O 3

Mécanique

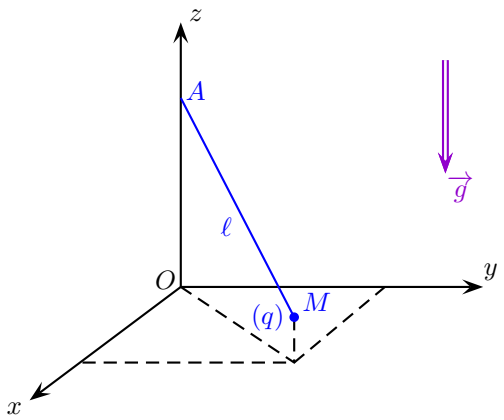
3.1 Énoncés

► Exercice 3. 1 : Questions de cours

1. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique pour un système ponctuel puis le démontrer.
2. Énoncer le théorème du moment cinétique et donner l'expression du moment en O d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un point A.
3. Énoncer le théorème de la puissance cinétique et donner l'expression de la puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un point A.
4. Énoncer le théorème de Bernoulli.

► Exercice 3. 2 : Un pendule complexe

Une particule chargée (de charge q) est placée à l'extrémité M d'une tige AM de masse négligeable et de longueur ℓ.
L'articulation en A est parfaite et le système est plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0\ \overrightarrow{e_z}$. À l'équilibre, M est en O. On ne s'intéresse qu'aux petits mouvements autour de O.



1. Quelle est la nature de la projection, dans le plan xOy, de la trajectoire de la particule chargée lorsque $B_0 = 0$?

   On pourra poser $\overrightarrow{T} = T\,\overrightarrow{u}$ en exprimant $\overrightarrow{u}$ en fonction des coordonnées cartésiennes du point M et de T, module de la tension du fil en M. On pourra approximer $T \simeq m\,g$.
   Le principe fondamental fournit alors 2 équations indépendantes en x et y.

2. Reprendre l'étude précédente dans le cas où le champ B_0 est non nul et pour les conditions initiales suivantes : vitesses initiales nulles, $y\,(0) = 0$ et $x\,(0) = a$.
   On pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$, $\omega_L = -\dfrac{q\,B_0}{2\,m}$ et $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}$.
   On obtient alors 2 équations liées en x et y et on les résout par les complexes.

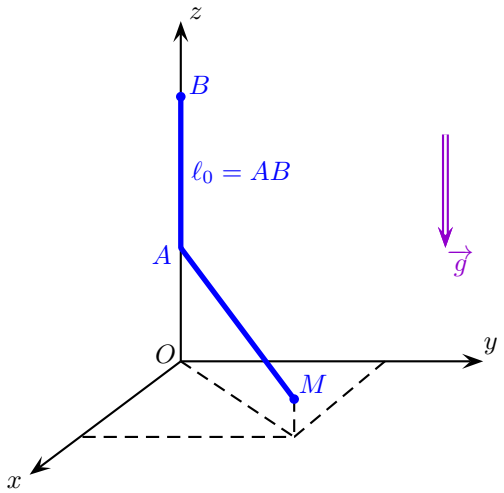
► Exercice 3. 3 : Pendule simple sur plan incliné

Un pendule simple, de longueur ℓ, a son extrémité O fixée sur un plan incliné (d'un angle θ par rapport au sol). À l'autre extrémité M, on a disposé une masse m : le contact avec le plan incliné s'effectue sans frottements.
Dans l'état initial, le pendule est lâché sans vitesse, écarté d'un angle (faible) α_0.
Pour θ fixé, déterminer la pulsation ω des petites oscillations par application du théorème du moment cinétique, ainsi que l'énergie mécanique E du système en fonction de θ, $m\,g$, ℓ, $D = AO$ et α_m, amplitude de ces oscillations. On prendra l'origine de l'énergie potentielle au point A.

► Exercice 3. 4 : Pendule élastique

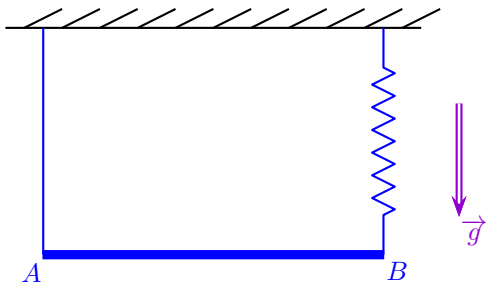
Un élastique (E) accroché en B passe en A dans un petit anneau et porte en son extrémité M une masse ponctuelle m. Soit k la raideur de (E), BA sa longueur au repos. M étant accroché, la position d'équilibre de M se trouve en O. On pose $OA = a$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$.
2. Étudier le mouvement de M, les conditions initiales étant définies par $t = 0$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{v_0}$.
3. Étudier le cas particulier $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{0}$.



► Exercice 3. 5 : Chute d'une barre

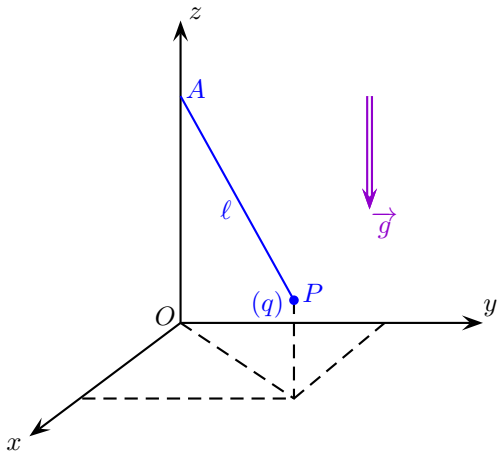
Une barre homogène AB (de masse m et de longueur ℓ) est suspendue horizontalement par l'intermédiaire d'un ressort et d'un fil.
À l'instant $t = 0$, on brûle le fil.
Déterminer les caractéristiques du mouvement juste après la rupture de la ficelle.
On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par B : $J_{Bz} = \dfrac{m\,\ell^2}{3}$.



► Exercice 3. 6 : Pendule simple chargé

Un pendule simple est constitué d'une barre sans masse AP de longueur ℓ à l'extrémité de laquelle on a placé une petite boule de masse m et de charge q positive.
Pour simplifier, on peut considérer que le pendule oscille dans le plan Oyz (liaison pivot d'axe Ax parfaite en A).
On ajoute deux charges $-Q$ ($Q > 0$) sur l'axe $x'Ox$, ces charges étant placées de façon symétrique (elles sont distantes de a du point O) par rapport au plan des oscillations du pendule.

Comment sont modifiées les petites oscillations précédentes ?



▶ Exercice 3.7 : Deux masses reliées par un ressort

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Elles peuvent se déplacer, sans frottement, sur un axe horizontal $x'x$.
Pour $t < 0$, le ressort est non tendu et les masses sont au repos en $M_1(0)$ et $M_2(0)$.

À partir de l'instant $t = 0$, on exerce sur m_2 une force horizontale constante $\vec{F} = F\ \vec{e_x}$.
On note $x_1(t) = \overline{M_1(0)M_1(t)}$ et $x_2(t) = \overline{M_2(0)M_2(t)}$ et on pose $\Omega^2 = k\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)$.
Déterminer les grandeurs $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en appliquant le principe fondamental de la dynamique pour chaque masse et en résolvant les 2 équations différentielles liées.

▶ Exercice 3.8 : Canalisation régulière

Un fluide parfait incompressible circule, avec un débit volumique constant, dans une canalisation régulière, de section constante, inclinée par rapport à l'horizontale. Considérons 2 point M_1 et M_2, d'altitudes respectives z_1 et z_2, dans une même section droite de cette conduite.

1. Exprimer la différence de pression $p_2 - p_1$ entre ces deux points.
2. Calculer cette différence de pression lorsque $z_2 - z_1 = h = 5{,}00\,m$ pour :
   (a) de l'eau, de masse volumique $\rho_e = 1{,}00\,kg.L^{-1}$,
   (b) de l'air, de masse volumique $\rho_a = 1{,}30\,kg.m^{-3}$.
3. Comparer les deux résultats et conclure.

On donne $g = 10{,}0\,m.s^{-2}$.

▶ Exercice 3.9 : Transport de fuel

Dans une canalisation de longueur $\ell = 1{,}65\,km$, de diamètre $D = 25{,}0\,cm$ circule du fuel avec un débit volumique $q_V = 19{,}7\,L.s^{-1}$. Le fuel possède une densité d égale à 0,932 et sa viscosité dynamique vaut $\mu = 0{,}110\,Pa.s$.

1. Calculer la viscosité cinématique ν du fuel.
2. Déterminer la vitesse v de l'écoulement dans la conduite.
3. En déduire la nature de l'écoulement.
4. La formule de Poiseuille s'écrit : $\lambda = \dfrac{64}{Re}$. Déterminer le cœfficient de perte de charge linéaire λ.
5. Les pertes de charge linéaires peuvent se calculer à l'aide de la formule : $J_L = -\lambda\,\dfrac{v^2}{2}\,\dfrac{\ell}{D}$. Déterminer J_L.

Donnée : masse volumique de l'eau $\rho_e = 1{,}00.10^3\,kg.m^{-3}$.

— Le "Coup de pouce" —

Exercice 3 :
On pourra appliquer le principe fondamental et le résoudre de façon vectorielle.

Exercice 4 :
On peut appliquer le théorème du moment cinétique à l'équilibre puis le théorème de la résultante cinétique ainsi que le théorème du moment cinétique en A lors du mouvement.

Exercice 5 :
En appliquant le théorème de l'énergie cinétique et en utilisant l'énergie potentielle électrostatique, on obtient une équation du second ordre en θ.