Partie V : Électromagnétisme
Chapitres 3 et 4

DM 18 – Supraconducteurs dans un champ magnétique

1 – Introduction

On considère un matériau conducteur. Les porteurs de charge sont des électrons : on note $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg leur masse, $-e$ leur charge avec $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C, et n leur nombre par unité de volume.

On prendra $n = 1.0 \times 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3}$, ce qui est l'ordre de grandeur du nombre de d'électrons par unité de volume dans un métal.

On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$.

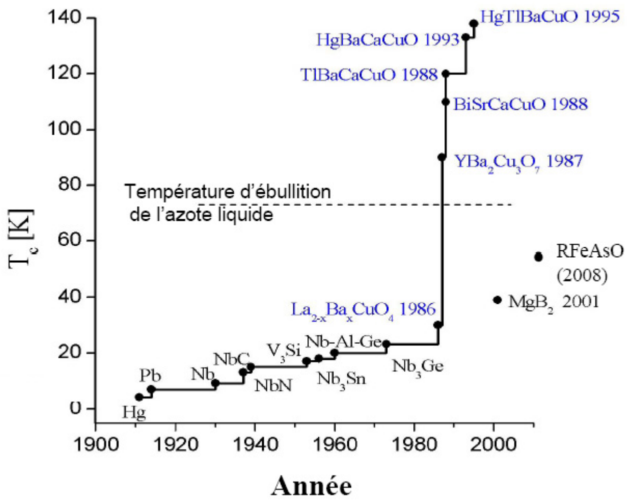
Dans le cas habituel, les métaux conducteurs vérifient la loi d'Ohm, qui relie la densité volumique de courant et le champ électrique appliqué en faisant intervenir la conductivité électrique σ.

1 - **a -** Rappeler l'expression de cette loi d'Ohm (sous forme locale).

b - Donner également l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le matériau en fonction de σ et du champ $\vec{E}$ imposé.

En 1911, l'équipe de K. Onnes aux Pays-Bas parvient pour la première fois à liquéfier de l'hélium, ce qui leur permet de produire un environnement à très basse température (jusqu'à 1.5 K). Ils mènent alors une étude systématique des propriétés de la matière à basse température, et se rendent compte que certains métaux ont une résistance électrique qui devient subitement nulle en dessous d'une certaine température.

On dit alors que le matériau a effectué une transition de phase pour devenir un supraconducteur. Par exemple le mercure devient supraconducteur en dessous de 4.2 K, le plomb en dessous de 7 K, etc.



Température critique de différents supraconducteurs (en dessous de laquelle le matériau passe dans l'état supraconducteur) en fonction de leur année de découverte. (source : cours du Collège de France, A. Georges)

La conductivité est alors théoriquement infinie, et la loi d'Ohm précédente n'est plus utile pour décrire le matériau. Au lieu de cela, on utilise les deux relations de London, trouvées empiriquement en 1935, qui sont :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{j} = -\frac{ne^2}{m}\vec{B}.} \tag{1}$$

Les deux parties suivantes explorent deux aspects des supraconducteurs : la conductivité infinie, et l'effet Meissner. La dernière partie justifie les équations de London.

2 – Puissance dissipée dans le matériau en régime stationnaire

2 - On se place en régime stationnaire. Que deviennent les équations de London ? Montrer alors que dans l'état supraconducteur, il n'y a pas de puissance transmise par les champs vers les charges, et que donc le conducteur devient parfait et sans pertes.

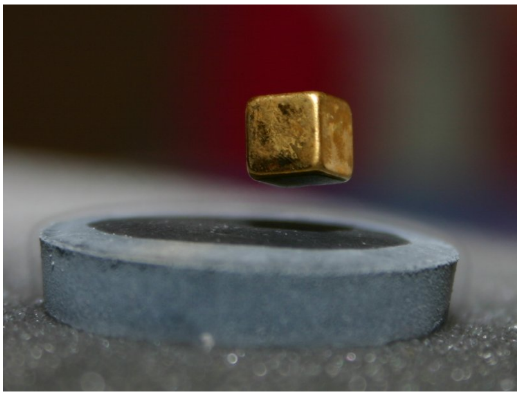
Câbles électriques utilisés par le CERN, de type normal en haut et de type supraconducteur en bas, prévus pour transporter le même courant de 12 500 A. (source : Wikipedia)

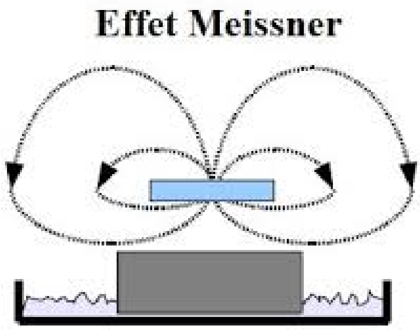
Cet effet a des applications pratiques importantes, puisque des câbles supraconducteurs permettent de transporter des courants très importants sans pertes Joule et sans échauffement. Ceci est utilisé dans des appareils scientifiques comme au CERN, ou dans les machines IRM (pour les bobines qui produisent le champ magnétique), ou encore dans les bobines des trains à sustentation magnétique comme le Maglev japonais.

Les supraconducteurs sont aujourd'hui un domaine de recherche très actif. En particulier, il n'y a toujours pas de compréhension théorique de la supraconductivité à température élevé des supra de type II, ce qui implique que la recherche expérimentale vers des températures critiques les plus élevées possibles se fait par tâtonnements.

3 – Étude de l'effet Meissner

En 1933, W. Meissner et ses collaborateurs découvrent qu'un supraconducteur placé dans un champ magnétique expulse les lignes de champ magnétique de son intérieur. L'accumulation des lignes de champ magnétique sous le supraconducteur et l'apparition de courants de surface font alors que le supraconducteur lévite au dessus du champ. Il s'agit de l'effet Meissner.



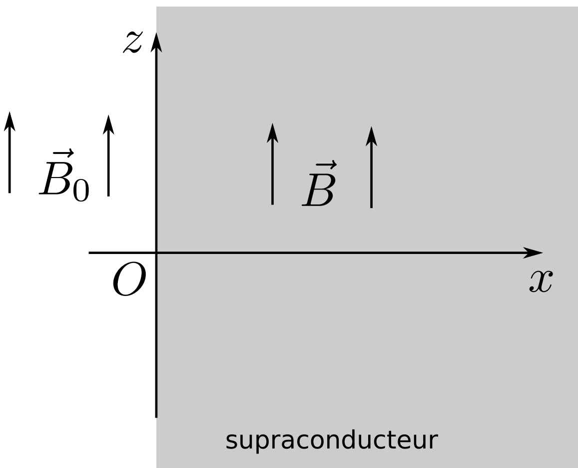


Un aimant lévite au dessus d'un supraconducteur refroidi à l'azote liquide. Le supraconducteur interdit aux lignes de champ de le pénétrer et oblige l'aimant à léviter au dessus.

On se propose ici de décrire l'expulsion du champ magnétique hors de l'intérieur du supraconducteur.

On se place en régime stationnaire. On considère un supraconducteur placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$.

On suppose pour simplifier que le supraconducteur est infini dans les directions y et z. Le champ dans le supraconducteur ne dépend ainsi que de x : $\vec{B} = B_z(x)\,\vec{e}_z$.



Modèle retenu pour décrire un supraconducteur dans un champ magnétique extérieur.

3 - a - En utilisant la seconde équation de London, et deux des équations de Maxwell, montrer que l'on arrive à l'équation suivante pour la composante B_z du champ $\vec{B}$ à l'intérieur du supraconducteur :

$$B_z''(x) - \frac{B_z(x)}{l^2} = 0,$$

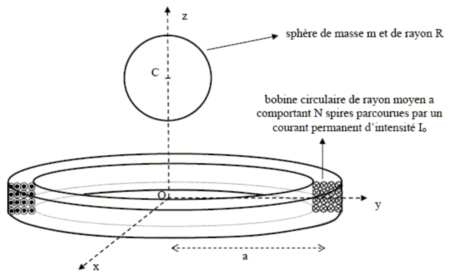
avec l une constante que l'on exprimera en fonction de n, e, m et μ_0.

Faire l'application numérique pour l (en précisant son unité).

b - Résoudre cette équation. On supposera pour déterminer les constantes d'intégration que le supraconducteur est de longueur infinie selon $+x$ (il occupe tout le demi-espace $x > 0$), et on utilisera le fait que $\vec{B}$ est continu en présence d'une distribution volumique de courants.

Cette solution permet-elle de retrouver le fait que le champ magnétique est nul au sein du supraconducteur ?

La lévitation d'un supraconducteur au dessus d'un champ magnétique extérieur est par exemple utilisée dans certains gravimètres (appareils permettant de mesurer le champ de gravitation de façon très précise) : le champ magnétique est produit par circulation d'un courant dans une bobine supraconductrice, et une sphère en matériau supraconducteur lévite au-dessus. Elle est soumise à son poids et à la force magnétique, et sa variation d'altitude permet ainsi de remonter à la valeur de $\vec{g}$.



(source : http://www.chimix.com/an9/prem9/gene53.htm)

Comme le courant dans la bobine ne rencontre pas de résistance, il suffit de l'injecter au départ pour qu'il continue de circuler sans apport supplémentaire. Un gravimètre en Belgique fonctionne ainsi avec un courant injecté dans la bobine il y a 22 ans...
(http://www.astro.oma.be/fr/record-mondial-dans-le-laboratoire-souterrain-de-membach/)

4 – Démonstration des équations de London (facultatif)

On propose ici de donner une démonstration des deux équations de London. Notons qu'il ne s'agit pas d'une vraie démonstration (la théorie à utiliser serait la mécanique quantique), mais plutôt d'arguments "avec les mains" qui permettent d'aboutir à ces équations.

On part du principe qu'un électron dans un supraconducteur ne rencontre aucune résistance, et qu'il se déplace donc librement.
Il est ainsi soumis à la seule force du champ électrique.

4 - a - On note $\vec{v}$ la vitesse de l'électron. Montrer que l'on a la relation $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}$.

b - Si on suppose le flot d'électrons uniforme, on admettra que cette dernière relation est équivalente à $m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}$ avec $\vec{v}(M,t)$ la vitesse de l'écoulement d'électrons.

En utilisant une relation entre $\vec{v}$ et $\vec{j}$, en déduire la première équation de London.

c - On cherche ensuite à démontrer la seconde équation. Prendre pour cela le rotationnel de la première équation de London et aboutir à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{j} + \frac{ne^2}{m}\vec{B}\right) = \vec{0}.$$

On déduit de cette dernière équation que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{j} + \frac{ne^2}{m}\vec{B} = f(M)$ ne dépend pas explicitement du temps. L'explication précédente de l'effet Meissner justifie le fait que la fonction $f(M)$ est en fait nulle, ce qui donne la seconde équation de London.