R 10

Mécanique du solide

10.1 Lois de la mécanique d'un système matériel

10.1.1 Modélisation d'un système matériel

On peut modéliser un système matériel de deux façons :

- Approche discrète : $M = \sum_i m_i$
- Approche continue : $M = \iiint_\tau \rho\, d^3\tau$

Dans la suite de l'exposé, on utilisera souvent la notation discrète, mais la notation continue est tout-à-fait utilisable. Il faut alors remplacer la somme discrète sur l'indice i par une intégrale sur le volume τ et les masses m_i par la masse élémentaire $d^3m = \rho\, d^3\tau$.

10.1.2 Théorème du centre d'inertie (ou de la résultante cinétique ou de la résultante dynamique ou du centre de masse)

10.1.2.1 Centre de masse

— Centre de masse —

Le barycentre, ou centre de masse ou centre d'inertie, noté G :

$$\boxed{M\,\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\,\overrightarrow{OM_i}}$$

— Remarque —

Avec un système continu, on a :

$$\overrightarrow{OG} \iiint_\tau \rho\, d^3\tau = \iiint_\tau \rho\, \overrightarrow{OM}\, d^3\tau$$

10.1.2.2 Quantité de mouvement d'un système

— Quantité de mouvement —

On appelle quantité de mouvement totale d'un système, notée $\overrightarrow{P}$:

$$\boxed{\overrightarrow{P} = \sum_i m_i\,\overrightarrow{v_i}}$$

— Remarque —

Avec un système continu, on a :

$$\overrightarrow{P} = \iiint_\tau \rho\, \overrightarrow{v_{(M)}}\, d^3\tau$$

En introduisant le centre de d'inertie, on obtient :

$$\overrightarrow{P} = M\,\overrightarrow{v_{(G)}}$$

— Théorème —

Par application de la deuxième loi de Newton , on obtient alors :

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$$

Ceci constitue le théorème du centre d'inertie (ou de la résultante cinétique ou de la résultante dynamique ou encore du centre de masse).

10.1.3 Référentiel barycentrique

— Référentiel Galiléen —

Un référentiel barycentrique est un référentiel qui a pour origine le centre de masse du système, et qui est animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen. On le notera $\mathcal{R}^*$.

On note X^* la grandeur X évaluée dans le référentiel barycentrique.

— Propriété —

Dans un référentiel barycentrique, la quantité de mouvement totale $\overrightarrow{P^*} = \overrightarrow{P}_{/\mathcal{R}^*}$ est nulle :

$$\overrightarrow{P^*} = \overrightarrow{0}$$

— Remarque —

Pour un système ouvert, on considère la masse à l'instant t, et la masse à l'instant $t + dt$ du système, plus la masse éjectée durant dt. On peut donc définir dans ce cas un système fermé.

10.2 Théorème du moment cinétique

10.2.1 Moment cinétique

Considérons le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel M de masse m, animé de la vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. On a :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{v}}$$

— Moment cinétique —

On définit alors le moment cinétique pour un ensemble de points (système matériel) par :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m\,\overrightarrow{v_i}}$$

— Propriété —

Le transport de moment cinétique peut s'écrire de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\sigma_{(A)}}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{P}$$

Avec $\overrightarrow{P}$ la quantité de mouvement totale du système. Le moment cinétique et la quantité de mouvement constituent donc un torseur cinétique.

10.2.2 Premier théorème de Kœnig

En partant de la décomposition de la vitesse :

$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_{(G)}}_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{v_i^*}$$

où $\overrightarrow{v_{(G)}}_{/\mathcal{R}}$ est la vitesse du centre de masse G par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ et $\overrightarrow{v_i^*}$ la vitesse du point M_i dans le référentiel barycentrique, on obtient le premier théorème de Kœnig :

— Premier théorème —

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\sigma(G)^*} + \overrightarrow{OG} \wedge M\,\overrightarrow{v_{(G)}}}$$

Le moment cinétique par rapport à un point fixe est donc égal à la somme du moment cinétique dans le référentiel barycentrique et du moment cinétique du centre d'inertie affecté de toute la masse du système : on décompose donc le moment cinétique total en un moment cinétique lié au mouvement de rotation du système et à un autre lié au mouvement de translation de son centre d'inertie.

Le moment cinétique, dans le référentiel barycentrique, ne dépend pas du point par rapport auquel on le calcule. On l'écrit donc :

$$\overrightarrow{\sigma^*_{(G)}} = \overrightarrow{\sigma^*_{(O)}} = \overrightarrow{\sigma^*_{(A)}} = \overrightarrow{\sigma^*}$$

— Remarque —

Il plus facile d'évaluer $\overrightarrow{\sigma^*}$ dans le référentiel barycentrique puisque dans celui-ci, le mouvement du système considéré est un mouvement de rotation.

10.2.3 Théorème du moment cinétique en un point fixe d'un référentiel galiléen

Soit O un point fixe par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_1$. On obtient :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}_1}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{F_{\text{ext}}})}$$

10.2.4 Théorème du moment cinétique en un point mobile d'un référentiel galiléen

Soit A un point mobile par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_1$. On peut alors écrire :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_{(A)}}_{/\mathcal{R}_1}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext}}} - \overrightarrow{v_{(A)}} \wedge \overrightarrow{P}$$

10.2.5 Théorème du moment cinétique en un point fixe d'un référentiel non galiléen

Soit B un point fixe par rapport à un référentiel non galiléen $\mathcal{R}$. On obtient :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\sigma_{(B)}}/\mathcal{R}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{F_{ic}})}$$

10.2.6 Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique

En particulier, si $\mathcal{R}$ référentiel non galiléen est le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ et que le point fixe B est le point G, centre d'inertie du système,le moment des forces d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{F_{ic}})$ est nul car le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est en translation par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_1$ galiléen et le moment des forces d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}(\overrightarrow{F_{ie}})$ est nul car l'accélération de G est nulle dans le référentiel barycentrique. On obtient alors :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\sigma_{(G)}}/\mathcal{R}^*}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_{(G)}}^*}{dt} = \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext}}}}$$

Dans ce cas, on s'affranchit des forces d'inertie. Ce cas particulier du référentiel barycentrique est donc très intéressant.

10.2.7 Représentation torsorielle

On a les représentations suivantes :

$$\text{Torseur Cinématique} \begin{cases} \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{\sigma_{(O)}} \end{cases}$$

$$\text{Torseur Dynamique} \begin{cases} \overrightarrow{R} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \end{cases}$$

10.3 Théorème de l'énergie cinétique

10.3.1 Énergie cinétique

— Énergie cinétique —

Par définition, pour un ensemble de points matériels, l'énergie cinétique est définie de la façon suivante :

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

— Remarque —

Pour un système continu, l'énergie cinétique est définie de la façon suivante :

$$E_c = \iiint \frac{1}{2} \rho(M) v_{(M)}^2 d^3\tau$$

10.3.2 Second théorème de Kœnig

Le second théorème de Kœnig s'énonce de la façon suivante :

— Second théorème —

$$\boxed{E_c = E_c^* + \frac{1}{2}\,M\,v_{(G)}^2}$$

L'énergie cinétique d'un système matériel est égale à la somme de son énergie cinétique dans le référentiel barycentrique et de l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de toute la masse du système. C'est encore une fois la somme d'une énergie cinétique liée à la rotation su système et d'une énergie cinétique liée à la translation de son centre d'inertie.

10.3.3 Théorème de l'énergie cinétique

En partant de l'expression de l'énergie cinétique, on obtient :

— Théorème de l'énergie cinétique —

$$\boxed{\Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}}$$

où W_{ext} est le travail des forces extérieures et W_{int} le travail des forces intérieures.

— Remarque —

Si le système est un solide, donc indéformable, le travail W_{int} des forces intérieures est nul et :

$$\Delta E_c = W_{\text{ext}}$$

10.3.4 Autres formes du théorème de l'énergie cinétique

Sous forme différentielle, on a :

$$dE_c = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}$$

En utilisant les puissances, on obtient l'expression suivante (appelée parfois théorème de la puissance cinétique) :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}}$$

En distinguant les forces conservatives $\overrightarrow{F_c}$ et les forces non conservatives $\overrightarrow{F_{nc}}$, on peut aussi écrire :

$$\delta W(\overrightarrow{F_c}) = -dE_p$$

où E_p est l'énergie potentielle associée la force conservative $\overrightarrow{F_c}$. En introduisant l'énergie mécanique $E_m = E_p + E_c$, on a alors :

$$\boxed{\Delta E_m = W(\overrightarrow{F_{nc}})}$$

ou une de ses autres formes (que les forces non conservatives soient intérieures ou extérieures ne change rien).

10.4 Cas du solide

— Solide —

On définit un solide par :

$$\forall (A, B) \in \text{Système}^2 \quad \| \overrightarrow{AB} \| = C^{te}$$

C'est donc un système indéformable.

10.4.1 Cinétique

Considérons un solide, en mouvement dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_1$. Soit un référentiel $\mathcal{R}$ lié au solide. Soient A et M deux points du solide. On a la relation suivante :

— Champ des vitesses dans un solide —

$$\overrightarrow{v_{(M)}} = \overrightarrow{v_{(A)}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\omega}$$

où $\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}$ est le vecteur rotation instantanée de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_1$. $\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}$ est défini par :

$$\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1} = \dot{\theta}\ \overrightarrow{e_z}$$

si $\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur définissant l'axe de la rotation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ et si θ est l'angle de rotation de $\mathcal{R}$ par rapport $\mathcal{R}_1$.

10.4.2 Théorème du moment cinétique

10.4.2.1 Solide possédant un point fixe

Soit un solide possédant un point fixe, notée C. D'après la relation précédente, on obtient, pour tout point M du solide :

$$\overrightarrow{v_{(M)}} = \overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{CM}$$

10.4.2.2 Solide possédant un axe fixe

Le vecteur rotation instantanée est porté par l'axe fixe (Δ). En appliquant le théorème du moment cinétique en un point O de cet axe (Δ) et en projetant sur un vecteur unitaire $\overrightarrow{e_\Delta}$ porté par ce axe, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{\sigma_{(O)}}}{dt} \cdot \overrightarrow{e_\Delta} &= \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O),\text{ext}}} \cdot \overrightarrow{e_\Delta} \\
\frac{d\overrightarrow{\sigma_{(O)}} \cdot \overrightarrow{e_{(\Delta)}}}{dt} &= \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O),\text{ext}}} \cdot \overrightarrow{e_\Delta} \\
\frac{d\sigma(\Delta)}{dt} &= \mathcal{M}_{(\Delta),\text{ext}}
\end{aligned}$$

En posant $J_\Delta = \sum_i m_i\, H_iM_i$ pour un système discret ou $J_{(\Delta)} = \int MH^2\, dm$ pour un système continu, les point H_i étant les projetés des points M_i du solide (H projeté de M) sur l'axe fixe, ici (Δ), on a :

$$\sigma_{(\Delta)} = J_{(\Delta)}\,\omega = J_{(\Delta)}\,\dot{\theta}$$

J_Δ est appelé moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ.
On obtient alors :

$$\boxed{\frac{d\sigma_{(\Delta)}}{dt} = J_{(\Delta)}\frac{d\omega}{dt} = J_{(\Delta)}\,\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{(\Delta),\text{ext}}}$$

10.4.3 Théorème de Huyghens

— Théorème de Huyghens —

Soient (Δ) et (Δ_G) deux droites parallèles distants de d, (Δ_G) passant par le centre d'inertie G du système. On a alors :

$$\boxed{J_{(\Delta)} = J_{(\Delta_G)} + M\,d^2}$$

10.4.4 Théorème de l'énergie cinétique

10.4.4.1 Énergie cinétique dans le cas général

Il faut utiliser le second théorème de Kœnig :

$$\boxed{E_c = E_c^* + \frac{1}{2}\,M\,V_{(G)}^2}$$

10.4.4.2 Énergie cinétique d'un solide possédant un point fixe

Soit un solide possédant un point fixe, noté C. On obtient, en partant de l'expression générale de l'énergie cinétique, et du champ de vitesses, la relation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\sigma_{(C)}}\cdot\overrightarrow{\omega}$$

10.4.4.3 Énergie cinétique d'un solide possédant un axe fixe

Soit un solide possédant un axe fixe, noté Δ. On obtient alors :

$$E_c = \frac{1}{2}\,J_{(\Delta)}\,\omega^2$$

10.4.4.4 Énergie cinétique d'un solide en translation

Dans le cas d'un solde en translation, tous les points du solide ont même vitesse, celle du centre d'inertie, et on a alors :

$$E_c = \frac{1}{2}\,M\,v_{(G)}^2$$

10.5 Contact entre deux solides

10.5.1 Types de mouvements relatifs

Il existe trois types de mouvements relatifs :

- mouvement de translation,
- mouvement de rotation,
- mouvement de roulement.

10.5.2 Vitesse de glissement

On considère deux solides en contact. À un instant t donné, on suppose que les points I_1, du solide 1, et I_2, du solide 2, sont en contact. On obtient l'expression de la vitesse de glissement, noté $\vec{v}_g$:

$$\vec{v}_{g_{2\to1}} = \overrightarrow{v_{(I_2)}}_{/\mathcal{R}} - \overrightarrow{v_{(I_1)}}_{/\mathcal{R}}$$

10.5.3 Lois de Coulomb pour le glissement

Considérons un contact. La réaction $\vec{R}$ peut se décomposer en deux forces :

- $\vec{T}$: la force de frottement,
- $\vec{N}$: la réaction normale au support.

10.5.3.1 En l'absence de glissement

— Cas particulier —

En l'absence de glissement, on a :

$$\|\vec{T}\| \leq f_0 \, \|\vec{N}\|$$

Où f_0 est le cœfficient de frottement statique.

10.5.3.2 Avec glissement

S'il y a glissement, on a :

$$\|\vec{T}\| = f \, \|\vec{N}\|$$

Où f est le cœfficient de frottement dynamique.

— Remarque —

On pourra noter que le coefficient de frottement dynamique est inférieur au coefficient de frottement statique : $f < f_0$.
Dans la vie courante, on peut remarquer qu'il est plus facile de pousser un objet lourd sur le sol une fois que son mouvement est amorcé.