R 7

Changement de référentiel

7.1 Définitions

7.1.1 Présentation

Soient deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ en mouvements relatifs. $\mathcal{R}_1$ est un référentiel fixe, alors que $\mathcal{R}$ est un référentiel mobile.

7.1.2 Dérivation d'un vecteur quelconque par rapport au temps

Soit $\overrightarrow{u} = x(t)\ \overrightarrow{e_x} + y(t)\ \overrightarrow{e_y} + z(t)\ \overrightarrow{e_z}$ un vecteur défini dans $\mathcal{R}$. On obtient :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{u}$$

$\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}$ est le vecteur rotation instantanée de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_1$
Si $\overrightarrow{u}$ est fixe dans $\mathcal{R}$, c'est-à-dire que $x(t), y(t), z(t)$ sont des constantes, on obtient :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{u}$$

7.1.3 Référentiels en translation

— Référentiel en translation —

On dit que deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ sont en translation si $\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{0}$.

7.2 Loi de composition des vitesses, des accélérations

7.2.1 Loi de composition des vitesses

On obtient la relation :

$$\overrightarrow{v(M)}_{/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{v(M)}_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{v(O)}_{/\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

On exprime cette relation sous la forme :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$$

Avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_a} : & \text{vitesse absolue : vitesse de} M \text{par rapport à} \mathcal{R}_1 \\ \overrightarrow{v_r} : & \text{vitesse relative : vitesse de} M \text{par rapport à} \mathcal{R} \\ \overrightarrow{v_e} : & \text{vitesse d'entraînement : vitesse de} \mathcal{R} \text{par rapport à} \mathcal{R}_1 \end{cases}$$

7.2.2 Loi de composition des accélérations

On obtient la relation :

$$\overrightarrow{a(M)}_{/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{a(M)}_{/\mathcal{R}} + 2\,\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{a(O)}_{/\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \left(\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \left(\frac{d\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{OM}$$

On exprime cette relation sous la forme :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

Avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_c} = 2\,\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{/\mathcal{R}} = 2\,\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{v_r} & \text{: accélération de Coriolis} \\ \overrightarrow{a_e} & \text{: accélération d'entraînement, obtenue pour la vitesse de } M \text{ nulle dans } \mathcal{R} \end{cases}$$

7.3 Référentiel en translation et en rotation

7.3.1 Référentiel en translation

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel en translation par rapport à $\mathcal{R}_1$, donc $\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{0}$.
On obtient :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_{(O)}}_{/\mathcal{R}_1}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a(O)}_{/\mathcal{R}_1}$$

7.3.2 Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

— Référentiel en rotation uniforme —

On dit que le référentiel $\mathcal{R}$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}_1$ quand deux des axes de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{R}_1$ sont confondus, avec O qui est confondu avec O_1

On obtient, avec $\overrightarrow{HM}$ la distance entre l'axe de rotation et le point M,

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{HM}$$

$$\overrightarrow{a_e} = -\omega^2\,\overrightarrow{HM}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + 2\,\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} \wedge \overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}} - \omega^2\,\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} - \omega^2\,\overrightarrow{HM}$$