,B}\,t^2 + v_0\,t\,\cos\alpha + z_1 \end{array}\right.$$

Les conditions initiales permettent d'exprimer x_1, y_1 et z_1 (**Attention, ces valeurs ne sont pas les valeurs de x, y et z à l'instant initial !**) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega} \\ y_1 & = & 0 \\ z_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

On a alors les expressions complètes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\,(1-\cos\omega\,t) \qquad 7 \\ y & = & \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\,\sin\omega\,t \qquad 8 \\ z & = & \omega\,\dfrac{E}{2\,B}\,t^2 + v_0\,t\,\cos\alpha \qquad 9 \end{array}\right.$$

Définissons sa trajectoire.
Le mouvement est :

- uniformément accéléré suivant l'axe Oz.
- circulaire de rayon $\dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}$ et tangent à l'axe Oy, en projection sur le plan Oxy.

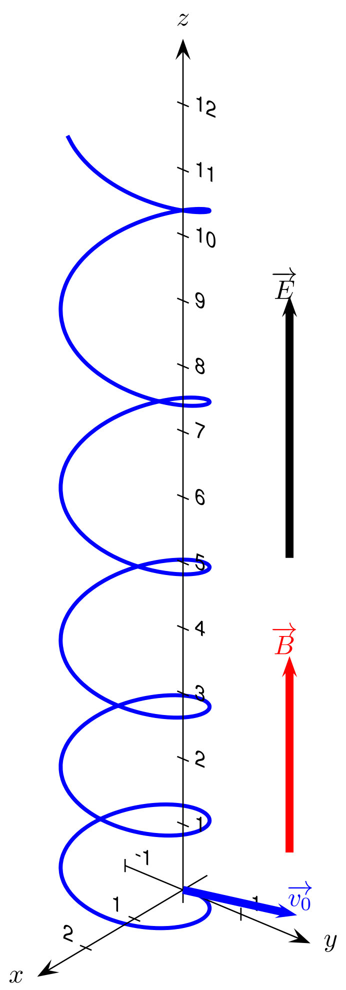

FIGURE 9.5 – Particule dans des champs électrique et magnétique parallèles

La trajectoire est donc une courbe enroulée sur le cylindre de rayon
$R = \sqrt{\left(x - \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}\right)^2 + y^2} = \dfrac{v_0\,\sin\alpha}{\omega}$ et d'axe parallèle à l'axe Oz (donc à $\vec{E}$ et $\vec{B}$) : c'est une sorte d'hélice avec un pas croissant.
En prenant $\omega = 10\,rad.s^{-1}$, $E = 0{,}10\,V.m^{-1}$, $B = 1{,}0\,T$, $v_0 = 10\,m.s^{-1}$ et $\alpha = 80^o$, on peut tracer l'allure de la trajectoire.

9.6 Particule dans des champs électrique et magnétique perpendiculaires

Une particule de charge électrique q et de masse m pénètre à l'instant $t = 0$ en O ($x = y = z = 0$) avec une vitesse $\vec{v_0}$ nulle dans une région où règnent un champ électrique uniforme $\vec{E}$ et un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ perpendiculaires, $\overrightarrow{E}$ étant dirigé suivant l'axe Oy et $\overrightarrow{B}$ suivant l'axe Oz d'un référentiel muni d'un repère $Oxyz$ orthonormé direct.

On introduit le paramètre $\omega = \dfrac{q\,B}{m}$.

Déterminons l'équation de la trajectoire de la particule à l'instant quelconque t.

$$m\,\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = q\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

Avec $\overrightarrow{E}(0, E, 0)$ et $\overrightarrow{B}(0, 0, B)$, on obtient :

$$\begin{cases} m\,\dot{v}_x &= q\,B\,v_y \\ m\,\dot{v}_y &= q\,E - q\,B\,v_x \\ m\,\dot{v}_z &= 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{v}_x &= \omega\,v_y & \textcircled{1} \\ \dot{v}_y &= \omega\,\dfrac{E}{B} - \omega\,v_x & \textcircled{2} \\ \dot{v}_z &= 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Comme on cherche l'équation de la trajectoire sans chercher à déterminer les composantes de la vitesse, il est ici plus judicieux d'intégrer que de dériver une des relations 1 ou 2.

L'intégration de la relation 2 donne $\dot{y} = \omega\,\dfrac{E}{B}\,t - \omega\,x + k_1$.

Les conditions initiales permettent d'en déduire $k_1 = 0$.

La relation (1) permet alors d'écrire :

$$\ddot{x} + \omega^2\,x = \omega^2\,\frac{E}{B}$$

On en déduit $x = A_1\,\cos\omega\,t + B_1\,\sin\omega\,t + \dfrac{E}{B}\,t$.

À $t = 0$, $x\,(0) = 0$ et $\dot{x}\,(0) = 0$, ce qui donne :

$$x = \frac{E}{B\,\omega}\,(\omega\,t - \sin\omega\,t)$$

Avec la relation 2, on a :

$$\dot{y} = -\omega\,x + \omega\,\frac{E}{B}\,t = \frac{E}{B}\,\sin\omega\,t$$

qui donne par intégration :

$$y = -\frac{E}{B\,\omega}\,\cos\omega\,t + k_2$$

À $t = 0$, $y\,(0) = 0$ donne $k_2 = -\dfrac{E}{B\,\omega}$ et :

$$y = \frac{E}{B\,\omega}\,(1 - \cos\omega\,t)$$

Quant à la relation 3, son intégration donne $v_z = 0$ puis $z = 0$.

— Remarque —

On aurait pu aussi utiliser la méthode complexe, mais les calculs sont assez simples ici.

On a donc finalement :

$$\begin{cases} x = \dfrac{E}{B\,\omega}\,(\omega\,t - \sin\omega\,t) \\ \\ y = \dfrac{E}{B\,\omega}\,(1 - \cos\omega\,t) \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

Définissons sa trajectoire.

La trajectoire est une cycloïde. La distance minimale entre 2 points de la trajectoire dont l'ordonnée est nulle est égale à Δx :

$\Delta x = 2\,\pi\,\rho$ avec $\rho = \dfrac{E}{B\,\omega}$.

On a donc $\Delta x = \dfrac{2\,\pi\,E}{B\,\omega}$.

La période de la cycloïde peut être définie par $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega} = \dfrac{E}{B}\,\Delta x$.

En prenant $\omega = 1{,}0\,rad.s^{-1}$, $E = 0{,}10\,V.m^{-1}$ et $B = 0{,}20\,T$, on peut tracer l'allure de la trajectoire.

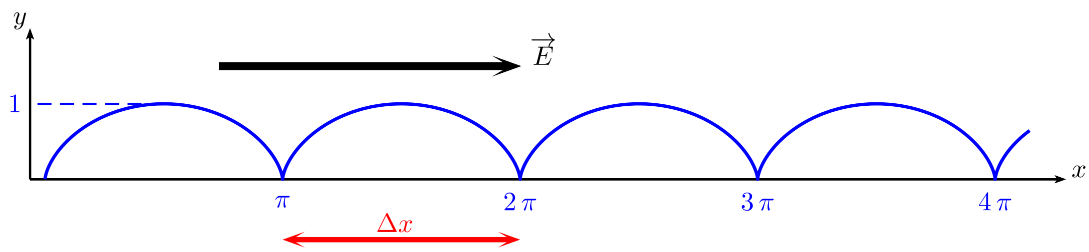

FIGURE 9.6 – Particule dans des champs électrique et magnétique perpendiculaires