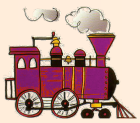


Thermodynamique et mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques

Chapitre 1 : Statique des fluides

Sommaire

Page

1 Description d'un fluide

1.1 Définition d'un fluide

Fluide :

Un *fluide* est un système macroscopique libre de s'écouler du fait du peu d'adhérence entre elles des entités microscopiques qui le composent (atomes, molécules, ...).

En pratique, la notion de fluide regroupe les liquides et les gaz.

Contrairement aux solides, les fluides ne possèdent donc pas de forme propre : ils épousent la forme du récipient qui les contient. Les liquides possèdent un volume propre, indépendant du volume du récipient. Les gaz n'ont pas de volume propre, ils occupent tout l'espace disponible d'un récipient fermé.

1.2 Les différentes échelles de description

- Echelle microscopique Décrire la matière comme constituée de particules réparties de manière discrète revient à se placer à l'*échelle microscopique*, caractérisée par la distance λ entre les particules, de l'ordre du nanomètre.

- Echelle macroscopique L'échelle macroscopique est définie par la dimension L caractéristique du système étudié dans son ensemble : de l'ordre du centimètre pour l'étude d'un gaz dans une bouteille, de l'ordre du kilomètre pour l'étude de l'atmosphère.

  A l'échelle macroscopique, la matière apparaît comme continue [1].

- Echelle mésoscopique - Particule de fluide Cette échelle est caractérisée par une longueur l intermédiaire entre l'échelle macroscopique L et l'échelle microscopique λ. Un volume l^3 à l'échelle mésoscopique est considéré comme :

  — microscopiquement grand ($l^3 \gg \lambda^3$), de façon à ce qu'il contiennent un grand nombre de particules microscopiques, de sorte que la notion de moyenne ait un sens ;
  — macroscopiquement petit ($l^3 \ll L^3$), de façon à ce qu'il puisse être considéré comme ponctuel à l'échelle d'observation du système.

  L'échelle mésoscopique est donc telle que :

  $$\lambda \ll l \ll L \tag{1}$$

  L'échelle mésoscopique permet de définir des grandeurs **locales** et **continues** : pression, température, masse volumique, ... C'est cette échelle que l'on utilisera pour décrire les fluides, en utilisant le concept de *particule de fluide* :

Particule de fluide :

Une particule de fluide est un élément de volume de fluide $d\tau$ de dimension mésoscopique (de l'ordre de 0,1 um^3).

Le vecteur vitesse d'une particule de fluide est la moyenne statistique des vecteurs vitesses des entités qui la constituent. Le mouvement du fluide dans un référentiel $(\mathcal{R})$ est alors décrit par l'ensemble des vecteurs vitesses de ses particules de fluides.

1.3 Forces volumiques, forces surfaciques

Parmi les actions extérieures subies par une partie quelconque d'un fluide, il faut distinguer :

- les forces volumiques qui décrivent des interactions à longue portée (comme par exemple la pesanteur) la force $\mathbf{dF_v}$ subie par une particule de fluide est proportionnelle à $d\tau$ ce qui permet de définir une densité volumique de force :

  $$\mathbf{f_v} = \frac{\mathbf{dF_V}}{d\tau} \tag{2}$$

  Par exemple, la force volumique de pesanteur s'exprime de la façon suivante :

1. Les seules discontinuités que l'on peut rencontrer sont à des interfaces entre des phases différentes : interface eau liquide - vapeur d'eau par exemple

▷

- les forces surfaciques qui décrivent des interactions à courte portée : chocs et interactions moléculaires. En un point M du volume V, il existe une composante normale et une composante tangentielle :

  - La composante normale peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{dF} = -P(M)\mathbf{dS} \tag{3}$$

    Cette relation définit la pression du fluide en M. Le vecteur $\mathbf{dS}$ est le vecteur surface élémentaire orientée vers l'extérieur.

    Interprétation du signe - : les forces de pression exercées par l'extérieur sont toujours des forces pressantes. Elles sont donc opposées à $\mathbf{dS}$.

    P s'exprime en Pascal (Pa). La relation (3) montre que $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N\cdot m^{-2}}$. D'autres unités de pression sont aussi utilisées : le bar (bar) : $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$, l'atmosphère (atm) : $1\,\mathrm{atm} = 1{,}013\,\mathrm{bar}$ et le millimètre de mercure (mmHg) : $780\,\mathrm{mmHg} = 1\,\mathrm{bar}$.

  - La composante tangentielle traduit le phénomène de viscosité que nous étudierons dans un chapitre ultérieur. En statique des fluides, la composante tangentielle des forces surfaciques est toujours nulle.

1.4 Equivalent volumique des forces de pression

Considèrons une particule de fluide parallélépipédique située en $M(x, y, z)$ de dimensions dx, dy, dz et calculons la résultante des forces de pression qui s'exercent sur cette particule :

▷

Equivalent volumique des forces de pression :

La résultante des forces de pressions qui s'exercent sur une particule de fluide est équivalente à une force de densité volumique

$$\frac{\mathbf{dF}}{\mathrm{d}\tau} = -\boldsymbol{\nabla} P \tag{4}$$

Remarque : On admettra la validité de cette expression dans le cas d'un fluide en mouvement.

1.5 Relation fondamentale de la statique des fluides

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$, immobile par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soumise aux forces volumiques de densité $\mathbf{f_v}\mathrm{d}\tau$ et aux forces de pression dont la résultante est caractérisée par la densité volumique $\mathbf{df_p}$:

▷

Relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\boldsymbol{\nabla} P = \mathbf{f_v} \tag{5}$$

Lorsque la particule de fluide est soumise à un champ de pesanteur uniforme, la condition d'équilibre devient :

▷

Statique des fluides dans un champ de pesanteur uniforme :

Le champ de pesanteur étant vertical, on en déduit que la pression ne dépend que de la coordonnées verticale z :

- si Oz est vertical ascendant :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g} \tag{6}$$

- si Oz est vertical descendant :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho g} \tag{7}$$

Le calcul de la pression au sein d'un fluide nécessite la connaissance de la loi de variation de la masse volumique ρ du fluide en fonction de la profondeur (ou de l'altitude).

2 Statique des fluides incompressibles et homogènes dans le champ de pesanteur uniforme

2.1 Définition d'un fluide incompressible et homogène

Fluide incompressible :

Un fluide est dit *incompressible* si son volume ne varie pas sous l'effet d'une variation de pression. C'est une approximation adaptée à l'étude des liquides dans les conditions usuelles.

Fluide homogène :

Un fluide est dit *homogène* si sa masse volumique ρ est uniforme : $\rho = cte$.

2.2 Evolution de la pression avec la hauteur de liquide

▷

Evolution de la pression avec l'altitude :

La relation fondamentale de la statique des fluides appliquée aux fluides incompressibles et homogènes s'écrit :

$$P + \rho g z = cte \tag{8}$$

si Oz est vertical ascendant.

Considérons deux points A et B d'altitude z_A et z_B ($z_A > z_B$, Oz étant choisi vertical ascendant). Exprimons la pression du point B en fonction du point A :

▷

Différence de pression en fonction de la hauteur :

La relation de la statique des fluides pour un fluide incompressible et homogène peut s'écrire :

$$P_B = P_A + \rho g h \tag{9}$$

où $h > 0$ est la hauteur de liquide entre le point inférieur B et le point supérieur A.

A.N. : dans le cas de l'eau, calculons l'augmentation de pression due à une variation de profondeur de $10\,\mathrm{m}$:

▷

Problèmes rencontrés lors de la plongés sous-marine avec des bouteilles d'air comprimé. La loi de Henry indique que la quantité d'air dissoute dans le corps humain est proportionnelle à la pression. À $100\,\mathrm{m}$ de profondeur, le corps humain dissout donc 11 fois plus d'air qu'à la surface. 11 fois plus de diazote (N_2) n'est pas consommé et reste stocké dans les tissus humains. Lors d'une remontée trop rapide, le diazote en excès n'a pas le temps d'être évacué et se dégage brutalement des tissus en formant un grand nombre de bulles d'où les risques d'embolie. Il faut donc remonter par paliers en laissant le temps au diazote de se dégager.

2.3 Surface libre d'un liquide - Principe des vases communiquants

Surface libre d'un liquide :

On appelle *surface libre* d'un liquide la surface de contact entre le liquide et l'atmosphère.

L'élément de surface $\mathrm{d}S$ associé à un point M de la surface est en équilibre. Les forces de pression se compensent donc :

$$P_0 \mathrm{d}S = P_M \mathrm{d}S \tag{10}$$

soit :

$$P_M = P_0 \tag{11}$$

En tout point de la surface libre, la pression est la même de part et d'autre de la surface :

$$P_M = P_0 \tag{12}$$

Cette remarque se généralise à toutes les interfaces séparant deux fluides : la pression est une fonction continue de l'espace.

▷

La surface libre d'un liquide est contenue dans un plan horizontal

On appelle cela le principe des vases communicants. Cette propriété se généralise au cas de plusieurs vases de forme et de hauteur différente, reliés à leur base par un tuyau permettant les échanges de fluide entre chacun des vases :

Figure 1 – Vases communicants

Remarque (complément) : On constate que le niveau dans les tubes fins est un peu plus haut. La surface libre du liquide n'est alors pas contenue dans un plan horizontal. Cela est dû au phénomène de tension superficielle qui explique également la formation des gouttes et des ménisques de liquide :

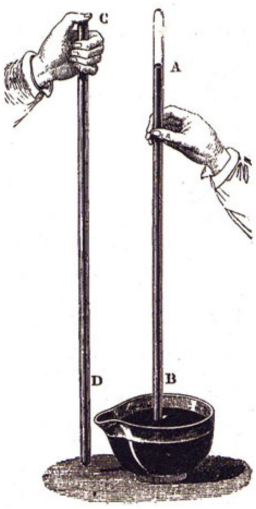
(a) Gouttes d'eau

(b) Déformation de la surface libre d'un verre rempli d'eau

(c) Phénomène de capillarité à l'intérieur de tubes fins

FIGURE 2 – Exemples de phénomènes de tension superficielle

2.4 Application : mesures de pression, expérience de Toricelli



La première mesure de la pression atmosphérique a été réalisée par TORRICELLI (1608 - 1647), secrétaire et assistant de GALILÉE. L'expérience consiste à remplir un tube de mercure sur une hauteur de 1 m. Renversé sur la cuve à mercure, voici ce que l'on observe :

- un vide apparent se forme dans le haut du tube (en réalité, le tube n'est pas vide mais occupé par du mercure gazeux. Sa pression est égal à la pression de vapeur saturante. A 20 °C, $P_{v,sat} \simeq 1{,}62 \times 10^{-6}$ bar) ;
- que la hauteur de mercure est toujours la même et vaut de l'ordre de 76 cm (de mercure).

Le mercure est maintenu dans le tube en raison de la force de pression exercée par l'atmosphère. Vérifier par le calcul la hauteur de la colonne de mercure attendue sous une pression de 1 bar (masse volumique du mercure : $\rho \simeq 13{,}6 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$).

▷

2.5 Application : théorème de Pascal, principe de la presse hydraulique

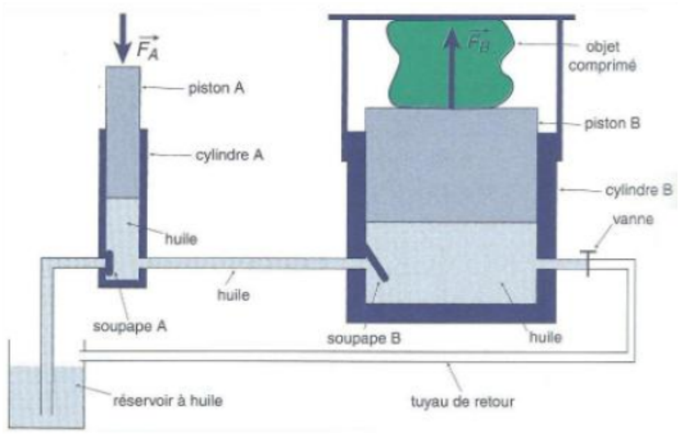
On considère un point A et un point M d'un liquide supposé homogène et incompressible soumis à une augmentation de pression au point A.

▷

Théorème de Pascal :

Toute variation de pression en un point d'un fluide homogène et incompressible se répercute en tout point du fluide :

$$\Delta P_A = \Delta P_M \tag{16}$$



La force $\mathbf{F_A}$ provoque l'enfoncement du piston A qui augmente la pression exercée dans le cylindre A. Cette variation de pression est transmise au cylindre B par l'intermédiaire du liquide qui exerce une force $\mathbf{F_B}$

En notant S_A et S_B les surfaces des deux cylindres, l'application du théorème de PASCAL conduit à :

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{S_B}{S_A} \tag{17}$$

Le rapport des forces exercées est égal au rapport des surfaces des deux cylindres.

Lors de cette opération, la soupape A est fermée et la soupape B est ouverte. Le piston B est soulevé sous l'effet de la force exercée. Quand on remonte le piston A, la soupape B se ferme, tandis que la soupape A s'ouvre. Le liquide du réservoir monte dans le cylindre A et l'on peut continuer d'utiliser la presse. Lorsque le piston B a atteint un niveau suffisant, on le fait redescendre en ouvrant la vanne qui permet le retour de l'huile dans le réservoir.

3 Statique des fluides compressibles : application à l'étude de l'atmosphère

3.1 Modèle de l'atmosphère isotherme

Comme précédemment, on suppose que la pesanteur est uniforme. Même en considérant un système aussi étendu que l'atmosphère, cette hypothèse reste valable compte tenu de la faible variation du champ de pesanteur à cette échelle (cf. cours de mécanique de sup).

L'air n'est pas un corps pur. Il est principalement composé de 80% de diazote et de 20% de dioxygène. Cette composition est homogène dans toute l'atmosphère. On choisit de modéliser l'air atmosphérique par un gaz parfait. Sa masse molaire M est égale à la moyenne des masses molaires du diazote et du dioxygène :

▷

Exprimons la masse volumique ρ d'une particule de fluide en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits :

▷

Pour déterminer le profil vertical de pression dans l'atmosphère, on va compléter la relation fondamentale de la statique des fluides par l'équation d'état du gaz parfait. Mais on introduit alors la température, qui est aussi une fonction de la position a priori. les mesures montrent qu'en moyenne la température décroît avec l'altitude de 2% par km. Ce n'est pas complètement négligeable, surtout à plusieurs kilomètres d'altitude, mais un premier modèle simple de l'atmosphère consiste à considérer la température constante avec l'altitude. C'est le modèle de l'atmosphère isotherme.

3.2 Profil vertical de pression de l'atmosphère isotherme

Déterminons le profil vertical de pression $P(z)$, en fonction de M, g, R, T et P_0 la pression au niveau du sol :

▷

Calculons la hauteur caractéristique δ du profil de pression (en prenant $T \simeq 280\,\mathrm{K}$) :

▷

Application : à partir de quelle hauteur h la pression atmosphérique diminue-t-elle de 1% (en partant du sol) ?

▷

3.3 (Complément) Distribution des molécules avec l'altitude – Facteur de Boltzmann

De l'équation (18), on peut déduire immédiatement le profil de la masse volumique $\rho(z)$:

▷

On va interpréter ce résultat à l'échelle microscopique, en étudiant la distribution en altitude du nombre de molécules par unité de volume (densité particulaire ou densité volumique de particules n^*). On modélise l'air de manière simplifiée, en le supposant constitué d'un seul type de molécule de masse molaire M (et de masse notée m).

De la relation entre la masse volumique et de la densité volumique de particules, on peut déduire l'évolution de la densité particulaire avec l'altitude :

▷

Exprimons le résultat précédent en fonction de l'énergie potentielle de pesanteur E_p d'une molécule d'air :

▷

En interprétant la densité particulaire comme une probabilité pour une molécule de se trouver dans l'état d'énergie E_p, c'est-à-dire d'être à une certaine altitude, on vient d'établir que cette probabilité est proportionnelle au facteur

$$\exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) \tag{19}$$

Ce terme s'appelle le *facteur de* Boltzmann. C'est un terme très important en physique statistique, et son rôle n'est pas limité à l'étude de l'atmosphère isotherme.

On voit que les molécules ont plus tendance à peupler les états de basse énergie, au détriment de ceux de haute énergie. A l'échelle microscopique, ce facteur fait apparaître deux influences opposées :

- le poids tend à ramener toutes les molécules au niveau du sol, et leur faire atteindre ainsi l'état d'énergie potentielle minimale ;

- l'agitation thermique : elle tend à uniformiser la densité particulaire dans toute l'atmosphère.

La distribution résultante est un compromis entre ces deux influences, c'est la signification du facteur de BOLTZMANN. On retrouve ce facteur dans la loi d'ARRHÉNIUS en cinétique chimique, qui traduit l'influence de la température, donc de l'agitation thermique, sur la constante de vitesse (augmentation du nombre de chocs entre réactifs, et plus grande efficacité des chocs). Le facteur de BOLTZMANN permet aussi d'expliquer la largeur des raies du spectre en longueur d'onde d'une lampe spectrale basse pression (cf cours d'optique ondulatoire).

4 Résultante des forces de pression

4.1 Calcul direct par intégration

Considérons une surface S au contact d'un fluide où règne un champ de pression $p(M)$. La résultante des forces de pression, notée $\mathbf{F_p}$, exercées par le fluide sur la surface S est la somme des forces exercées sur chaque surface élémentaire $\mathrm{d}S$:

$$\mathbf{F_p} = \iint_S \mathbf{dF_p} = -\iint_S p(M)\mathbf{dS} \tag{20}$$

Pour comprendre cette écriture :

- le symbole intégrale signifie « somme sur la surface S » ;
- l'intégrale est double car on somme sur une surface (objet bidimensionnel) ;
- les éléments de surface $\mathbf{dS}$ sont centrés sur chacun des points M constituants la surface totale S, et sont orientés dans la direction normale à la surface et vers le fluide ;
- le signe « - » signifie que la force élémentaire $\mathbf{dF_p}$ appliquée au point M est dirigée vers la direction opposée à celle du fluide : les forces de pression sont des forces pressantes.

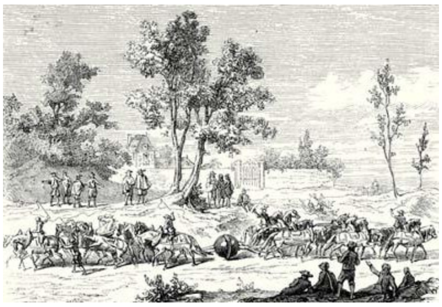
Calcul de la force exercée sur un barrage

On considère un barrage constitué d'une paroi verticale de largeur L. De l'eau, assimilée à un fluide incompressible de masse volumique ρ, s'appuie sur une hauteur H sur une des faces du barrage. La pression atmosphérique P_0 s'exerce sur l'autre face du barrage et sur la surface libre de l'eau. L'axe vertical (Oz) est choisi vertical ascendant et le champ de pesanteur est considéré uniforme. Exprimer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le barrage.

▷

Remarque : Le calcul de la résultante des forces de pression peut parfois être simplifié en étudiant la symétrie du problème : des considérations de symétrie permettent en effet de déterminer à priori la direction de la résultante des forces de pression. Pour déterminer la résultante, il suffit alors de sommer les composantes suivant cette direction des forces élémentaires.

Hémisphères de MAGDEBOURG



Cette expérience a permis de démontrer l'action de la pression atmosphérique. Deux hémisphères creux d'environ soixante centimètres de diamètre furent assemblés pour former une sphère ; l'un des hémisphères était muni d'un tube fermé par une valve et relié à une pompe à vide inventée par OTTO VON GUERICKE, bourgmestre de MAGDEBOURG. L'air contenu dans la sphère put être pompé en créant ainsi un vide. La différence de pression entre l'extérieur et l'intérieur des hémisphères les maintenait ensemble fermement. L'expérience a été réalisée en 1656 avec deux attelages composés chacun de huit chevaux. Les deux hémisphères n'ont pas bougé tant que le vide a été maintenu.

▷

4.2 Résultante des forces de pression sur un corps immergé - Poussée d'Archimède

4.2.1 Théorème d'Archimède

Un corps quelconque immergé dans un fluide subit une force de poussée dirigée verticalement vers le haut : c'est la poussée d'ARCHIMEDE . Cette force de poussée n'est rien d'autre que la résultante des forces de pression exercées par le fluide dans lequel le corps est immergé. Le calcul de cette résultante des forces de pression est généralement difficile à effectuer. Le théorème d'Archimède est un moyen simple et efficace pour déterminer l'intensité de la poussée d'ARCHIMEDE :

Théorème d'Archimède :

Un corps entièrement plongé dans un fluide au repos subit de la part de celui-ci une force appelée poussée d'ARCHIMEDE qui est opposée au poids du volume déplacé :

$$\mathcal{A} = -(\text{masse du volume déplacé}) \times \mathbf{g} \tag{21}$$

Le point d'application de $\mathcal{A}$ est le centre de gravité du fluide déplacé, appelé *centre de poussée.*

Démonstration :

▷

Remarques :

- Etant due à la résultante des forces de pression, la poussée d'Archimede sera négligeable dans le cas d'un fluide où la pression est uniforme à l'échelle du système. La démonstration mathématique du théorème d'Archimede (hors programme) fait en effet intervenir le gradient de pression.

- Le théorème d'Archimede reste valable si le solide est immergé dans deux fluides différents (voir figure 3). Dans ce cas, on considère que le fluide déplacé est constitué de deux parties, séparées par l'interface horizontale entre les deux fluides à l'équilibre :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \tag{22}$$

- Pour que le théorème s'applique il faut
  - qu'il soit possible de remplacer le corps immergé par du fluide immergeant sans rompre l'équilibre, un contre-exemple classique étant le bouchon d'une baignoire remplie d'eau : si celui-ci est remplacé par de l'eau, il est clair que la baignoire se vide et que le fluide n'est alors plus au repos ;
  - que le corps considéré soit immergé dans un ou plusieurs fluides. Le cas où un solide repose au fond d'un récipient sur l'une de ses faces est par conséquent à exclure.

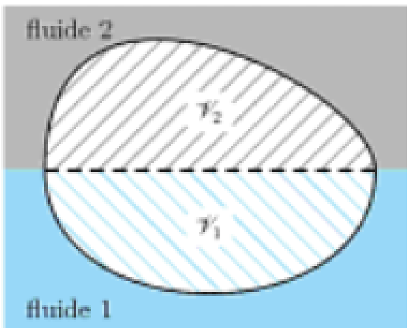


Figure 3 – Equilibre entre deux fluides

4.2.2 Influence de la masse volumique

Montrons par application du PFD qu'un corps immergé monte s'il est moins dense que le fluide et inversement :

▷

4.2.3 Application aux corps flottants

D'une manière générale, un solide dont la masse volumique moyenne est inférieure à celle du liquide, alors ce solide flotte.

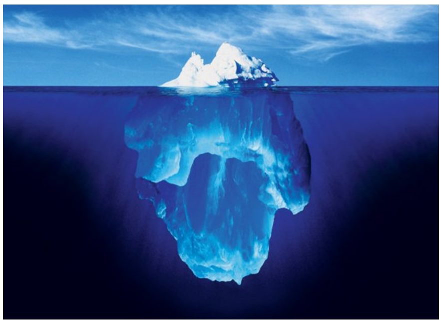
Un bateau flotte et est à l'équilibre lorsque son poids est compensé par la poussée d'ARCHIMEDE . Cela est rendu possible grace à la forme creuse de la coque : le volume d'eau déplacé est très grand, donc la poussée d'ARCHIMEDE exercée par l'eau peut compenser le poids du bateau, même si celui-ci est en acier. La stabilité de l'équilibre du bateau est obtenu naturellement :

- si le bateau s'enfonce, le volume d'eau déplacé augmente et la poussée d'ARCHIMEDE aussi, repoussant le bateau vers le eau ;
- si le bateau sort de l'eau, la poussée d'ARCHIMEDE diminue et le bateau retombe sous l'effet de son poids.

Le bateau est ainsi ramené vers son altitude d'équilibre même s'il subit une perturbation.

Iceberg

On souhaite déterminer le volume immergé d'un iceberg, et le comparer à son volume émergé. On rappelle que la glace flotte car l'eau solide est moins dense que l'eau liquide ($\rho_{glace} \simeq 920\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\rho_{eau} \simeq 1000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$). C'est un cas très particulier, car généralement un corps pur est plus dense sous sa forme solide. La masse volumique de l'air est $\rho_{air} \simeq 1\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.



Déterminer le rapport du volume immergé au volume total.

▷

Remarque :
Lorsqu'un glaçon est mis dans un verre d'eau, le niveau d'eau monte et le glaçon flotte car la masse volumique de la glace est inférieure à celle de l'eau. La masse d'eau déplacée est égale à la masse du glaçon, de sorte que lorsque le glaçon fond, le niveau d'eau dans le verre reste inchangé. Cela signifie que la fonte d'un iceberg ne fait pas varier le niveau de la mer. Par conséquent, les seules glaces susceptibles de faire augmenter le niveau de la mer (suite au réchauffement de l'atmosphère) sont les masses présentes sur terre, par exemple les glaciers...