Correction – TD – Ondes électromagnétiques

VII Étude d'un condensateur en régime variable

1 - Il faut que la longueur d'onde des champs soit très supérieure à d : $\lambda \gg d$.
Or $f = \dfrac{c}{\lambda}$. Il faut donc une fréquence $f \ll \dfrac{c}{d} = 600\,\text{GHz}$, autant dire que cela sera valable pour toute application pratique.

2 - a - $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Dans l'espace inter-armatures il n'y a pas de courants, donc $\vec{j} = \vec{0}$, donc on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

b - Avec $\vec{j}_D$ ainsi défini, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}_D$. On fait donc comme en magnétostatique, avec $\vec{j}_D$ à la place de $\vec{j}$.
On a donc $\vec{j}_D = -\dot{\sigma}\,\vec{e}_z$.
Soit donc un point M. On se place en coordonnées cylindriques d'axe z passant par le centre du condensateur. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de courants $\vec{j}_D$. Le champ magnétique est donc selon le vecteur $\vec{e}_\theta$: $\vec{B}_1 = B_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta$.
La distribution de courants est invariante par rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{e}_z$. On a donc $\boxed{\vec{B}_1 = B_\theta(r,z)\vec{e}_\theta.}$

c - Contour d'Ampère : cercle dont le centre est sur l'axe Oz, de rayon r, orienté selon $\vec{e}_\theta$.
On va donc avoir (sans détailler), dans l'espace inter-armatures : $2\pi r B_\theta(r,z) = \mu_0 j_D \pi r^2$.
D'où $B_\theta(r,z) = \dfrac{\mu_0 j_D r}{2\pi} = -\dfrac{\mu_0\dot{\sigma}r}{2\pi}$, et $\boxed{\vec{B}_1 = -\dfrac{\mu_0\dot{\sigma}r}{2\pi}\,\vec{e}_\theta.}$

d - On a $u_E = \dfrac{\epsilon_0 E^2}{2} = \dfrac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$, soit une valeur maximale $u_{E,\max} = \dfrac{\sigma_0^2}{2\epsilon_0}$.
On a $u_B = \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{\mu_0\dot{\sigma}^2r^2}{8\pi^2}$. Or la valeur maximale de $\dot{\sigma}$ est $\omega\sigma_0$, celle de r est a, donc $u_{B,\max} = \dfrac{\mu_0^3\omega^2\sigma_0^2a^2}{8\pi^2}$.
Ainsi $u_{B,\max} \ll u_{E,\max}$ est équivalent à $\dfrac{\epsilon_0\mu_0\omega^2a^2}{4\pi^2} \ll 1$, soit encore $\dfrac{(2\pi f)^2a^2}{4\pi^2c^2} \ll 1$, soit encore $(fa)^2 \ll c^2$, soit encore $\boxed{f \ll \dfrac{c}{a}.}$