R 6

Force centrale

6.1 Force centrale

Soit $M\ (m)$ point matériel de masse m, observé dans un référentiel $\mathcal{R}_1$ galiléen muni d'un repère d'origine O.
Soit $\overrightarrow{F}$ une force agissant sur $M\ (m)$.

— Force centrale —

On dit que $\overrightarrow{F}$ est une force centrale si et seulement si à tout instant la force $\overrightarrow{F}$ est portée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Une force centrale possède un support passant par un point fixe, ici O, appelé centre de force.

6.2 Moment cinétique

Supposons que la vitesse d'un point $M\ (m)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque soit $\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}}$.

— Moment cinétique —

On appelle moment cinétique de M, par rapport à O, noté $\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}}$, la grandeur vectorielle définie par :

$$\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p_{(M)}}_{/\mathcal{R}}$$

avec :

$$\overrightarrow{p_{(M)}}_{/\mathcal{R}} = m\,\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}}$$

Les unités :
Le moment cinétique s'exprime en $kg.m^2.s^{-1}$.

6.3 Théorème du moment cinétique

Supposons que $M\ (m)$ soit soumis à l'ensemble des forces résultantes $\Sigma\overrightarrow{F}$ dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ galiléen.
On obtient le théorème du moment cinétique, aussi noté $T.M.C.$:

— Énoncé —

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \Sigma\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}}$$

avec :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{(O)}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$

le moment par rapport au point fixe O de chaque force $\overrightarrow{F}$.

6.3.1 Application du théorème du moment cinétique à une force centrale

Soit $M\,(m)$ un point matériel soumis seulement à la force centrale $\overrightarrow{F} = F\,(r)\,\overrightarrow{u_r}$ dans $\mathcal{R}_1$ galiléen. On obtient :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

Donc :

$$\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p_{(M)}}_{/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{C^{te}}$$

Sachant que $\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}_1}$ est une constante, on en déduit que la trajectoire est plane, que le plan passe par le centre de force et qu'il contient $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}_1}$

6.4 Nature de la trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale

Sachant que la trajectoire du point matériel $M\,(m)$ de masse m, soumis à la force centrale $\overrightarrow{F}$, est plane, définissons le repère de telle sorte que le plan (O, x, y) soit le plan du mouvement.

6.4.1 Constante des aires

En explicitant le moment cinétique de $M\,(m)$ par rapport à O dans $\mathcal{R}_1$, en coordonnées polaires, on obtient :

$$\overrightarrow{\sigma_{(O)}}_{/\mathcal{R}_1} = r\,\overrightarrow{e_r} \wedge (\dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}) = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{C^{te}}$$

On en déduit donc la constante des aires, notée C :

$$C = r^2\,\dot{\theta} = C^{te}$$

6.4.2 Vitesse aréolaire

— Vitesse aréolaire —

On définit la vitesse aréolaire par :

$$v_{\text{aréo}} = \frac{C}{2}$$

avec C la constante des aires.

6.4.3 Énergie mécanique d'un système soumis à une force centrale

Supposons que la force centrale $\overrightarrow{F}$ soit conservative.
Il en découle que la force $\overrightarrow{F}$ "dérive" d'une énergie potentielle $E_p\,(r)$: $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$ ou $\delta W(\overrightarrow{F}) = -dE_p$.
On utilisant les coordonnées polaires, la constante des aires et en développant l'énergie cinétique dans l'expression de l'énergie mécanique, on obtient l'énergie potentielle efficace (effective), notée $E_{\text{p, eff}}\,(r)$:

$$E_{\text{p, eff}} = \frac{m\,C^2}{2\,r^2} + E_p\,(r)$$

D'où l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_{m_{(M)}/\mathcal{R}} = \frac{m\,\dot{r}^2}{2} + E_{\text{p, eff}} = C^{te}$$

L'expression $\dfrac{m\dot{r}^2}{2}$ représente l'énergie cinétique radiale du système.

6.4.4 Trajectoire dans un champ newtonien

En explicitant $E_p\,(r)$ si $M\,(m)$ est soumis à la force gravitationnelle.
On obtient :

- Si $E_{m_{(M)}/\mathcal{R}} = E_{m1} > 0$, on peut dire que le point matériel M est dans un état libre. Il peut évoluer entre un état minimal r_1, défini par $\dot{r} = 0$, et l'infini.
- Si $E_{m_{(M)}/\mathcal{R}} = E_{m2} < 0$: Le système est dans un état lié, avec $r \in [r_2; r_3]$. Dans le cas des positions extrêmes (r_2 et r_3), on obtient : $\dot{r} = 0$, la vitesse est orthoradiale. On dit que la particule est dans un puits de potentiel.

6.5 Étude du mouvement d'un point matériel dans une force centrale d'origine gravitationnelle

Soit un point M, de masse m, placé dans le champ gravitationnel d'un astre, de masse m'.

6.5.1 Formules de Binet (Hors Programme TSI)

Les formules de Binet consistent à exprimer la vitesse de M et son accélération, en fonction de $u = \dfrac{1}{r}$ et de ses dérivées par rapport à θ.

6.5.2 Force explicite de la trajectoire d'après les formules de Binet

On sait que $E_{m_{(M)}/\mathcal{R}} = E_{c_{(M)}/\mathcal{R}} + E_{p_{(M)}} = C^{te}$ car la force de gravitation est conservative.
On obtient :

$$r\,(\theta) = \frac{p}{1 + e\,\cos(\theta - \theta_0)}$$

L'équation du mouvement est donc l'équation d'une conique, d'excentricité e et de paramètre p.

6.5.3 Énergie mécanique

On obtient l'expression de l'énergie mécanique en fonction de l'excentricité e :

$$E_{m_{(M)}/\mathcal{R}} = \frac{-\mathcal{G}\,m\,m'}{2\,p}(1 - e^2)$$

De cette expression, on obtient :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\,p\,E_{m_{(M)}/\mathcal{R}}}{\mathcal{G}\,m\,m'}}$$

En en déduit les différentes expressions de l'énergie mécanique en fonction de la trajectoire :

- Pour $e = 0$, la trajectoire est circulaire :

$$E_{m_{(M)}/\mathcal{R}} = \frac{-\mathcal{G}\,m\,m'}{2\,p}$$

- Pour $0 < e < 1$, la trajectoire de $M\,(m)$ est elliptique :

$$\frac{-\mathcal{G}\,m\,m'}{2\,p} \leq E_m(M)_{/\mathcal{R}} < 0$$

- Pour $e = 1$, la trajectoire de $M\,(m)$ est parabolique :

$$E_{m_{(M)}\,/\mathcal{R}} = 0$$

- Pour $e > 1$, la trajectoire de $M\,(m)$ est hyperbolique, son énergie mécanique est positive.

6.6 Trajectoire elliptique

6.6.1 Trajectoire circulaire

Sachant qu'une trajectoire circulaire est un cas particulier d'une trajectoire elliptique, pour laquelle l'excentricité e est nulle, donc pour laquelle $p = r_0$, le rayon du cercle, on obtient :

$$E_{m_{(M)}\,/\mathcal{R}} = \frac{E_p}{2} = -E_{c/\mathcal{R}} = C^{te}$$

À partir de cette expression pour l'énergie cinétique, et sachant que dans le cas d'une trajectoire circulaire :

$$v_0 = r_0\,\dot{\theta}_0$$

On obtient :

$$\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\,\pi^2}{\mathcal{G}\,m'} = C^{te}$$

On retrouve la troisième loi de Kepler .

6.6.2 Trajectoire elliptique

6.6.2.1 Propriétés

On définit les caractéristiques suivantes pour une ellipse :

- O : Centre de force
- C : Centre de l'ellipse
- A : Apogée : Distance la plus grande entre le centre de forces et le point matériel
- P : Périgée : Distance la plus courte entre le centre de forces et le point matériel

On obtient les propriétés suivantes pour une ellipse :

- Distance de M au centre de force à l'apogée de l'ellipse r_A :

$$r_A = r\,(\pi) = \frac{p}{1-e}$$

- Distance de M au centre de force au périgée de l'ellipse r_P :

$$r_P = r\,(0) = \frac{p}{1+e}$$

- Le demi grand axe d'une ellipse, noté a, est défini par :

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

- Le demi petit axe d'une ellipse, noté b :

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

- Distance focale de l'ellipse (il existe deux foyers, par symétrie), notée f :

$$f = e\,a$$

D'après l'expression de a, on obtient :

$$E_{m_{(M)}\,/\mathcal{R}} = \frac{-\mathcal{G}\,m\,m'}{2\,a} = C^{te}$$

6.6.2.2 Lois de Kepler

Ces lois ont été établies de façon expérimentale par l'astronome J. Kepler.

La première loi de Kepler s'énonce de la façon suivante :

— Première loi de Kepler —

Les centres des planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le soleil

La deuxième loi de Kepler s'énonce ainsi :

— Deuxième loi de Kepler —

Les rayons vecteurs balaient en des temps égaux des aires égales

On obtient la troisième loi de Kepler grâce aux calculs précédents :

— Troisième loi de Kepler —

Les rapports des carrés des périodes de révolution sur les cubes des demi grands axes sont indépendants de la planète considé

De façon plus précise, on a :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{\mathcal{G}\,m'} = C^{te}}$$

6.6.2.3 Relation avec la vitesse

On a :

$$v^2 = \mathcal{G}\,m'\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

6.6.3 Trajectoire parabolique

Pour une trajectoire parabolique, c'est-à-dire pour $e = 1$, l'énergie mécanique est nulle. On obtient l'expression de la vitesse (appelée aussi vitesse de libération. En effet, si le point M possède cette vitesse, elle part à l'infini, elle se soustrait au champ de forces) :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2\,\mathcal{G}\,m'}{r}} = v_0\,\sqrt{2}$$

6.6.4 Satellisation, orbite géostationnaire

6.6.4.1 Vitesse de libération

— Vitesse de libération —

C'est la vitesse minimale pour laquelle l'état est libre. L'orbite est alors parabolique et l'énergie est nulle. En négligeant la masse du satellite m devant celle de l'astre m', on obtient v_ℓ :

$$\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{2\,\mathcal{G}\,m'}{r}}}$$

— Remarque —

À la surface de la terre, en prenant $r = R_T = 6400\,km$ et $m' = m_T = 6{,}00.10^{24}\,kg$, on trouve une vitesse de libération de l'ordre de $11{,}2\,km.s^{-1}$ pour un engin spatial.

6.6.4.2 Satellite géostationnaire

— Satellite géostationnaire —

On dit d'un satellite qu'il est géostationnaire quand il est fixe dans le référentiel terrestre.

Ceci implique que sa vitesse angulaire, dans le référentiel géocentrique, est égale à celle de la Terre. Le satellite vérifie donc la loi des aires.
Sa trajectoire est circulaire et contenu dans un plan. Ce plan est perpendiculaire au moment cinétique et passe par le centre de forces. La trajectoire s'effectue donc dans le plan de l'équateur.
On montre, avec la troisième loi de Kepler, qu'un tel satellite évolue à une altitude de $36000\,km$ et donc à $42000\,km$ du centre de la terre.

6.6.4.3 Orbite de transfert

— Orbite de transfert —

On appelle orbite de transfert ou orbite de Hohmann , la trajectoire elliptique empruntée par le satellite pour se placer sur son orbite géostationnaire.

Cette première phase est dite balistique.
À l'apogée, le rayon doit être le rayon de la trajectoire circulaire.
Le satellite entre alors dans une seconde phase : on donne au satellite à ce point une nouvelle énergie mécanique pour le mettre sur son orbite circulaire. Cette orbite circulaire peut être géostationnaire.

6.6.4.4 Énergie de satellisation

Soit ΔE_m l'énergie de satellisation, dans un référentiel géostationnaire.

— Latitude —

On définit la latitude d'un lieu à la surface de la Terre, notée λ, par l'angle entre l'équateur et le segment $[OM]$.

L'apport d'énergie à fournir pour satelliser un engin spatial autour de la terre à la distance r_0 est le suivant :

$$\Delta E_m = -\mathcal{G}\,m_T\,m\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R_T}\right) - \frac{1}{2}\,m\,R_T^2\,\omega^2\,\cos^2\lambda$$

On minimise donc l'énergie à fournir avec un lancement à l'équateur, dirigé vers l'est pour profiter de la rotation de la Terre.