



Electromagnétisme

Chapitre 3 : Théorème de Gauss

Sommaire

	Page
1 Flux du champ électrostatique - Théorème de Gauss	1
1.1 Orientation d'une surface	1
1.2 Flux élémentaire du champ à travers une surface élémentaire	2
1.3 Flux du champ à travers une surface finie	2
1.4 Théorème de GAUSS	2
2 Exemples de calcul de champ à l'aide du théorème de Gauss	3
2.1 Méthode générale	3
2.2 Boule uniformément chargée	3
2.3 Fil infini uniformément chargé	4
2.4 Plan infini uniformément chargé	5
3 Analogie avec la gravitation	5
3.1 Théorème de GAUSS appliqué à la gravitation	5
3.2 Exemple : champ de gravitation créé par une distribution sphérique de masse	6

Calculer le champ électrostatique à partir de son expression intégrale est souvent compliqué. On introduit dans ce chapitre le Théorème de GAUSS, qui traduit une propriété fondamentale du champ, et qui se révèle être un outil puissant pour calculer le champ dans le cas de distributions de charge à caractère hautement symétrique.

1 Flux du champ électrostatique - Théorème de Gauss

1.1 Orientation d'une surface

On rappelle qu'une surface finie peut être découpée en une multitude de surfaces élémentaires. Chaque surface élémentaire est infiniment petite et peut être assimilée à son plan tangent. Par conséquent, toutes les surfaces élémentaires sont des plans.

Une surface élémentaire est dite orientée lorsque l'on choisit conventionnellement d'orienter son vecteur normal. L'écriture suivante n'a de signification précise que si l'on a au préalable orienté le vecteur $\mathbf{n}$ sur un schéma :

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{n} \quad (1)$$

où dS est l'aire élémentaire.

On rappelle qu'une surface fermée est une surface délimitant un volume. En électromagnétisme, de telles surfaces seront toujours conventionnellement orientées vers l'extérieur.

1.2 Flux élémentaire du champ à travers une surface élémentaire

Flux élémentaire du champ électrostatique :

On définit le flux élémentaire en M $d\phi(M)$ du champ électrostatique $\mathbf{E}(M)$ à travers la surface élémentaire $d\mathbf{S}$ par la relation :

$$d\phi(M) = \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

$d\phi(M)$ s'exprimant en $V \cdot m$.

Remarques :

- Le flux élémentaire est défini à partir d'une surface infiniment petite (élémentaire) : ainsi le champ électrique est uniforme à l'échelle de cette surface élémentaire. Peu importe alors où se trouve le point M sur cette surface.
- Le flux est une grandeur algébrique : son signe indique le sens dans lequel le champ électrique « traverse » la surface élémentaire $d\mathbf{S}$:
 - s'il est positif, alors le champ traverse la surface dans le même sens que $d\mathbf{S}$;
 - s'il est négatif, alors le champ traverse la surface dans le sens opposé à $d\mathbf{S}$.
- La valeur absolue du flux est déterminée par la norme du champ et par l'angle entre le champ et le vecteur $d\mathbf{S}$. Pour une norme donnée du champ, la valeur absolue du flux est maximale quand le champ $\mathbf{E}$ et la surface $d\mathbf{S}$ sont colinéaires, et nulle quand ils sont orthogonaux :
▷

1.3 Flux du champ à travers une surface finie

Flux du champ à travers une surface finie :

Le flux du champ électrique à travers une surface finie S est défini comme la somme des flux élémentaires :

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

Dans le cas d'une surface fermée, la surface est toujours orientée vers l'extérieur, et l'expression :

$$\phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

définit le flux sortant.

Il est indispensable d'avoir repéré la surface sur un schéma pour pouvoir parler de « flux du champ ». Il est préférable dans un premier temps de s'habituer à dire « flux du champ à travers une surface ».

1.4 Théorème de Gauss

Calculons le flux sortant d'une surface sphérique de rayon r enfermant une charge ponctuelle q en O :

▷

La généralisation de ce résultat à toute distribution de charge - que l'on admettra - constitue le théorème de GAUSS :

Théorème de Gauss :

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée S est égal à la charge totale Q_{int} enfermée dans cette surface divisée par ε_0 :

$$\phi = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

Imaginons qu'en un point M de l'espace, le potentiel prenne une valeur maximale. Les lignes de champ étant orientées dans le sens des potentiels décroissants, elles divergent à partir de ce point :

▷

Soit une surface fermée Σ , telle que M lui soit intérieur : les lignes de champ divergeant à partir de M , le flux du champ électrique tend nécessairement vers une valeur strictement positive si l'on fait tendre Σ vers M . D'après le théorème de GAUSS, il existe nécessairement une charge positive ponctuelle en M . On montrerait de la même façon qu'en un point où le potentiel prend une valeur minimale, il existe une charge ponctuelle négative.

Il n'y a pas d'extremum du potentiel électrostatique dans une région vide de charge.

2 Exemples de calcul de champ à l'aide du théorème de Gauss

2.1 Méthode générale

On cherchera généralement à déterminer l'expression du champ électrique en un point M quelconque de l'espace où il est défini. L'utilisation du théorème de GAUSS est préférable si la distribution possède un haut degré de symétrie.

Méthode de calcul du champ à l'aide du théorème de Gauss :

- (i) Après avoir défini un système de coordonnées adapté aux symétries de la distribution de charge, repérer les invariances de la distribution de charge pour déterminer la dépendance du champ par rapport aux coordonnées du point M .
- (ii) Repérer les symétries (ou antisymétries) planes de la distribution de charge pour déterminer la direction du champ électrique au point M . Ces plans doivent contenir le point M .
- (iii) Définir une « surface de GAUSS », passant par le point M , et sur laquelle le champ électrique est uniforme (si possible).
- (iv) Appliquer alors le théorème de GAUSS. Grâce aux étapes précédentes, le calcul du flux (intégrale double) est généralement très simple si la distribution de charge est à haut degré de symétrie.

2.2 Boule uniformément chargée

On considère une sphère de rayon R et de centre O , à l'intérieur de laquelle existe une densité volumique uniforme de charge ρ . Déterminons le champ et le potentiel en un point quelconque M :

▷

Le champ à l'extérieur peut s'exprimer simplement à partir de la charge Q de la boule :

▷

Ce résultat ne fait pas intervenir la forme précise de la distribution. Il peut se généraliser à toute distribution à symétrie sphérique :

A l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.

2.3 Fil infini uniformément chargé

On considère un fil infini de densité linéique uniforme λ_0 . Déterminons le champ et le potentiel en un point quelconque M .

▷

2.4 Plan infini uniformément chargé

On considère un plan infini de densité surfacique uniforme σ_0 . Déterminons le champ et le potentiel en un point quelconque M .

▷

L'expression du champ $\mathbf{E}$ permet d'étudier un condensateur plan, en le modélisant comme la superposition de deux distributions surfaciques infinies, de charges opposées. Etablissons l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide :

▷

3 Analogie avec la gravitation

3.1 Théorème de Gauss appliqué à la gravitation

Le champ gravitationnel est aussi un champ « en $\frac{e_g}{r^2}$ ». Le théorème de GAUSS est donc aussi valable pour le champ gravitationnel. Par analogie avec l'électrostatique, donnons l'énoncé du théorème de GAUSS appliqué à la gravitation :

▷

Théorème de Gauss appliqué à la gravitation :

Le flux du champ gravitationnel sortant d'une surface fermée S est égal à la masse totale m_{int} enfermée dans cette surface multipliée par $4\pi\mathcal{G}$:

$$\Phi = \oiint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\mathcal{G}m_{int} \quad (6)$$

3.2 Exemple : champ de gravitation créé par une distribution sphérique de masse

Soit une sphère de centre O de masse uniformément répartie en volume, de densité ρ , et de rayon R . Calculer le champ gravitationnel créé en un point $M(r, \theta, \phi)$ par cette distribution de masse.

▷