R 13

Compléments d'électrocinétique

13.1 Définitions

13.1.1 Intensité du courant

— Intensité —

L'intensité est un débit de charge :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

13.1.2 Vecteur densité surfacique de courant

— Vecteur densité surfacique de courant —

On considère une surface Σ. On peut écrire :

$$i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n}\, d^2S = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

Ceci équivaut à :

$$d^3q = \vec{j} \cdot \vec{n}\, d^2S\, dt$$

Avec $\vec{j}$ le vecteur densité surfacique de courant.

Considérons un modèle composé d'un seul type de porteurs de charges. Toutes les charges se déplacent à la vitesse $\vec{v}$. Pendant la durée dt, elles parcourent la distance $\overrightarrow{d\ell}$ ($\overrightarrow{d\ell}$ est le déplacement élémentaire des particules) :

$$\overrightarrow{d\ell} = \vec{v}\, dt$$

Toutes les particules appartenant au volume élémentaire $\Sigma\, d\ell$ traversent Σ durant la durée dt.
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} dq &= \rho_m\, \vec{v} \cdot \vec{n}\, \Sigma\, dt \\ &= \rho_m\, \vec{v} \cdot \vec{n}\, \Sigma\, dt \end{aligned}$$

Avec ρ_m la densité volumique de charges mobiles. D'après les deux expressions de dq on obtient :

$$\vec{j} = \rho_m\, \vec{v}$$

Par un théorème de superposition, on obtient dans un modèle de multiples porteurs de charges :

$$\vec{j} = \sum_k \rho_{m,k}\, \vec{v_k}$$

13.1.3 Équation de continuité ou conservation de la charge

Considérons un conducteur fermé de section Σ de charge intérieure q. On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n}\, d^2S \\ i = \dfrac{-dq}{dt} \text{ (Conservation de l'énergie)} \\ q = \iiint_{\tau} \rho\, d^3\tau \end{cases}$$

En considérant que cette surface est invariante dans le temps, on obtient :

$$\begin{aligned} i &= -\frac{dq}{dt} \\ &= -\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3\tau \\ &= \oiint_\Sigma \vec{j}\cdot\vec{n}\, d^2S \\ &= \iiint_\tau div\,\vec{j}\, d^3\tau \text{ (D'après le théorème de Green-Ostogradski)} \end{aligned}$$

On obtient donc : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\,\vec{j}$, soit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0}$$

Ceci est une équation locale, car toutes ses composantes dépendent du point M. Cette équation est l'expression de la conservation de la charge.
On en déduit qu'en régime permanent, comme ρ est une constante par rapport au temps :

$$div\,\vec{j} = 0$$

13.2 Expression de la puissance reçue par un dipôle

Considérons un dipôle contenant des charges mobiles. Considérons une charge q de ce dipôle.

— Rappel —

Elle est soumise à la force de Lorentz électrique :

$$\vec{f} = q\,\vec{E}$$

On obtient donc le travail de cette force, donné par :

$$\delta W = q\,\vec{E}\cdot\vec{v}\,dt$$

En discrétisant le problème, et sachant que seules les charges mobiles travaillent, on obtient l'expression du travail :

$$W = \sum q_k\,\vec{E}\,E_{(M),k}\cdot\vec{v_k}\,dt$$

Cette somme est à réaliser sur l'ensemble des charges mobiles. Dans le cas d'un système continu, on obtient :

$$W = \iiint_\tau \rho_m\,d^3\tau\,\vec{E}_{(M)}\cdot\langle\vec{v}\rangle dt$$

D'où l'expression de la puissance :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \iiint_\tau \rho_m\,\overrightarrow{E_{(M)}}\cdot\langle\vec{v}\rangle\,d^3\tau$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \iiint_\tau \vec{j}\cdot\overrightarrow{E_{(M)}}\,d^3\tau \\ &= \iiint_\tau \vec{j}\cdot\left(-\overrightarrow{grad}\,V\right)\,d^3\tau \\ &= \int_A^B \iint_\Sigma -\vec{j}\cdot\vec{n}\,d^2S\,\overrightarrow{grad}\,V\cdot\vec{d\ell} \\ &= -i\int_A^B dV \end{aligned}$$

Cette expression est l'expression de la puissance reçue par le dipôle.
Au final, en développant $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{grad}\,V$, on obtient :

$$\mathcal{P} = i\,(V_A - V_B)$$

avec A et B respectivement points d'entrée et de sortie du dipôle.

13.3 Conducteur ohmique

13.3.1 Loi d'Ohm

Soit la loi d'Ohm :

$$u = R\,i$$

Cette relation revient à dire que :

$$\overrightarrow{j} = \sigma'\,\overrightarrow{E}$$

où σ' est la conductivité en $\Omega^{-1}.m^{-1}$ ou $S.m^{-1}$.
La loi d'ohm ne s'applique que si ρ_m est une constante indépendante de $\overrightarrow{E}$. En pratique, un dipôle vérifie la loi d'ohm dans un certain intervalle de valeur pour $\overrightarrow{E}$.

13.3.2 Résistance électrique

Considérons un dipôle électrique. On suppose qu'il vérifie la loi d'ohm, donc :

$$\overrightarrow{j} = \sigma'\,\overrightarrow{E}$$

De plus, on a les équations suivantes :

$$\begin{cases} i = \iint_\Sigma \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n}\,d^2S \\ \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$V_A - V_B = \int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

et :

$$i = \iint_\Sigma \sigma'\,\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\,d^2S$$

$$V_A - V_B = R\,i$$

Avec R constante, appelée résistance.

Exemple de calcul de résistance :
Considérons un conducteur filiforme de longueur ℓ. Si $i \neq 0$, alors $\overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{0}$, donc les conducteurs ne sont pas à l'équilibre. On suppose que ce conducteur vérifie la loi d'Ohm. On a alors les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} i = \iint_\Sigma \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n}\,d^2S \\ V_A - V_B = \int_A^B \dfrac{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{d\ell}}{\sigma'} \end{cases}$$

On se place en régime permanent, donc $div\,\overrightarrow{j} = 0$. On peut donc supposer par exemple que :

$$\overrightarrow{j} = j\,(x)\;\overrightarrow{e_x}$$

De plus, nous avons $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ car il n'y a pas de champ magnétique.
On obtient donc :

$$\overrightarrow{j} = j_0\ \overrightarrow{e_x}$$

On obtient donc :

$$i = j_0\,S \Rightarrow\ \overrightarrow{E} = \frac{j_0}{\sigma'}\ \overrightarrow{e_x}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \frac{j_0}{\sigma'}\,\ell \\ &= i\,\frac{\ell}{\sigma'\,S} \end{aligned}$$

Et :

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma'\,S} = \rho'\,\frac{\ell}{S}}$$

où ρ' est la résistivité en $\Omega.m$. On a bien sûr $\rho' = \dfrac{1}{\sigma'}$.

13.3.3 Effet Joule

Considérons un dipôle. Soit $\mathcal{P}$ la puissance reçue par ce dipôle. On obtient :

$$\mathcal{P} = \iiint \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}\,d^3\tau$$

Or dans le cas d'un conducteur ohmique :

$$\overrightarrow{j} = \sigma'\,\overrightarrow{E}$$

Donc :

$$\mathcal{P} = \iiint \sigma' E^2\,d^3\tau > 0$$

Donc un conducteur ohmique ne peut que consommer de l'énergie.