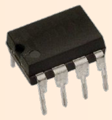


Electrocinétique

Chapitre 1 : Stabilité des systèmes linéaires

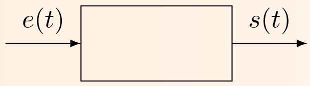
Sommaire

1 Etude des systèmes linéaires

1.1 Système linéaire

Le rôle d'un système est d'élaborer un signal $s(t)$, signal de sortie ou réponse, à partir d'un signal donné $e(t)$, signal d'entrée ou excitation.

Système linéaire :



Un système est linéaire si le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$ sont liées par une équation différentielle linéaire :

$$D_0 s + D_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \ldots + D_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = N_0 e + N_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \ldots + N_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m}$$

avec n, ordre maximal des dérivées successives de $s(t)$, est l'ordre du système linéaire.

La linéarité du système permet d'en déduire le théorème de superposition (vérifié par tout système linéaire) :

Théorème de superposition (vérifié par tout système linéaire) :

Si $e_1(t)$ et $e_2(t)$ ont pour réponses respectives $s_1(t)$ et $s_2(t)$, et si λ est une constante, alors :

$$\lambda e_1(t) + e_2(t) \text{ a pour réponse } \lambda s_1(t) + s_2(t)$$

Nous verrons dans la deuxième section que tout signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux harmoniques (sinusoïdaux). Ainsi, le théorème de superposition permettra, en étudiant la réponse à chaque composante, de connaître la réponse d'un système linéaire à n'importe quel signal périodique.

1.2 Régime sinusoïdal forcé

Si l'étude est faite suffisamment longtemps après le début de l'excitation et si le régime transitoire s'amortit, le régime sinusoïdal est établi : c'est le *régime sinusoïdal forcé*.

Régime sinusoïdal forcé :

En régime sinusoïdal forcé, on ne conserve que la solution particulière de l'équation différentielle : parce que l'équation différentielle est linéaire, la solution particulière est elle aussi une fonction sinusoïdale, de même pulsation ω que le signal d'entrée :

$$\text{A l'excitation } e(t) = E_0 \cos(\omega t) \text{ correspond la réponse } s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Afin de simplifier les calculs, il est possible d'utiliser la notation complexe :

▷

1.3 Fonction de transfert

Fonction de transfert :

La *fonction de transfert* $\underline{H}$ est définie par le rapport de la réponse complexe $\underline{s}$ à vide du signal d'entrée complexe $\underline{e}$, à vide signifiant qu'aucun courant ne circule dans les bornes de sortie :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\sum_{k=0}^{m} N_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{n} D_i (j\omega)^i} \tag{1}$$

Le choix des lettres N et D pour les coefficients de l'équation différentielle apparaît clairement sur cette dernière expression.

Signification de la fonction de transfert :

- Le *gain* $G(\omega)$ d'un système linéaire est défini par le module de sa fonction de transfert :

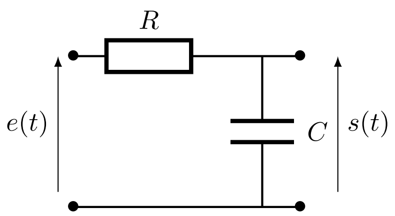
  $$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{S_0}{E_0}$$

  Il correspond au rapport de l'amplitude de la réponse à l'amplitude de l'excitation.

- L'argument de la fonction de transfert correspond au déphasage entre les signaux d'entrée et de sortie :

  $$\arg(\underline{H}(\omega)) = \varphi$$

Exercice d'application :
Déterminer la fonction de transfert du filtre RC suivant :



▷

1.4 Représentation de la fonction de transfert : diagramme de Bode

1.4.1 Le diagramme de Bode

Le diagramme – ou représentation – de Bode repose sur une échelle logarithmique, ce qui permet de tracer sur un même graphique des variations importantes d'une grandeur.

Gain en décibel :

Le *gain exprimé en décibels* est défini à partir du gain par la relation :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) \tag{2}$$

Diagramme de Bode :

Le diagramme de Bode est constitué du tracé en fonction de $\log(\omega)$:
- du gain en décibel G_{dB}
- de la phase φ

En abscisses, on utilisera aussi la *variable réduite* x définie à partir de la pulsation de référence ω_{ref} du circuit – définie à partir des grandeurs caractéristiques du circuit – et de la pulsation ω par la relation :

$$x = \frac{\omega}{\omega_{ref}} \tag{3}$$

1.4.2 Tracé du diagramme

Diagramme asymptotique :

Constitué de segments de droite, on le détermine en cherchant un équivalent de la fonction de transfert à basses fréquences et à hautes fréquences. L'ensemble de ces segments de droite représente de manière simplifiée le comportement du filtre en fonction de la fréquence.

Exercice d'application :
Tracer le diagramme de Bode du filtre RC étudié plus haut en fonction de la variable réduite x.

▷

1.5 Pulsations de coupure et bande passante à trois décibels

Le filtre RC traité jusqu'à présent est un filtre passe-bas : il laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences. De manière générale, pour un filtre donné, on souhaite connaître l'intervalle des fréquences que le filtre « laisse passer ». Cet intervalle s'appelle la *bande passante* d'un filtre et repose sur la notion de *pulsation de coupure* :

Pulsation de coupure :

Les *pulsations de coupure* ω_c d'un filtre correspondent aux valeurs de la pulsation pour lesquelles son gain est réduit d'un facteur $\sqrt{2}$ par rapport à sa valeur maximale :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

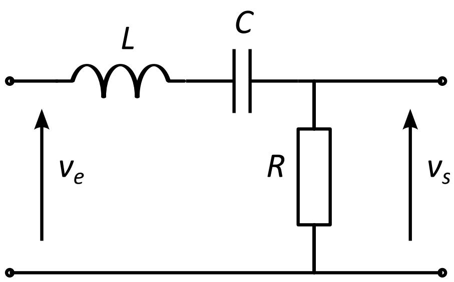
Intuitivement, elles correspondent aux fréquences à partir desquelles le filtre « coupe ».

Bande passante à trois décibels :

Les zones du diagramme de Bode pour lesquelles le gain est supérieur à sa valeur de coupure constituent la *bande passante à trois décibels*.

Cette dénomination est justifiée par la valeur du facteur $-20\log(\sqrt{2})$, approximativement égal à -3 dB.

Exercice d'application :
Considérons par exemple le filtre suivant :



Après avoir exprimé sa fonction de transfert sous la forme canonique

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec Q le facteur de qualité et ω_0 et la pulsation propre du filtre, déterminer sa bande passante.

▷

1.6 Nature d'un filtre

On peut distinguer quatre types de filtres idéaux, selon la dépendance du gain en fonction de la fréquence. On parle de filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande.

Si le filtre n'est pas trop compliqué, on peut déterminer la nature du filtre avant d'effectuer tout calcul. Pour cela, on considère les dipôles équivalents à basses fréquences et à hautes fréquences des dipôles connus : R, L et C.

> Exercice d'application :
> A partir des schémas équivalents à haute et basse fréquence, déterminer la nature des filtres RC et RLC étudiés plus haut.

2 Réponse d'un système à un signal périodique

2.1 Décomposition d'un signal périodique quelconque en série de Fourier

Décomposition en série de Fourier :

Tout processus périodique dans le temps (ou dans l'espace) peut être représenté comme la superposition d'un nombre infini de processus harmoniques dont les pulsations forment une suite discrète.

Considérons par exemple le cas de la fonction créneau. Sa décomposition en série de Fourier, qui sera étudiée plus loin, peut être visualisée sur la figure suivante :

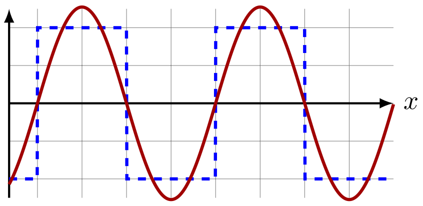


Figure 1 – $\frac{4}{\pi}\sin(x)$

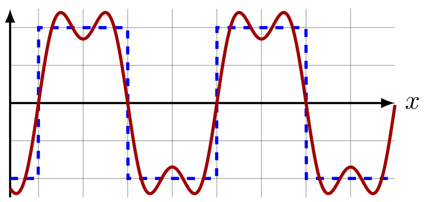


Figure 2 – $\frac{4}{\pi}(\sin(x)+\frac{\sin(3x)}{3})$

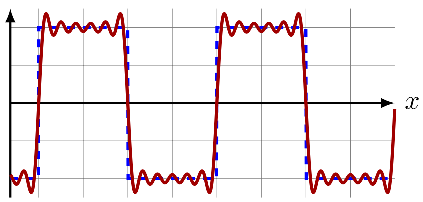


Figure 3 – $\frac{4}{\pi}(\sin(x)+\frac{\sin(3x)}{3}+\ldots+\frac{\sin(11x)}{11})$

On considère un signal périodique $e(t)$ de forme quelconque, de période T et donc de fréquence $f=\frac{1}{T}$ et de pulsation $\omega=\frac{2\pi}{T}$. Sa décomposition en série de Fourier s'écrit alors :

$$e(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega t+\varphi_n) \tag{5}$$

avec

$$c_0=\frac{1}{T}\int_0^T e(t)\mathrm{d}t$$

la valeur moyenne du signal $e(t)$, appelée *composante continue*, et c_n l'amplitude de l'harmonique de rang n.

Signal alternatif :

Un signal est dit *alternatif* lorsque sa composante continue est nulle.

Le premier harmonique est le terme appelé « fondamental » de la série de Fourier, la pulsation du fondamental est ω. Les harmoniques proprement dites sont les termes de pulsation $\omega_n=n\omega$ où $n\geq 2$.

2.2 Représentation de la décomposition : spectre

Le spectre permet de représenter l'ensemble des coefficients intervenant dans la décomposition en série de Fourier. Le spectre d'une fonction périodique de fréquence $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ est discontinu. On peut représenter :

— le spectre en amplitude : ensemble des c_n ;

— le spectre de phase : ensemble des φ_n ;

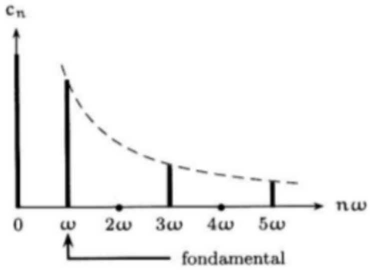


Figure 4 – Spectre en amplitude

2.3 Influence d'un système linéaire sur un signal périodique : filtrage

2.3.1 Principe

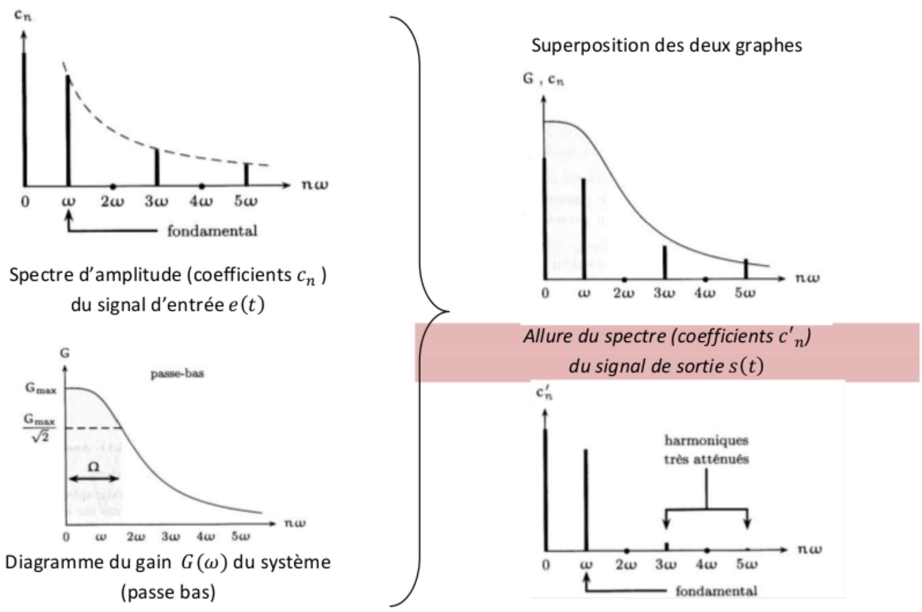
Un système linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ est soumis à un signal d'entrée périodique $e(t)$, qui peut être décomposé en série de Fourier :

$$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \tag{6}$$

Le signal de sortie $s_n(t)$ correspondant au signal d'entrée $e_n(t)$, harmonique de pulsation $n\omega$, est :

$$s_n(t) = G(n\omega)c_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega)) \tag{7}$$

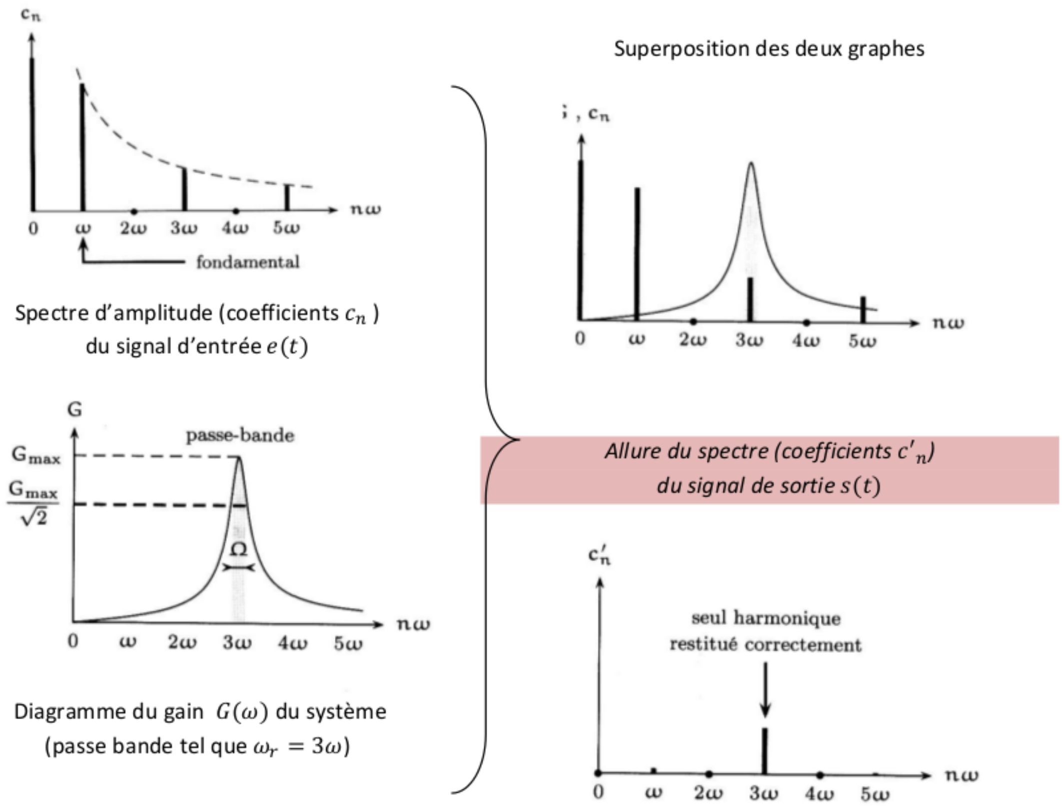
2.3.2 Filtrage d'un créneau par un passe-bas



Sur cet exemple, seuls subsistent de façon notable la composante continue et le fondamental :

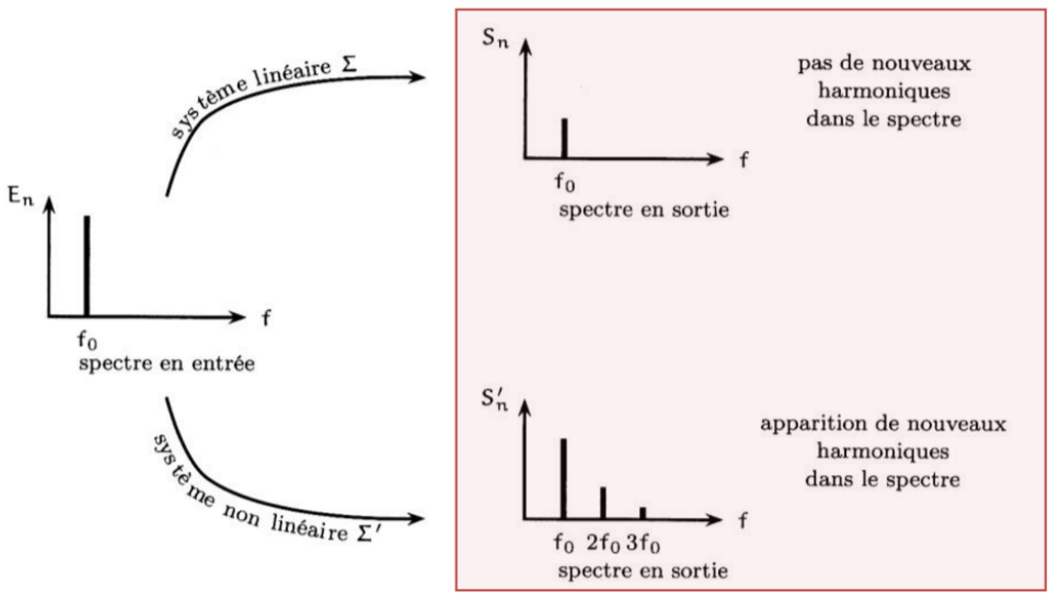
$$s(t) \simeq c'_0 + c'_1 \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \tag{8}$$

2.3.3 Filtrage d'un créneau par un passe-bande



Comme le filtre est très sélectif, c'est-à-dire de facteur de qualité Q très élevé, le signal de sortie est sinusoïdal sans composante continue. Si Q était moins élevé, il pourrait subsister d'autres raies dans le spectre du signal de sortie et celui-ci ne serait plus sinusoïdal.

2.3.4 Comment vérifier qu'un système réel est un système linéaire ?



3 Stabilité des systèmes linéaires

3.1 Définition

Considérons un système linéaire quelconque. La réponse harmonique $s(t)$ est donc liée au signal d'entrée harmonique $e(t)$ par une équation différentielle linéaire :

$$D_0 s + D_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \ldots + D_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = N_0 e + N_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \ldots + N_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m}$$

Cette équation se décompose en une solution particulière, caractérisant le régime établi, et la solution de l'équation sans second membre

$$D_0 s + D_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \ldots + D_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = 0$$

qui caractérise le régime transitoire et la réponse du système en l'absence d'excitation $e(t)$ (régime libre).

Stabilité d'un système :

Un système est stable si son régime libre, c'est-à-dire la solution de l'équation sans second membre, ne diverge pas. Au contraire, il est instable si le régime libre diverge.

3.2 Etude de la stabilité d'un système dans le domaine temporel

3.2.1 Système du premier ordre

▷

3.2.2 Système du deuxième ordre

▷

3.2.3 Critère de stabilité (domaine temporel)

Critère de stabilité dans le domaine temporel :

Un système du premier ou deuxième ordre est stable si et seulement si les coefficients de l'équation homogène sont tous de même signe.

3.3 Etude de la stabilité d'un système dans le domaine fréquentiel

3.3.1 Passage du domaine temporel au domaine fréquentiel

▷

3.3.2 Critère de stabilité (domaine fréquentiel)

Critère de stabilité dans le domaine fréquentiel :

Un système du premier ou deuxième ordre est stable si et seulement si les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert sont tous de même signe.