R 8

Référentiel non-galiléen

8.1 Principe fondamental de la dynamique

8.1.1 Dans un référentiel galiléen

— Référentiel Galiléen —

Un référentiel est dit galiléen, ou inertiel, si dans celui-ci, un objet isolé (sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est en mouvement de translation rectiligne uniforme (le cas de l'immobilité est un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme).

— Remarque —

Le vecteur vitesse de l'objet précédemment cité est alors un vecteur constant.

Soit $M\ (m)$ un point matériel de masse m observé dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ galiléen.
Le principe fondamental de la dynamique postule :

$$\Sigma \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a_{(M)}}_{/\mathcal{R}_1}$$

— Propriété —

Un référentiel galiléen est défini uniquement par l'expérience, ce qui complique sa définition.

8.1.2 Dans un référentiel non-galiléen

D'après la loi de composition de l'accélération, et du principe fondamental de la dynamique, on obtient dans un référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen :

$$m\,\overrightarrow{a_{(M)}}_{/\mathcal{R}} = \Sigma \overrightarrow{F} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{ic}}$$

Avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_{ie}} = -m\,\overrightarrow{a_e} & \text{: force d'inertie d'entraînement} \\ \overrightarrow{f_{ic}} = -m\,\overrightarrow{a_c} & \text{: force d'inertie de Coriolis} \end{cases}$$

8.1.3 Forme explicite des forces d'inertie

8.1.3.1 Cas d'une translation

Soit $\mathcal{R}_1$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}$ un référentiel non galiléen en translation (non uniforme) par rapport à $\mathcal{R}_1$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_{ie}} = -m\,\overrightarrow{a(O)}_{/\mathcal{R}_1} & \text{: force d'inertie d'entraînement} \\ \overrightarrow{f_{ic}} = \overrightarrow{0} & \text{: force d'inertie de Coriolis} \end{cases}$$

On observe bien que, si la translation est uniforme, donc pour $\overrightarrow{a(O)}_{/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{0}$, le référentiel $\mathcal{R}_1$ est galiléen.

8.1.3.2 Cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel non-galiléen, animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}_1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{f_{ie}} = m\,\omega^2\,\overrightarrow{HM} \;\text{ : force d'inertie d'entraînement} \\ \overrightarrow{f_{ic}} = -2\,m\,\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{v_{(M)/\mathcal{R}}} \;\text{ : force d'inertie de Coriolis} \end{array}\right.$$

8.2 Théorème généraux dans un référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen

8.2.1 Théorème de l'énergie cinématique

Le théorème de l'énergie cinétique dans un repère non galiléen s'énonce comme suit :

— Théorème —

$$dE_C(M)_{\mathcal{R}} = \Sigma\,\delta W + \overrightarrow{f_{ie}} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \overrightarrow{f_{ic}} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

En explicitant $\overrightarrow{f_{ic}} \perp \overrightarrow{d\ell}$, on obtient :

$$dE_C(M)_{\mathcal{R}} = \Sigma\,\delta W + \overrightarrow{f_{ie}} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

8.2.2 Théorème du moment cinétique

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma(O)}_{/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \Sigma\,\overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{f_{ie}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{f_{ic}})$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{f_{ie}}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_{ie}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{f_{ic}}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_{ic}} \end{array}\right.$$

8.3 Statique dans le référentiel Terrestre

Soit $\mathcal{R}_{GO}$ le référentiel géocentrique, supposé galiléen.

— Référentiel terrestre —

On appelle référentiel terrestre, noté $\mathcal{R}_T$, le référentiel qui possède comme origine le barycentre des masses de la Terre, avec trois axes orientés vers trois étoiles lointaines, supposé fixes.
Par définition, le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}_{GO}$.
Si $\mathcal{R}_{GO}$ est supposé galiléen, $\mathcal{R}_T$ est donc non galiléen.

Soit $M(m)$ un point matériel de masse m au repos dans R_T non galiléen, à la surface terrestre.
On appelle base locale de projection le trièdre orthonormé direct $(\vec{u}_V, \vec{u}_E, \vec{u}_N)$, avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_E} & : \text{Vecteur orienté vers l'est} \\ \overrightarrow{u_V} & : \text{Vecteur orienté de direction vertical} \\ \overrightarrow{u_N} & : \text{Vecteur orienté vers le nord} \end{cases}$$

Soit λ la latitude du lieu (angle entre l'équateur et le point matériel). Par projection de $\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_{GO}}}$ dans la base $(\overrightarrow{u_V}, \overrightarrow{u_E}, \overrightarrow{u_N})$, on obtient :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_{GO}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_{GO}} \cos\lambda \, \overrightarrow{u_N} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_{GO}} \sin\lambda \, \overrightarrow{u_V}$$

8.3.1 Définition du poids d'un corps

— Poids —

On appelle poids d'un point matériel $M\ (m)$ de masse m l'opposé de la tension $\vec{T}$ qu'exercerait un fil à plomb sur M au repos dans le référentiel d'étude.
Le poids est noté :

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

Dans un référentiel non galiléen, on obtient :

$$\vec{P} = \frac{-\mathcal{G}\,m\,M_T}{R_T^2}\,\overrightarrow{u_R} + m\,\omega^2\,\overrightarrow{HM}$$

$$\vec{g} = \frac{-\mathcal{G}\,M_T}{R_T^2}\,\overrightarrow{u_R} + \omega^2\,\overrightarrow{HM}$$

8.3.2 Ordre de grandeur

Le terme d'inertie est nul aux pôles, et maximum à l'équateur où il s'oppose à la force de gravitation. L'écart qu'il y a entre la gravité aux pôles et à l'équateur est dû pour $\frac{2}{3}$ au terme d'inertie et pour $\frac{1}{3}$ à l'aplatissement de la terre au niveau des pôles.

8.3.3 Énergie potentielle de pesanteur

Le poids est une force conservative qui dérive de la fonction énergie potentielle de pesanteur, définie dans $\mathcal{R}_T$ non galiléen par :

$$E_{pp} = \frac{-\mathcal{G}\,M_T\,m}{r} - \frac{m\,(\omega\,r\,\cos\lambda)^2}{2} + A$$

8.4 Dynamique dans le référentiel terrestre

8.4.1 Point matériel en mouvement dans le plan horizontal

Soit $M\ (m)$ un point matériel en mouvement dans le plan horizontal, à la surface terrestre.
Dans $\mathcal{R}_T$ non galiléen, sa vitesse est quelconque.
On obtient l'expression de la force d'inertie de Coriolis :

$$\overrightarrow{f_{ic}} = \overrightarrow{f_{ic}}_{\text{vert}} + \overrightarrow{f_{ic}}_{\text{horiz}}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{f_{icvert}} = -2\,m\,\omega\,\cos\lambda\,\overrightarrow{u_n}\wedge\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}_T} \text{ force d'inertie de Coriolis verticale}\\ \overrightarrow{f_{ichoriz}} = -2\,m\omega\,\sin\lambda\,\overrightarrow{u_v}\wedge\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}_T} \text{ force d'inertie de Coriolis horizontale}\end{array}\right.$$

La composante verticale s'ajoute, ou se soustrait au poids. La composante horizontale dévie M vers l'Est dans l'hémisphère Nord ($\sin\lambda > 0$). On observe cette déviation sur le pendule de Foucault par exemple.

8.4.2 Point matériel en mouvement vertical

Soit $M\,(m)$ un point matériel en chute libre dans $\mathcal{R}_T$ non galiléen.
Par application du $P.F.D$, et sachant que, pour une chute libre, dans un référentiel galiléen, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathring{z}\,(t) = -g\,t\\ z\,(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + h\end{array}\right.$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathring{\mathring{x}}\,(t) = -2\,\omega\,\mathring{z}\,\cos\lambda + 2\,\omega\,\mathring{y}\,\sin\lambda\\ \mathring{\mathring{y}}\,(t) = -2\,\omega\,\mathring{x}\,\sin\lambda\\ \mathring{\mathring{z}}\,(t) = -g + 2\,\omega\,\mathring{x}\,\cos\lambda\end{array}\right.$$

Par application de cette méthode dite des perturbations, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}x\,(t) = \dfrac{\omega\,g\,t^3}{3}\,\cos\lambda\\ y\,(t) = 0\\ z\,(t) = \dfrac{-g\,t^2}{2} + h\end{array}\right.$$

8.5 Marées océaniques

Nous avons supposé précédemment que le référentiel géocentrique est un référentiel galiléen. En réalité, le référentiel est non galiléen, car il est en translation circulaire et uniforme par rapport au référentiel héliocentrique. Étudions l'influence du Soleil sur la Terre.
Soit $\overrightarrow{f}_{ie}$ la force d'inertie d'entraînement définie par :

$$\overrightarrow{f_{ie}} = m\,\omega^2\,\overrightarrow{HM}$$

Soit $\overrightarrow{F}_{S\to M}$ la force de gravitation exercée par le Soleil sur le point matériel M, de masse m.
On obtient la relation suivante :

$$\overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{F_{S\to M}} = m\,\overrightarrow{C(M)}$$

avec $\overrightarrow{C(M)}$ le champ de marées ressenti en M. Nous retiendrons que si le point M est situé en face du soleil, la force est attractive. Si le point M est opposé au soleil, la force est répulsive. On observe donc pour cette force un effet dislocateur.