TP E7 : ANALYSE SPECTRALE – ECHANTILLONNAGE

Des notions nouvelles sont abordées dans ce TP, qui aurait pu faire l'objet d'un cours.

Capacités exigibles de la formation expérimentale : Analyse spectrale :

- Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition.
- Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.

Capacités exigibles de la formation disciplinaire :

Afin de compléter l'approche analogique des circuits électriques, un module à vocation expérimentale est consacré au traitement numérique des signaux à travers les sujets suivants :
- La conversion analogique numérique.
- L'échantillonnage et le repliement de spectre.

L'étude expérimentale des systèmes mettant souvent en œuvre des instruments numériques d'acquisition, de mesure, ou de calcul, la formation est complétée par une initiation à l'électronique numérique. Cette ouverture est abordée de manière exclusivement expérimentale afin de sensibiliser les étudiants aux limites introduites par l'échantillonnage et la quantification lors d'une conversion analogique numérique.

Ce chapitre est exclusivement étudié de manière expérimentale et aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année. Le professeur introduira les thèmes proposés au fur et à mesure des besoins et en relation avec les autres sujets d'étude. Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement à l'aide d'une analogie stroboscopique, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon et de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Electronique numérique	
Echantillonnage	**Décrire le mouvement apparent d'un segment tournant observé avec un stroboscope. Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.**
Condition de Nyquist-Shannon.	**Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre dû à l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.**
Analyse spectrale numérique.	**Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.**

Introduction :

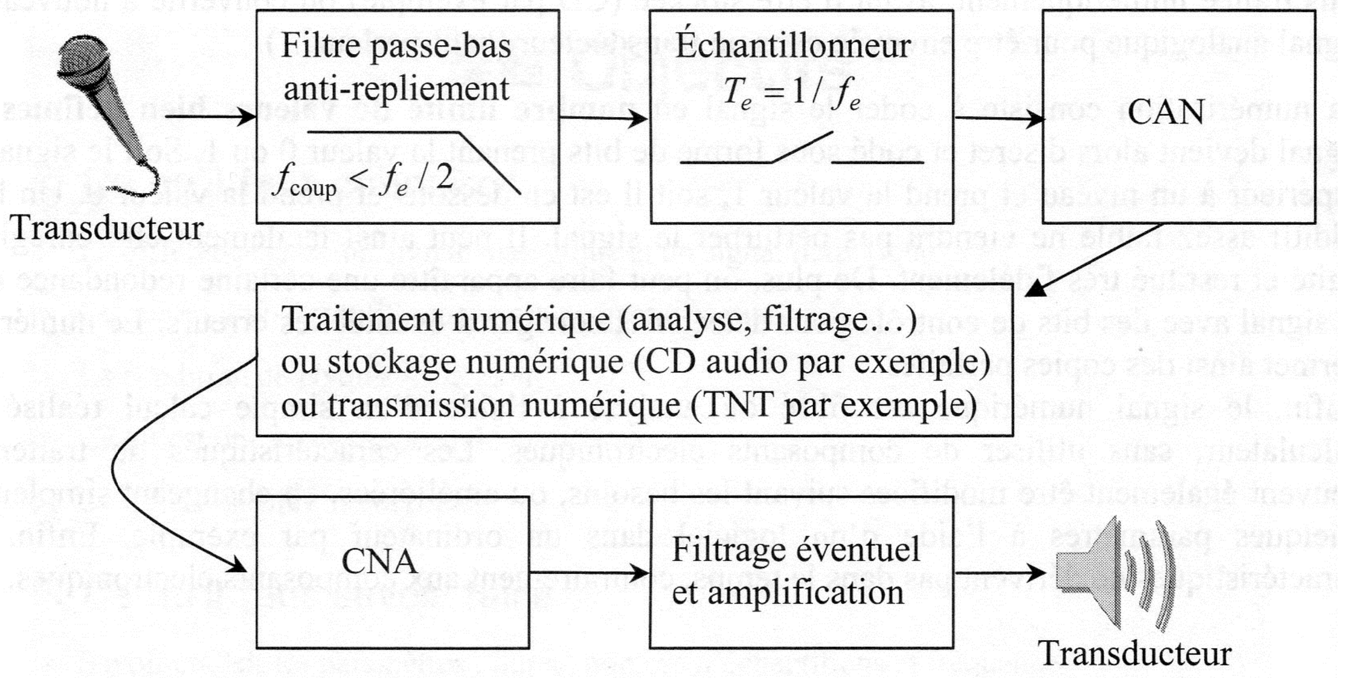
Les phénomènes qui nous entourent varient généralement de manière continue. Un son, une température, un signal électrique peuvent prendre n'importe quelle valeur : on parle de signal analogique.
La grandeur à traiter est d'abord convertie en signal électrique à l'aide d'un capteur (microphone, sonde, …). La tension électrique obtenue peut être traitée directement de manière analogique à l'aide de filtres ou d'analyseurs. Elle peut aussi être convertie en signal numérique, puis traitée numériquement, avant d'être stockée (CD par exemple) ou convertie à nouveau en signal analogique pour être envoyée dans un transducteur (haut-parleur, …).

La numérisation consiste à coder le signal en nombre limité de valeurs bien définies. Le signal devient alors discret et codé sous forme de bits prenant la valeur 0 ou 1. Il peut ainsi facilement être enregistré, traité et restitué très fidèlement. De plus, on peut faire apparaître une certaine redondance dans le signal avec des bits de contrôle pour détecter et corriger d'éventuelles erreurs. Le numérique permet ainsi des copies parfaites.
Enfin, le signal numérique est filtré ou analysé à l'aide d'un simple calcul réalisé par calculateur, sans utiliser de composants électroniques. Les caractéristiques du traitement peuvent également être modifiées suivant les besoins, ou améliorées, en changeant simplement quelques paramètres à l'aide d'un logiciel dans un ordinateur par exemple. Enfin, ces caractéristiques ne dérivent pas dans le temps, contrairement aux composants électroniques.

I) Traitement du signal numérique :

1) Généralités :

Les signaux à traiter (son, onde électromagnétique,…) sont convertis en signaux électriques à l'aide de transducteurs. Ce sont des signaux analogiques, ils varient continument. Le traitement numérique nécessite donc au préalable une conversion analogique numérique (CAN).



Enfin, une conversion numérique analogique (CNA) est effectuée après traitement pour restituer un signal analogique au transducteur.

2) Numérisation d'un signal :

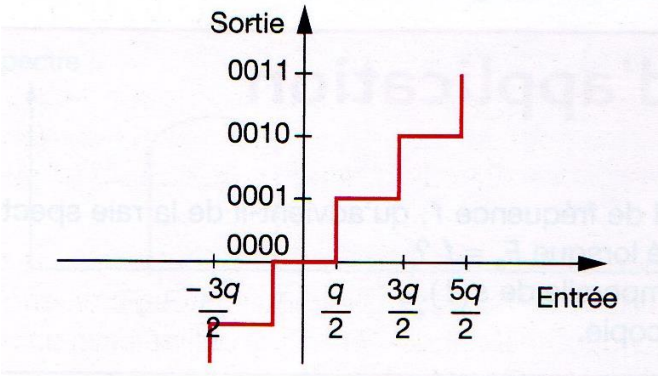
La numérisation (CAN) nécessite un échantillonnage et une quantification.

a) L'échantillonnage :

L'échantillonnage consiste à prendre périodiquement une mesure du signal, à $t = n\,T_e$, où T_e est la période d'échantillonnage (n entier). On note $f_e = \dfrac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage. Cette opération est réalisée par un interrupteur commandé appelé échantillonneur.

b) La quantification :

Une fois l'échantillonnage effectué, chaque mesure peut être numérisée, c'est-à-dire convertie en un nombre, selon une loi de quantification.

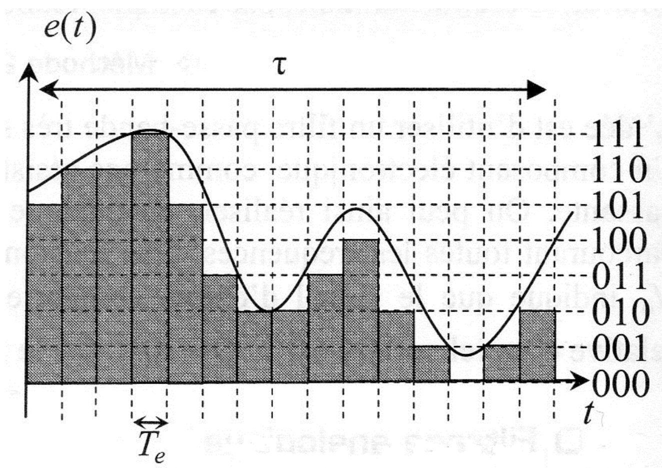


On appelle *pas de quantification*, ou quantum q, l'écart entre deux valeurs successives (deux marches dans la loi en escalier).
Chaque échantillon peut être écrit sous forme numérique, binaire par exemple. Le nombre total de valeurs possibles dépend du nombre d'éléments binaires servant à coder chaque nombre obtenu : p éléments binaires offrant 2^p valeurs possibles. Ainsi, un convertisseur à 8 bits peut produire $2^8 = 256$ valeurs différentes. Si la plage de conversion, c'est-à-dire la largeur de l'intervalle dans lequel peut évoluer le signal, est notée Δs, le quantum s'écrit : $\boxed{q = \dfrac{\Delta s}{2^p - 1} \approx \dfrac{\Delta s}{2^p}}$ (pour N niveaux, on compte N – 1 intervalles).

La quantification affecte une valeur numérique approchée à chaque échantillon prélevé, parmi un nombre limité de valeurs possibles, puis cette valeur est convertie en binaire.

c) Un exemple de CAN 3 bits :

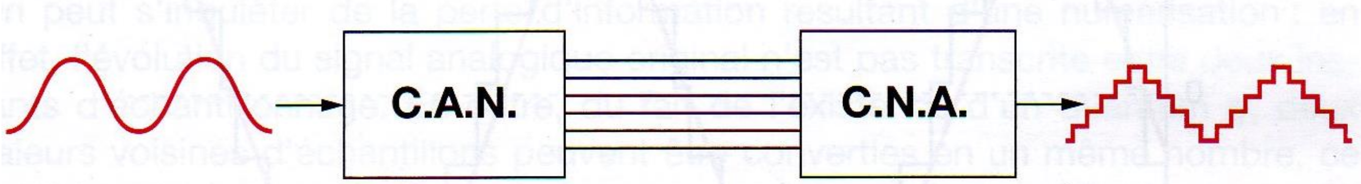
Dans l'exemple ci-contre, le signal analogique (courbe continue) est échantillonné avec une période T_e, avec 15 échantillons, et quantifié sur 3 bits, soit $2^3 = 8$ niveaux de quantification.
De plus, l'acquisition ne peut se faire que sur une durée τ limitée, que l'on appelle durée d'acquisition (ou fenêtre d'analyse). En notant N le nombre d'échantillons prélevés, on a $\boxed{\tau = N\,T_e}$.



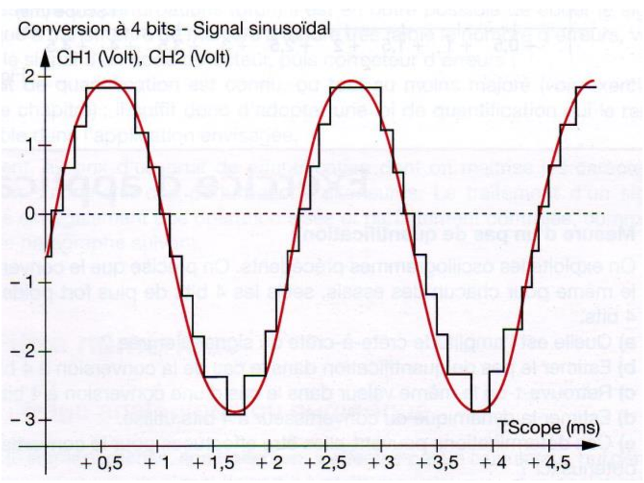
d) Convertisseurs :

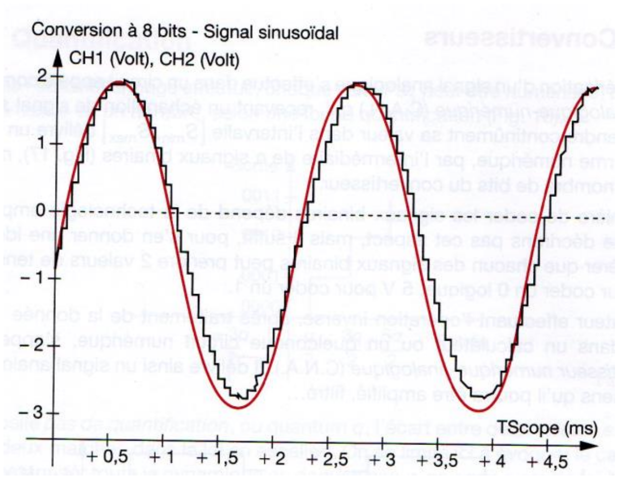
La numérisation d'un signal analogique s'effectue dans un circuit appelé convertisseur analogique-numérique (CAN) qui, recevant un échantillon de signal s analogique, délivre un signal sous forme numérique, par l'intermédiaire de p signaux binaires, p étant appelé nombre de bits du convertisseur.
La manière de coder les signaux binaires dépend de la technologie employée. On ne s'y intéresse pas ici.
L'opérateur effectuant l'opération inverse, après traitement de la donnée numérique dans un calculateur ou un quelconque circuit numérique, s'appelle un convertisseur numérique-analogique (CNA). Il délivre ainsi un signal analogique.

L'association en cascade de deux convertisseurs CAN-CNA ne donne toutefois pas en sortie le même signal qu'à l'entrée, du fait des arrondis opérés lors de la première conversion.



Exemple d'une conversion 4 bits ou 8 bits d'un signal sinusoïdal :





e) Signal et bruit :

On peut s'inquiéter de la perte d'information résultant d'une numérisation : en effet, l'évolution du signal analogique original n'est pas transcrite entre deux instants d'échantillonnage. En outre, du fait de l'existence d'un quantum q, deux valeurs voisines d'échantillons peuvent être converties en un même nombre, ce qui engendre une erreur. On parle à ce propos de *bruit de quantification*.
Mais, en pratique, cet inconvénient peut être nettement compensé par des avantages :

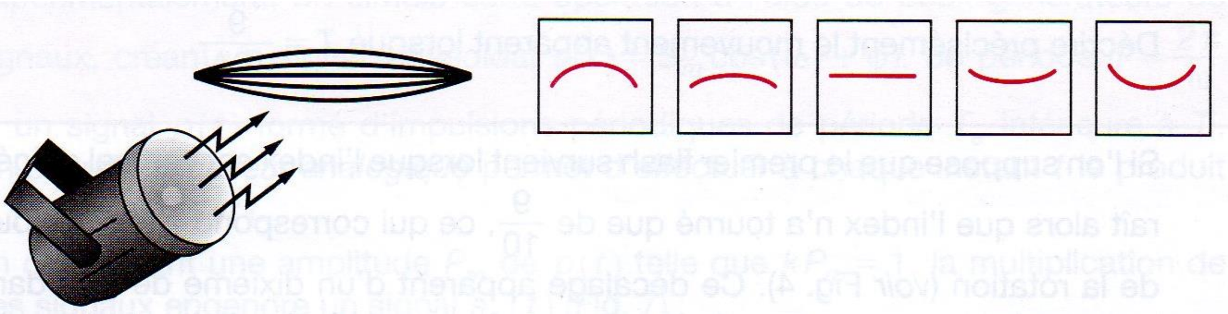
- une fois la conversion effectuée, la transmission et le stockage du signal numérique peuvent s'effectuer sans plus d'altération du signal (on transmet des nombres) ;
- en présence de perturbations (bruit), il est en outre possible de coder le signal numérique à transmettre de manière à rendre très faible le nombre d'erreurs, voire à munir le signal d'un code détecteur, puis correcteur d'erreurs ;
- le bruit de quantification est connu, ou tout au moins majoré. Il suffit donc d'adopter une loi de quantification qui le rende admissible dans l'application envisagée.

Finalement, au prix d'un bruit de quantification dont on maîtrise les caractéristiques, on s'affranchit des perturbations ultérieures. Le traitement d'un signal numérisé est également une opération aisée et parfaitement contrôlée (voir le TP E8 sur le filtrage numérique).

II) Principe de stroboscopie : étude d'un segment tournant :

1) Observation d'un mouvement :

L'observation de la corde vibrante à l'aide d'un stroboscope, effectuée en première année, a permis de rendre compte d'un mouvement en se limitant à un nombre fini d'images. Ce procédé, utilisé au cinéma ou en télévision, suppose que la cadence soit suffisamment rapide pour que l'observateur ait l'impression d'une continuité du mouvement. Compte tenu de la persistance rétinienne de l'œil, on peut ainsi se contenter de quelques dizaines d'images par seconde, voire de centaines pour les procédés de meilleure qualité.



2) Expériences autour d'un segment tournant :

On choisit d'illustrer le principe sur un exemple simple de mouvement circulaire, afin de mettre en évidence la notion de cadence limite (cadence désignant le nombre d'images par seconde, nombre de flashs par seconde dans l'exemple du stroboscope, ce qui correspond à la fréquence d'échantillonnage).

On considère un segment tournant à vitesse constante à raison de f tours par seconde. Un stroboscope éclaire le segment tournant.
Alimenter le segment tournant de manière à ce qu'il tourne à f = 2 tours par seconde (120 tours par minute), dans le sens horaire.

<u>Expérience 1</u> :
Eclairer le segment tournant grâce au stroboscope, à une fréquence d'échantillonnage $f_e = 20$ flashs par seconde (1200 flashs par minute). Dessiner ce que l'on observe :

$t = 0$	$t = T_e$	$t = 2\ T_e$	$t = 3\ T_e$	$t = 4\ T_e$	$t = 5\ T_e$

On suppose que les durées mises en jeu sont grandes devant la persistance rétinienne de l'observateur, celui-ci voit donc un mouvement saccadé. Ainsi, la durée séparant deux éclairs successifs correspond à $\frac{1}{10}$ de tour.
Le mouvement apparent du segment tournant est fidèle à son mouvement réel, on observe un mouvement dans le sens de rotation réelle. La fréquence d'échantillonnage est convenablement choisie.
Diminuer légèrement la fréquence d'échantillonnage, et vérifier que tout ceci reste vrai tant que la cadence des flashs $f_e = \frac{1}{T_e}$ reste grande devant la fréquence de rotation f du segment tournant.

Expérience 2 : $f_e = 2\ f = 240$ flashs par minute
Dessiner ce que l'on observe :

$t = 0$ $t = T_e$ $t = 2\ T_e$ $t = 3\ T_e$ $t = 4\ T_e$ $t = 5\ T_e$

La durée entre les flashs correspond à celle d'un demi-tour, l'observateur ne perçoit plus de mouvement de rotation : l'image du segment tournant ne prend en effet que deux positions diamétralement opposées.

Expérience 3 :
On poursuit la diminution de la cadence des flashs (toujours à vitesse angulaire du segment tournant constante). On constate un mouvement apparent rétrograde lorsque la durée entre les flashs est supérieure à celle d'un demi-tour et inférieure à celle d'un tour. Cela s'observe facilement lorsque l'on filme une roue de voiture, qui semble parfois tourner à l'envers (effet stroboscopique).
Par exemple, dessiner ce que l'on observe quand $f_e = \frac{4}{3} f = 160$ flashs par minute :

$t = 0$ $t = T_e$ $t = 2\ T_e$ $t = 3\ T_e$ $t = 4\ T_e$ $t = 5\ T_e$

La période d'échantillonnage est égale aux trois quarts de la période du signal, ce qui correspond à un flash qui survient tous les trois quarts de tour. Il faut donc 4 flashs pour que le mouvement apparent effectue un tour, ce qui correspond à une vitesse, exprimée en nombre de tours par seconde, égale à $\frac{1}{4} f_e$, soit $\frac{1}{3} f$, soit $f_e - f$.

Expérience 4 : $f_e = f = 120$ flashs par minute
Dessiner ce que l'on observe :

$t = 0$ $t = T_e$ $t = 2\ T_e$ $t = 3\ T_e$ $t = 4\ T_e$ $t = 5\ T_e$

La durée entre les flashs correspond à celle d'un tour, l'observateur ne perçoit plus de mouvement de rotation, on a l'illusion de l'immobilité de l'index.

Expérience 5 :
Diminuer encore légèrement la fréquence d'échantillonnage. Le mouvement apparent du segment tournant est alors à nouveau dans le sens de rotation réelle, mais le segment tournant a effectué plus d'un tour entre deux visualisations successives.
Là encore, la fréquence d'échantillonnage n'est pas convenable pour décrire le mouvement du segment tournant.
Toutes les possibilités de mouvements apparents se retrouvent à nouveau au fur et à mesure de la diminution de la cadence des flashs, le segment tournant effectuant plus d'un tour entre deux visualisations successives.

3) Conclusions :

- Pour décrire convenablement le mouvement du segment tournant, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure au double de la fréquence de rotation du segment tournant, c'est-à-dire qu'il faut au minimum deux points de mesure par période :

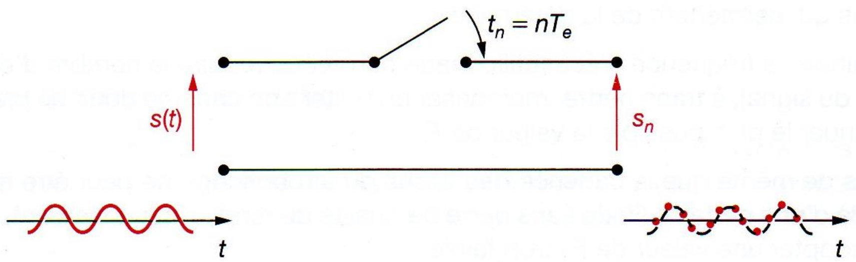
$$\boxed{f_e > 2\,f}$$

- On retient qu'au cours de l'expérience 3, la fréquence apparente du segment tournant était $f_e - f$ (voir plus loin pour l'interprétation par rapport au repliement du spectre).

III) Echantillonnage :

1) Opération d'échantillonnage :

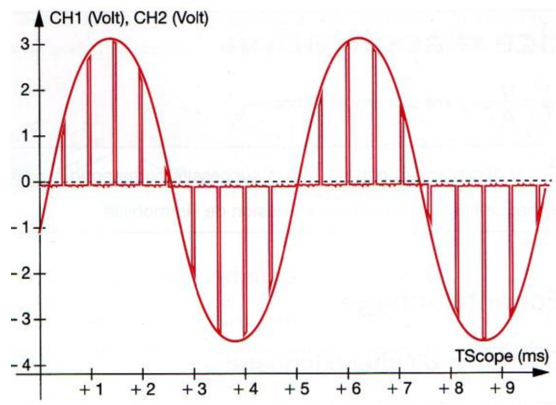
S'inspirant de l'exemple de stroboscopie précédent, qui permet de rendre compte d'un mouvement à partir d'une succession d'images, on échantillonne un signal analogique s(t) en prélevant sa valeur à intervalle de temps régulier. On définit alors la période d'échantillonnage T_e et une suite d'instants $t_n = n\,T_e$, où n est un entier. La valeur de l'échantillon s_n correspond à : $s_n = s(t_n) = s(n\,T_e)$.



Expérimentalement, on peut simuler cette opération à l'aide de deux générateurs de signaux, créant un signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega\, t + \varphi)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et un signal p(t) formé d'impulsions périodiques de période T_e inférieure à T. Un circuit multiplieur analogique permet d'effectuer à chaque instant t le produit $s_e(t) = k\,p(t)\,s(t)$.

En choisissant une amplitude P_m de p(t) telle que $k\,P_m = 1$, la multiplication de ces signaux engendre un signal $s_e(t)$:
- identique à s(t) aux instants où l'impulsion est présente ;
- nul sinon.

Dans l'exemple illustré ici, $T \approx 5$ ms et $T_e \approx \frac{T}{10}$.



2) Importance du choix de la fréquence d'échantillonnage :

La fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$, nombre d'échantillons prélevés par unité de temps, correspond à la cadence des flashs du stroboscope. On s'intéresse aux critères qui permettent de la déterminer.

- Diminuer la fréquence d'échantillonnage permet de réduire le nombre d'échantillons du signal, à transmettre, mémoriser ou traiter : on cherche donc en pratique à diminuer le plus possible la valeur de f_e.
- Mais de même que la cadence des flashs du stroboscope ne peut être réduite au-delà d'une certaine limite sans perte de qualité du rendu du mouvement, on ne peut adopter une valeur de f_e trop faible. On conçoit qualitativement que la fréquence d'échantillonnage doit être suffisamment élevée pour que le signal échantillonné reflète convenablement les variations du signal analogique initial.

Le choix de cette limite inférieure, qui dépend des propriétés du signal traité, fait l'objet de l'approche expérimentale qui suit.

3) Expériences : influence de la fréquence d'échantillonnage sur l'acquisition d'une sinusoïde :

Grâce à un GBF, envoyer un signal sinusoïdal de fréquence 1000 Hz sur la carte d'acquisition de l'ordinateur. Avec Latispro, enregistrer le signal sur quinze périodes (donc la durée totale d'acquisition est τ = 15 ms). Dessiner ce que l'on observe pour une fréquence d'échantillonnage f_e égale à :

<u>1^{er} cas</u> : f_e = 100 kHz (donc nombre total de points = N = $\frac{\tau}{T_e} = \tau f_e$ = 1500)

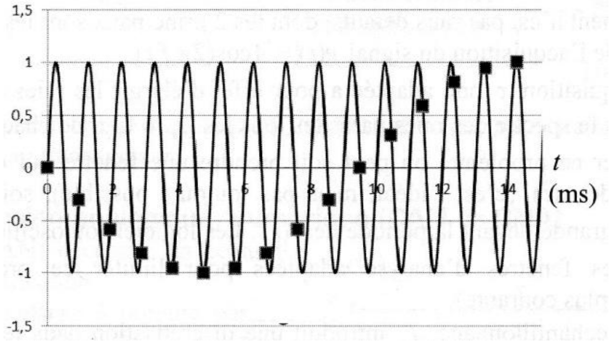
<u>2^{ème} cas</u> : f_e = 5000 Hz (donc nombre total de points = N = $\frac{\tau}{T_e} = \tau f_e$ = 75)

<u>3^{ème} cas</u> : f_e = 2000 Hz (donc nombre total de points = N = $\frac{\tau}{T_e} = \tau f_e$ = 30)

<u>4^{ème} cas</u> : f_e = 1667 Hz (donc nombre total de points = N = $\frac{\tau}{T_e} = \tau f_e$ = 25)

<u>5ème cas</u> : f_e = 1050 Hz (donc nombre total de points = $N = \dfrac{\tau}{T_e} = \tau f_e \approx 16$)

Dans ce cas, on peut comprendre ce que l'on observe grâce au graphe suivant :



<u>6ème cas</u> : f_e = 1000 Hz (donc nombre total de points = $N = \dfrac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 15$)

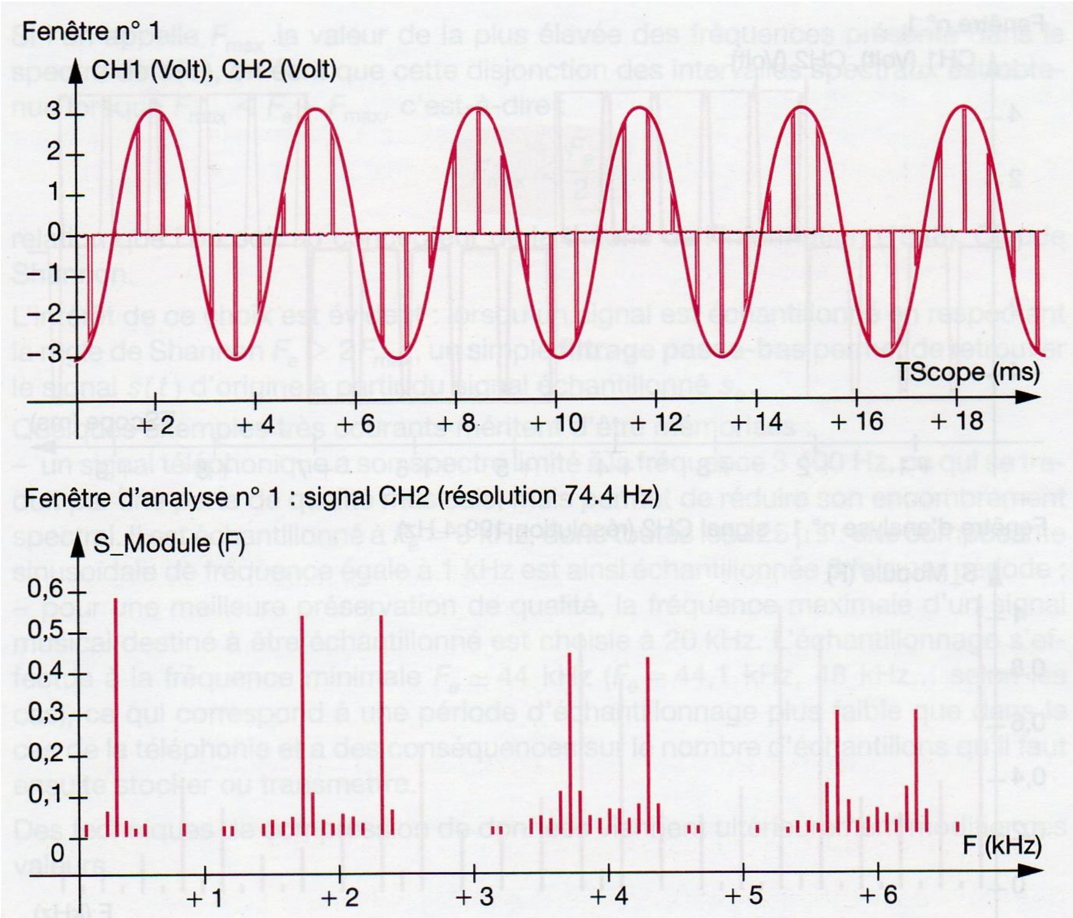
On peut en conclure que pour échantillonner correctement, il faut au minimum deux points de mesure par période, c'est-à-dire que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure au double de la fréquence du signal :

$$\boxed{f_e > 2\,f}$$

4) Fréquence d'échantillonnage et spectre du signal échantillonné :

Suite à la conversion analogique numérique, la tension est à présent enregistrée sous forme de suite de valeurs numériques. Un calcul numérique permet d'obtenir le spectre. Les logiciels utilisent souvent un algorithme appelé FFT (« Fast Fourier Transform »).

Les oscillogrammes de la figure suivante (fenêtre supérieure) correspondent à un signal s(t) sinusoïdal de fréquence f = 300 Hz, c'est-à-dire de période T ≈ 3,3 ms, découpé par un signal impulsionnel de fréquence f_e = 2 kHz, soit T_e ≈ 0,5 ms. Le spectre du signal produit $s_e(t)$ est représenté dans la fenêtre inférieure.
On constate qu'il s'agit d'un spectre formé de raies :
- l'une de fréquence 300 Hz, identique à la fréquence f de s(t) ;
- les suivantes de fréquences 1700 Hz et 2300 Hz, c'est-à-dire $f_e - f$ et $f_e + f$;
- d'autres encore autour des multiples de la fréquence f_e : $(k\,f_e - f)$ et $(k\,f_e + f)$ avec k entier.
Les petites raies spectrales visibles autour des raies principales précédentes sont des artefacts, c'est-à-dire qu'elles sont produites par des imperfections dues à la numérisation et au traitement.



5) Expériences : influence de la fréquence d'échantillonnage sur le spectre de fréquence d'une sinusoïde :

Grâce à un GBF, envoyer un signal sinusoïdal de fréquence 1000 Hz sur la carte d'acquisition de l'ordinateur. Avec Latispro, enregistrer le signal sur quinze périodes (donc la durée totale d'acquisition est τ = 15 ms). Dessiner le spectre de fréquence observé (et l'interpréter) pour une fréquence d'échantillonnage f_e égale à :

<u>1^{er} cas</u> : f_e = 100 kHz (donc nombre total de points = $N = \dfrac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 1500$)

<u>2^{ème} cas</u> : f_e = 5000 Hz (donc nombre total de points = $N = \dfrac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 75$)

3ème cas : f_e = 2000 Hz (donc nombre total de points = $N = \dfrac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 30$)

4ème cas : f_e = 1667 Hz (donc nombre total de points = $N = \dfrac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 25$)

5ème cas : f_e = 1050 Hz (donc nombre total de points = $N = \dfrac{\tau}{T_e} = \tau f_e \approx 16$)

6ème cas : f_e = 1000 Hz (donc nombre total de points = $N = \dfrac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 15$)

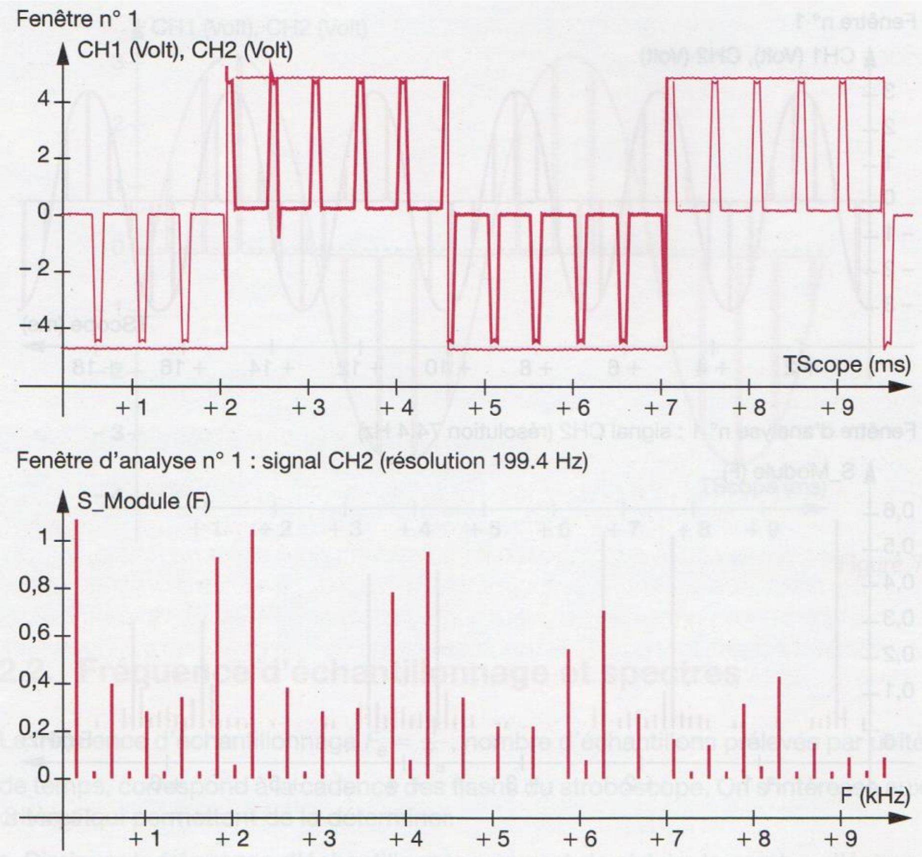
6) Signal s(t) polychromatique :

Lorsque le signal s(t) n'est plus sinusoïdal, son spectre ne se limite plus à une raie unique, il contient des harmoniques. Les courbes suivantes correspondent à un signal s(t) de forme carrée et de fréquence f = 200 Hz, échantillonné à la fréquence $f_e \approx 2$ kHz.
On remarque dans le spectre du signal s_e la présence :
- d'une raie spectrale à la fréquence f = 200 Hz, le fondamental ;
- de raies spectrales aux fréquences ($k f_e - f$) et ($k f_e + f$) avec k entier, dues à l'échantillonnage, ce qui correspond à ce que le cas du signal sinusoïdal a mis en évidence ci-dessus.

Mais de nouvelles raies sont apparues :
- une raie spectrale à la fréquence 3f = 600 Hz (harmonique de rang 3 de s(t)) ;
- les raies correspondantes, aux fréquences ($k f_e - 3f$) et ($k f_e + 3f$) avec k entier, qui sont dues à l'échantillonnage ;

- mais également une raie à la fréquence 5f = 1000 Hz, dont on ne peut dire qu'elle est seulement l'harmonique de rang 5 de s(t), car cette valeur est également (f_e – 5f), celle que l'échantillonnage à la fréquence f_e doit engendrer à partir de 5f.

Le même phénomène s'observe autour des multiples k f_e.

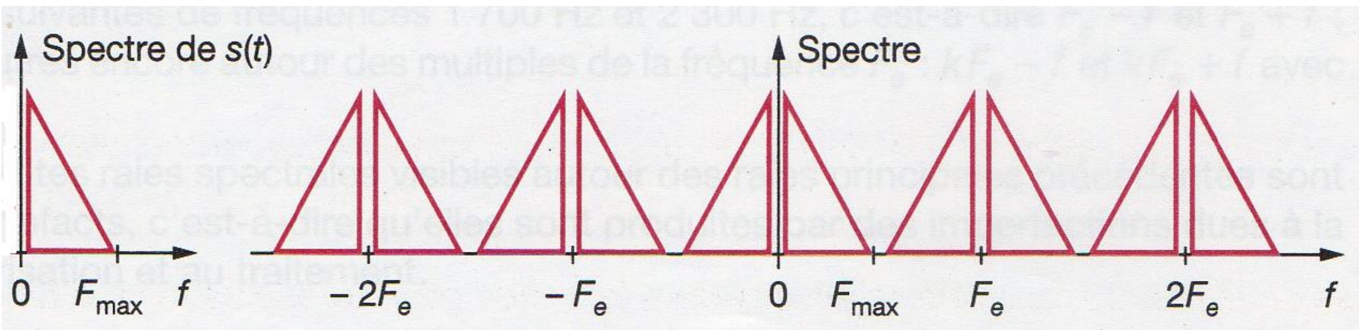


7) Fréquence d'échantillonnage minimale, condition de Nyquist – Shannon :

Les observations précédentes permettent d'entrevoir une propriété générale des spectres des signaux échantillonnés :

Le spectre d'un signal périodique s(t) échantillonné à la fréquence f_e comprend :
- des raies spectrales qui correspondent au fondamental et aux harmoniques du signal s(t) ;
- des raies spectrales obtenues par la réplication des raies précédentes autour de la fréquence f_e ;
- des raies situées autour des valeurs multiples de f_e.

En représentant schématiquement le spectre de s(t) comme sur la figure suivante, on peut proposer une allure du spectre du signal échantillonné, dans le cas où la fréquence f_e est suffisamment élevée pour qu'il y ait disjonction du spectre de s(t) et de ses différentes réplications.



Si l'on appelle f_{max} la valeur de la plus élevée des fréquences présente dans le spectre de s(t), on écrit que cette disjonction des intervalles spectraux est obtenue lorsque $f_{max} < f_e - f_{max}$, c'est-à-dire :

$f_e > 2\, f_{max}$ (condition de Nyquist – Shannon)

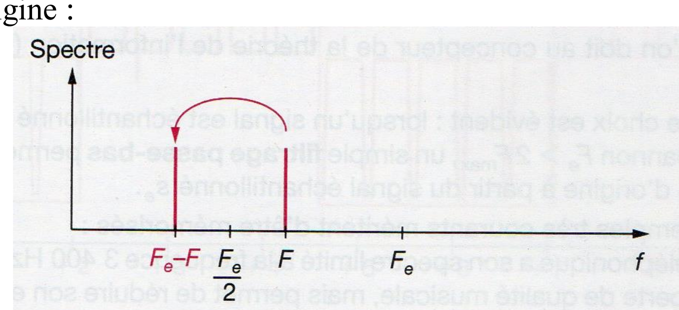
L'intérêt de ce choix est évident : lorsqu'un signal est échantillonné en respectant la condition de Nyquist – Shannon, un simple filtrage passe-bas permet de retrouver le signal s(t) d'origine à partir du signal échantillonné s_e.

Quelques exemples très courants méritent d'être mémorisés :
- un signal téléphonique a son spectre limité à la fréquence 3400 Hz, ce qui se traduit par une perte de qualité musicale, mais permet de réduire son encombrement spectral. Il est échantillonné à $f_e = 8$ kHz, donc toutes les 125 µs : une composante sinusoïdale de fréquence égale à 1 kHz est ainsi échantillonnée 8 fois par période ;
- pour une meilleure préservation de qualité, la fréquence maximale d'un signal musical destiné à être échantillonné est choisie à 20 kHz. L'échantillonnage s'effectue à la fréquence minimale $f_e \approx 44$ kHz ($f_e = 44{,}1$ kHz, 48 kHz… selon les cas), ce qui correspond à une période d'échantillonnage plus faible que dans le cas de la téléphonie et a des conséquences sur le nombre d'échantillons qu'il faut ensuite stocker ou transmettre.

Des techniques de compression de données viennent ultérieurement modifier ces valeurs.

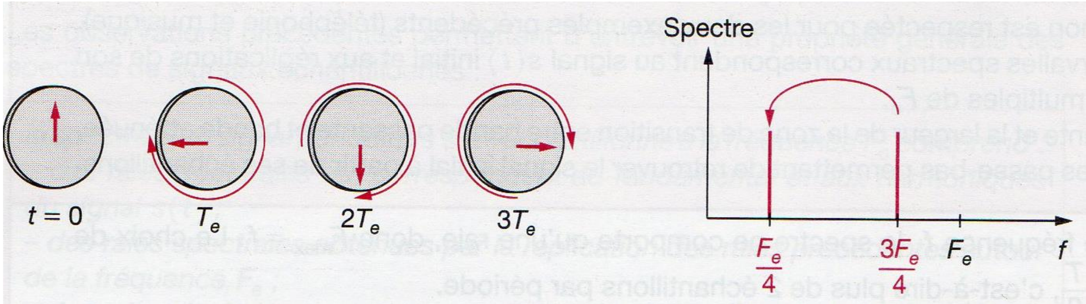
8) Repliement de spectre :

Lorsque la condition de Nyquist – Shannon n'est pas respectée, certaines raies spectrales répliquées autour de la fréquence f_e empiètent sur l'intervalle de fréquence $[0,f_{max}]$ occupé normalement par le spectre du signal s(t) d'origine :

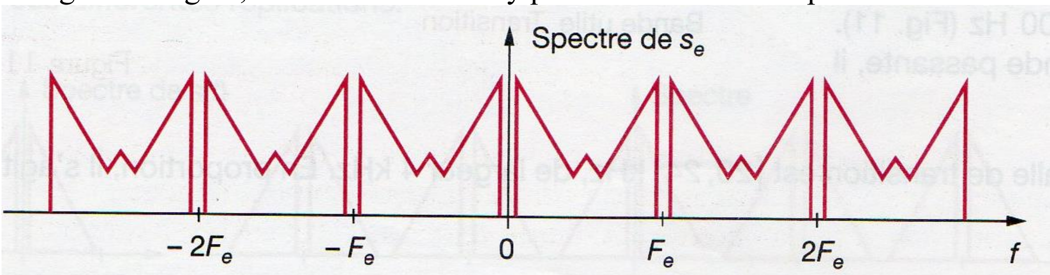


La situation observée pour une seule raie spectrale (signal s(t) sinusoïdal de fréquence f) donne un éclairage tout à fait intéressant sur le phénomène de stroboscopie examiné dans un paragraphe précédent. Revenons sur l'expérience 3 de stroboscopie : si la fréquence du signal est égale aux trois quarts de la fréquence d'échantillonnage ($f = \frac{3}{4} f_e$), la raie repliée, c'est-à-dire celle dont la fréquence est $f_e - f$, a pour valeur : $f_e - f = \frac{1}{4} f_e = \frac{1}{3} f$.

En termes de durées, la période d'échantillonnage est égale aux trois quarts de la période du signal, ce qui correspond, dans l'expérience de stroboscopie, à un flash qui survient tous les trois quarts de tour (cf figure). Il faut donc 4 flashs pour que le mouvement apparent effectue un tour, ce qui correspond à une vitesse, exprimée en nombre de tours par seconde, égale à $\frac{1}{4} f_e$. Il s'agit bien de la fréquence de la raie repliée.



En reprenant la problématique de l'échantillonnage d'un signal, dans la représentation schématique d'un spectre de s(t) occupant l'intervalle $[0,f_{max}]$, il apparaît qu'un filtrage passe-bas ne permet pas de reconstituer le signal d'origine, si la condition de Nyquist – Shannon n'est pas vérifiée.



Le repliement de spectre, dû au non-respect de la condition de Nyquist – Shannon, se traduit par une perte d'information sur le signal d'origine.

IV) Analyse spectrale numérique :

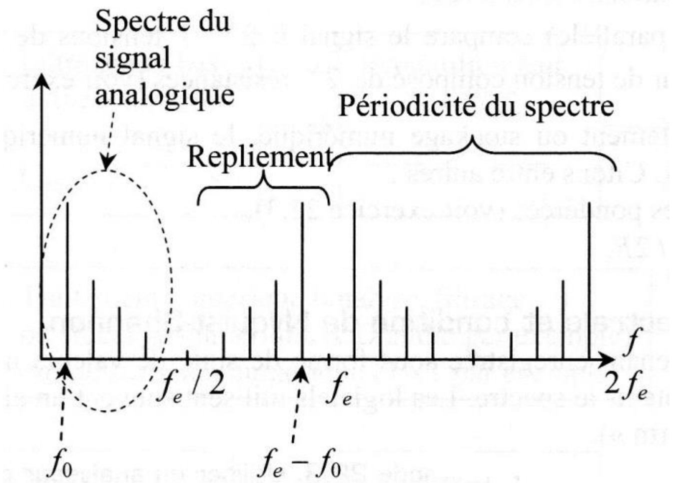
1) Choix des paramètres (durée d'acquisition, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique :

Suite à la conversion analogique numérique, la tension est à présent enregistrée sous forme de suite de valeurs numériques. Un calcul numérique permet d'obtenir le spectre. Les logiciels utilisent souvent un algorithme appelé FFT (« Fast Fourier Transform »).

Toutefois, ce traitement n'est pas sans défauts, dont les deux principaux sont les suivants.
Prenons l'exemple de l'acquisition d'un signal s(t) sinusoïdal à la fréquence f.

- Une durée d'acquisition τ non adaptée a pour effet d'élargir les raies du spectre, voire de faire apparaître dans le spectre des raies parasites tous les $f_p = \frac{1}{\tau}$ de chaque côté de f. Pour remédier ou atténuer ce problème, on peut soit prendre une fenêtre qui contient un nombre entier de périodes de s(t) (c'est l'idéal, mais pas toujours possible), soit choisir une durée d'acquisition assez grande devant la période de s(t). Les logiciels ou oscilloscopes numériques proposent aussi des fenêtres d'analyse adaptées pour limiter ce problème (la fenêtre « Hamming » est la plus courante).
- La fréquence d'échantillonnage f_e introduit une discrétisation dans le domaine temporel, qui se traduit par une périodicité f_e dans le domaine fréquentiel.
  Nous avons vu dans le chapitre E1 qu'un signal périodique temporellement de période T se décompose en une somme discrète de termes dans le domaine fréquentiel (série de Fourier). Le spectre se présente avec des raies de fréquences multiples de $f = \frac{1}{T}$. L'inverse est valable également : une discrétisation avec une durée d'échantillonnage T_e dans le domaine temporel donne une périodicité $f_e = \frac{1}{T_e}$ dans le domaine fréquentiel.

Il y a dualité entre domaines temporel et fréquentiel : une discrétisation x dans un domaine donne une périodicité $\frac{1}{x}$ dans l'autre domaine, et réciproquement.
A cette périodicité du spectre s'ajoute un repliement de spectre : tout signal de fréquence f échantillonné à la fréquence f_e fait aussi apparaître une raie à la fréquence $(f_e - f)$.
Si le signal comporte une fréquence supérieure à $\frac{f_e}{2}$, celui-ci fait apparaître une fréquence égale à $(f_e - f)$ qui est inférieure à $\frac{f_e}{2}$. On ne peut alors plus distinguer les fréquences réelles du signal des répliques apparues par repliement de spectre !



Il est donc indispensable de ne traiter que des signaux ne comportant pas de fréquences supérieures à $\frac{f_e}{2}$: c'est le théorème d'échantillonnage de Nyquist – Shannon.

Afin de respecter la condition de Nyquist – Shannon, on cherche donc à augmenter la fréquence d'échantillonnage, de sorte à avoir 2 points minimum par période de la plus haute fréquence du signal traité. Toutefois, si ce signal contient beaucoup d'harmoniques (créneau par exemple), le critère de Nyquist – Shannon peut ne pas être respecté pour les harmoniques élevés, ce qui parasitera le signal par des fréquences non souhaitées dues au repliement de spectre. Il est alors nécessaire de placer un filtre passe-bas anti-repliement en amont de l'échantillonneur pour supprimer les fréquences supérieures à $\frac{f_e}{2}$. Il y a alors perte des informations contenues dans ces fréquences filtrées.

Par contre, si l'on augmente la fréquence d'échantillonnage à nombre de points N constants, cela diminue la durée d'acquisition. Or la durée d'acquisition doit rester supérieure à la période du fondamental du signal. L'idéal est donc d'avoir un très grand nombre de points, ce qui augmente sensiblement le temps de calcul de la FFT (logiciels ou oscilloscopes limités en nombre de points). Il faut trouver un compromis.

2) Expériences : optimisation de la résolution spectrale :

Dans la fenêtre de dialogue « analyse de Fourier », menu « avancé », « sélection de périodes », on peut choisir « manuelle » ou « automatique ».
Par défaut (et donc auparavant dans le TP), Latispro se met en « automatique », c'est-à-dire qu'il choisit par défaut un nombre entier de périodes, et le plus grand possible.

1ère expérience : durée d'acquisition trop faible
Grâce à un GBF, envoyer un signal sinusoïdal de fréquence f = 1000 Hz sur la carte d'acquisition de l'ordinateur. Avec Latispro, enregistrer le signal sur trois quarts de période (donc la durée totale

d'acquisition est τ = 0,75 ms). Dessiner le spectre de fréquence observé pour une fréquence d'échantillonnage f_e = 100 kHz (donc nombre total de points = N = $\frac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 75$). Conclure.

2ème expérience : influence de la fréquence d'échantillonnage

A présent, enregistrer le signal sinusoïdal de fréquence f = 1000 Hz sur une période (donc la durée totale d'acquisition est τ = 1 ms). Dessiner le spectre de fréquence observé pour une fréquence d'échantillonnage f_e égale à :

1er cas : f_e = 100 kHz (donc nombre total de points = N = $\frac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 100$)

2ème cas : f_e = 10000 Hz (donc nombre total de points = N = $\frac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 10$)

Conclure.

3ème expérience : importance de l'acquisition sur un nombre entier de période

A présent, enregistrer le signal sinusoïdal de fréquence f = 1000 Hz sur 1,5 périodes (donc la durée totale d'acquisition est τ = 1,5 ms). Dessiner le spectre de fréquence observé pour une fréquence d'échantillonnage f_e = 100 kHz (donc nombre total de points = N = $\frac{\tau}{T_e} = \tau f_e = 150$).

1er cas : on « laisse faire » Latispro (« automatique » dans « sélection de périodes ») : il « travaille » donc sur une période.

2ème cas : on choisit « manuelle » dans « sélection de périodes », et on laisse la sélection sur la totalité.

Conclure.

4ème expérience :
A présent, enregistrer le signal sinusoïdal de fréquence f = 1000 Hz sur x périodes (donc la durée totale d'acquisition est τ = x ms). Dessiner le spectre de fréquence observé pour une fréquence d'échantillonnage f_e = 100 kHz (donc nombre total de points = N = $\frac{\tau}{T_e} = \tau f_e$ = 100 x).

1er cas : x = 1,5

2ème cas : x = 9,5

Conclure.

A partir de vos observations, donner l'influence de la durée totale d'acquisition, ainsi que l'influence de la fréquence d'échantillonnage, sur la résolution spectrale et sur l'amplitude des raies parasites qui apparaissent de chaque côté de la fréquence f.

3) Expérience : visualisation du spectre d'une tension créneau :

On souhaite visualiser le spectre d'une tension créneau de fréquence 1000 Hz. Proposer les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist – Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
Réaliser l'expérience.
Proposer également des paramètres qui permettent de mettre en évidence le repliement de spectre.