R 1

Cinématique du point

1.1 Postulats de Newton

1.1.1 Espace et Temps

La mécanique newtonienne repose sur les postulats spatio-temporels de Newton, à savoir :

- L'espace est absolu, immuable, infini, euclidien, homogène et isotrope.
- Le temps est absolu et uniforme.

1.1.2 Point matériel - Référentiel

— Point matériel —

Un système sera assimilé à un point à partir du moment où sa position dans l'espace peut être donnée par un triplet de coordonnées.

— Théorème —

On parle d'un point matériel quand on concentre la totalité de la masse du système à l'isobarycentre des masses. La position de cet objet sera donc réduite à celle de ce point.

1.1.3 Référentiel

— Référentiel —

Un référentiel est un repère muni de la notion de temps. On peut y effectuer des mesures, et donc y réaliser une étude cinématique.

1.2 Les différents systèmes de coordonnées

1.2.1 Coordonnées cartésiennes.

1.2.1.1 Définition

— Coordonnées cartésiennes —

C'est le système le plus simple : le repère naturel ($\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$) attaché au point $M\ (x, y, z)$ est parallèle aux vecteurs de la base cartésienne. Le vecteur position s'exprime par $\overrightarrow{OM} = x\ \overrightarrow{e_x} + y\ \overrightarrow{e_y} + z\ \overrightarrow{e_z}$.

Les vecteurs unitaires intervenant dans son expression sont indépendants de la position du point M.

1.2.1.2 Schéma

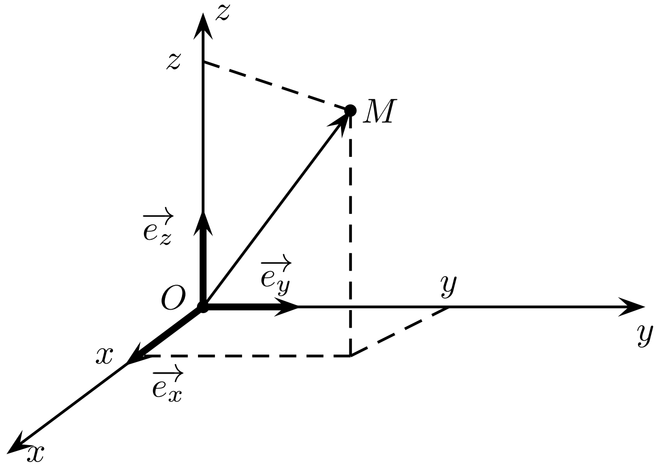

FIGURE 1.1 – Coordonnées cartésiennes

1.2.1.3 Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx\ \overrightarrow{e_x} + dy\ \overrightarrow{e_y} + dz\ \overrightarrow{e_z}$$

1.2.2 Coordonnées cylindriques

1.2.2.1 Définition

1.2.2.2 Schéma

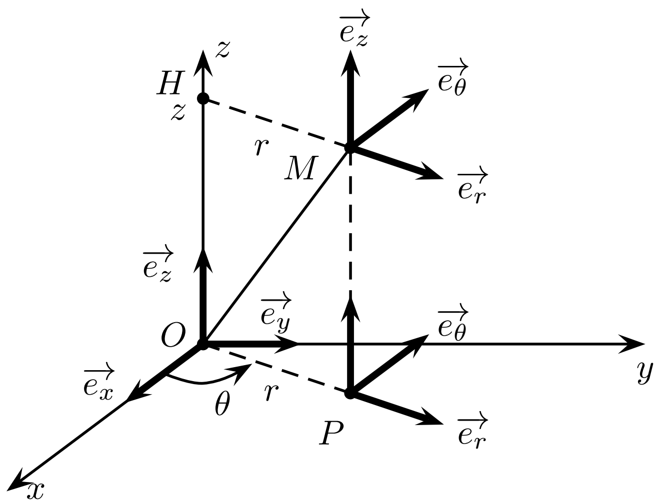

FIGURE 1.2 – Coordonnées cylindriques

Le vecteur position s'exprime par $\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{e_r} + z\ \overrightarrow{e_z}$. Ici, le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r}$ intervenant dans l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dépend de la position de M puisque son orientation sera fonction de la valeur de l'angle θ. On a $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_r}(\theta)$.

1.2.2.3 Déplacement élémentaire en coordonnées polaires

En polaires, $z = 0$ et dz également.
On peut montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{e_r}}{\mathrm{d}\theta} = \vec{e_\theta}$.

$$\vec{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = dr\ \vec{e_r} + r\,d\theta\ \vec{e_\theta}$$

1.2.2.4 Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques

$$\vec{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = dr\ \vec{e_r} + r\,d\theta\ \vec{e_\theta} + dz\ \vec{e_z}$$

1.2.3 Coordonnées sphériques

1.2.3.1 Définition

1.2.3.2 Schéma

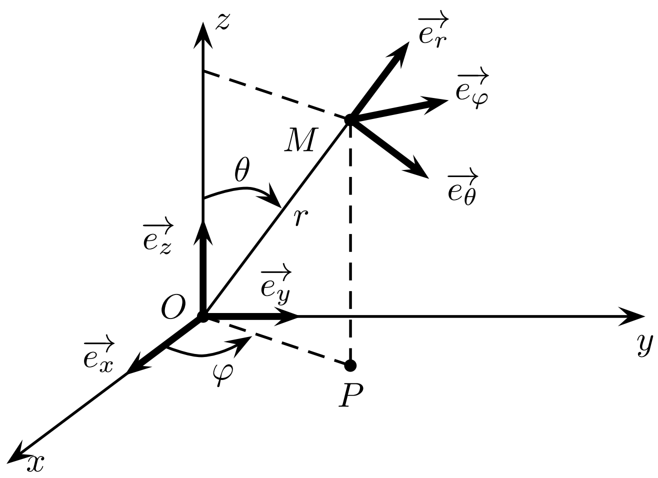

FIGURE 1.3 – Coordonnées sphériques

Le vecteur position s'exprime par $\overrightarrow{OM} = r\ \vec{e_r}$. Ici, le vecteur unitaire $\vec{e_r}$ intervenant dans l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dépend de la position de M puisque son orientation est fonction de la valeur des angles θ et φ.

1.2.3.3 Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques

$$\vec{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = dr\ \vec{e_r} + r\,d\theta\ \vec{e_\theta} + r\ \sin\theta\,d\varphi\ \vec{e_\varphi}$$

1.3 Vitesse

— Vitesse —

Soit M un point matériel observé dans un référentiel $\mathcal{R}$.
La position de M à l'instant t est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$.
La vitesse d'un point matériel M dans $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

De plus, si on considère $\overrightarrow{d\ell}$ un déplacement élémentaire, on obtient :

$$\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{\overrightarrow{d\ell}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

1.3.0.1 Expression en coordonnées cartésiennes

En considérant

$$\overrightarrow{OM} = x\ \overrightarrow{e_x} + y\ \overrightarrow{e_y} + z\ \overrightarrow{e_z}$$

on obtient pour la vitesse :

$$\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\ \overrightarrow{e_x} + \dot{y}\ \overrightarrow{e_y} + \dot{z}\ \overrightarrow{e_z}$$

1.3.0.2 Expression en coordonnées cylindriques

En considérant

$$\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{e_r} + z\ \overrightarrow{e_z}$$

on obtient pour la vitesse :

$$\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\ \overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\ \overrightarrow{e_z}$$

1.3.0.3 Expression en coordonnées polaires

En considérant

$$\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{e_r}$$

on obtient pour la vitesse :

$$\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\ \overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta}$$

1.4 Accélération

— Accélération —

Par définition, l'accélération de M, animé de la vitesse $\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}}$ est donnée par :

$$\overrightarrow{a_{(M)}}_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

1.4.0.1 Expression en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{a_{(M)/\mathcal{R}}} = \ddot{x}\ \overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\ \overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\ \overrightarrow{e_z}$$

1.4.0.2 Expression en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{a_{(M)/\mathcal{R}}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\ \overrightarrow{e_r} + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\ \overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\ \overrightarrow{e_z}$$

1.4.0.3 Expression en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{a_{(M)/\mathcal{R}}} = a_r\ \overrightarrow{e_r} + a_\theta\ \overrightarrow{e_\theta}$$

avec :

- $a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$: c'est l'accélération radiale.
- $a_\theta = 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}$: c'est l'accélération orthoradiale.

En coordonnées polaires, on dit qu'un système subit une accélération centrale si et seulement si l'accélération a_θ est nulle.
Dans ce cas, le vecteur accélération passe par un point fixe appelé centre de forces.
De plus, en dérivant $r^2\,\dot{\theta}$ par rapport au temps, on remarque que :

$$C = r^2\,\dot{\theta} = C^{te}$$

C est une constante appelée constante des aires.

1.5 Vitesse et accélération dans la base de Frénet : Hors programme mais bien pratique !

— Base de Frénet —

Soit $\overrightarrow{\tau}$ un vecteur unitaire tangent à la trajectoire à chaque instant.
Soit $\overrightarrow{\omega} = \dot{\theta}\ \overrightarrow{e_z}$, le vecteur rotation instantanée.
Soit $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{\tau}$ avec $\overrightarrow{\tau}$ vecteur unitaire tangent à la trajectoire.
On appelle base de Frénet, la base $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{e_z})$ orthonormée directe.

1.5.1 Déplacement élémentaire

On définit un cercle, dit osculateur (tangent à la trajectoire au point $M(t)$, à l'instant t), de rayon R_c et de centre C.
On définit :

$$d\ell = R_c\,d\theta$$

1.5.2 Vitesse

On définit la vitesse dans la base de Frénet par :

$$\overrightarrow{v_{(M)/\mathcal{R}}} = R_c\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{\tau}$$

1.5.3 Accélération

On définit l'accélération dans la base de Frénet par :

$$\overrightarrow{a_{(M)}}/\mathcal{R} = a_n \overrightarrow{N} + a_\tau \overrightarrow{\tau}$$

avec :

- $a_N = \dfrac{v^2}{R_c}$: C'est l'accélération normale.
- $a_\tau = \left(\dfrac{dv}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$: C'est l'accélération tangentielle.

1.5.4 Cas d'un mouvement circulaire

On a dans ce cas :

$$R_c = C^{te} = R$$

1.5.5 Cas d'un mouvement circulaire uniforme

On a dans ce cas :

$$R_c = C^{te} = R \text{ et } a_\tau = 0$$

Par ailleurs :

$$a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$