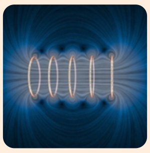


Electromagnétisme

Chapitre 6 : Propagation des ondes électromagnétiques

Sommaire

1 Ondes électromagnétiques dans le vide

1.1 Equation de propagation

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que, dans une région de l'espace suffisamment éloignée de toute distribution de charge et de courant ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$), les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ obéissent à la même équation de propagation, appelée équation de d'Alembert :

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \tag{1}$$

où le terme c correspond à la célérité de l'onde :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

1.2 Notion d'onde plane progressive harmonique (OPPH)

- On appelle *onde* le phénomène physique traduisant une modification d'un milieu - caractérisée par une grandeur $\xi(\mathbf{r}, t)$ - se propageant à la suite d'une perturbation initiale, le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ repérant la position d'un point M de l'espace par rapport à une origine O fixe.

- On appelle surface d'onde (ou front d'onde) le lieu des points tels que l'argument de la fonction ξ est constant à t donné.

- On dit que l'onde est plane si, à tout instant, ces surfaces sont des plans perpendiculaires à une direction fixe, dite direction de propagation et définie par un vecteur unitaire $\mathbf{u}$.

- Dans le cas d'une onde plane se propageant suivant la direction Ox, on montre que les solutions les plus générales de l'équation d'ALEMBERT

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

peuvent se mettrent sous la forme :

$$\xi(M,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (3)$$

ou sous la forme :

$$\xi(M,t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c}) \quad (4)$$

Les fonctions f et g représentent des ondes, appelées *ondes planes progressives*, se propageant suivant les x croissants et décroissants, respectivement.

▷

- Une onde plane progressive sera dite harmonique si elle est sinusoïdale :

$$\xi(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi\right) \quad (5)$$

où A est l'amplitude de l'onde, φ la phase à l'origine et $k = \frac{\omega}{c}$ un terme appelé *nombre d'onde.*

- Si la direction de propagation ne coïncide plus avec l'un des trois axes du repère cartésien d'étude, alors on écrira :

$$\xi(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} - ct) + g(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} + ct) \quad (6)$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur unitaire de direction de propagation. Si l'onde est sinusoïdale, on peut alors écrire, en introduisant le *vecteur d'onde* $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$:

$$\xi(\mathbf{r},t) = A\cos\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi\right) \quad (7)$$

1.3 Onde électromagnétique plane progressive et harmonique (OEMPPH)

1.3.1 Le modèle de l'OEMPPH

Définition d'une OEMPPH :

Une onde électromagnétique est dite plane, progressive et harmonique si chaque composante des champs **E** et **B** est de la forme :

$$a_i(M,T) = a_{i0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi_i) \tag{8}$$

où **k** représente le vecteur d'onde, porté par la direction de propagation **u** :

$$\mathbf{k} = k\mathbf{u}$$

En considérant par exemple une OEMPPH se propageant dans le vide suivant les x croissant, vérifions la relation, appelée *relation de dispersion*, entre le vecteur d'onde **k** et la pulsation ω de l'onde :

▷

Une onde plane monochromatique est un modèle permettant d'approcher une onde réelle mais qui ne peut décrire une onde réellement existente : sur le plan temporel, une onde parfaitement monochromatique correspondrait à une onde émise depuis $t = -\infty$ et jusqu'à $t = +\infty$. Par ailleurs, une onde plane correspondrait à une répartition infinie de l'énergie électromagnétique, ce qui n'aurait aucun sens. Il faut comprendre par exemple, que localement, une onde de rayon de courbure très grand pourra être localement approximé à un plan.

Une onde monochromatique laisse apparaître une double périodicité :
— une périodicité temporelle, caractérisée par sa période T ;
— une périodicité spatiale, caractérisée par sa *longueur d'onde* λ.

Rappelons les relations existant entre toutes les grandeurs caractéristiques de l'OEMPPH :

▷

1.3.2 Domaines des ondes électromagnétiques

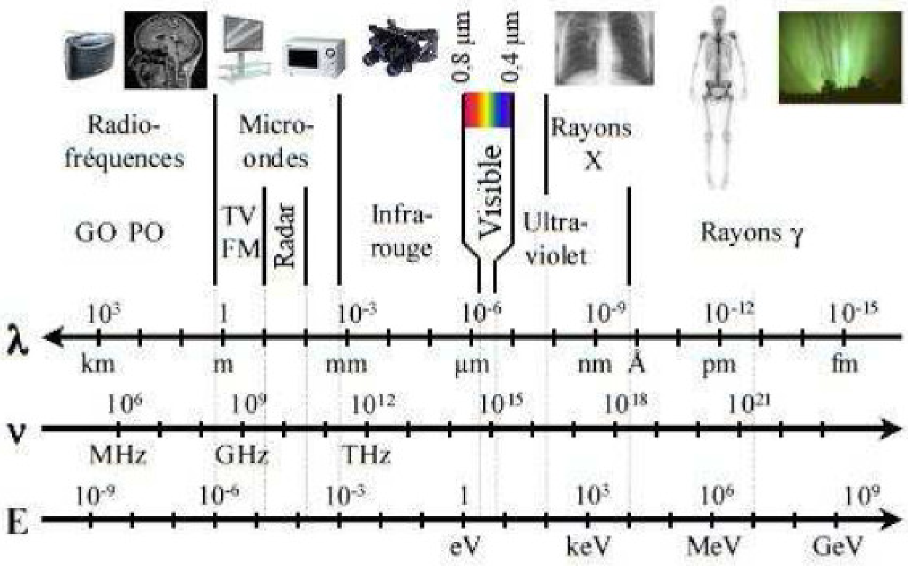


Figure 1 – Classification des ondes électromagnétiques

1.3.3 Vitesse de phase

Considérons une OEMPPH se propageant dans le vide et caractérisé par le champ électrique suivant :

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\mathbf{e_y}$$

Au cours du temps, du fait de la propagation, les surface d'onde se déplacent. Ceci revient à dire que l'ensemble des points pour lesquels la phase $\omega t - kx$ est constante se déplace. Considérons un déplacement élémentaire dx pendant la durée infinitésimale dt :

▷

Vitesse de phase :

La vitesse de phase d'une OEMPPH s'identifie à la vitesse de déplacement d'une surface d'onde dans la direction $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{v}_\varphi = \frac{\omega}{k}\mathbf{u}$$

Dans le cas présent, la relation de dispersion d'une onde se propageant dans le vide :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

conduit à une phase indépendante de la pulsation :

$$\mathbf{v}_\varphi = c\mathbf{u}$$

Un tel milieu est dit non dispersif. D'une manière générale, on reconnaîtra un milieu non dispersif au fait que la relation de dispersion, c'est-à-dire la fonction $k = f(\omega)$, est de type linéaire.

1.3.4 Equations de Maxwell en notation complexe

La linéarité des équations de Maxwell en jeu permet d'utiliser la notation complexe :

$$\underline{a_i}(M,t) = \underline{a_{i0}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{9}$$

Considérons un vecteur $\underline{a_i}(M,t)$ quelconque, exprimé en coordonnées cartésiennes et cherchons à déterminer les équivalences des dérivées spatiales (via l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$) et temporelle ($\partial/\partial t$) :

▷

Equivalences :

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \times i\omega \qquad \boldsymbol{\nabla} \leftrightarrow \times(-i\mathbf{k}) \tag{10}$$

En utilisant les équivalences précédentes, écrivons les équations de Maxwell en notation complexe, dans une zone vide de charge et de courant :

▷

1.3.5 Structure de l'OEMPPH

Relation de structure (région vide de charge et de courant) :

La relation de structure d'une OEMPPH dans une région vide de charge et de courant est la suivante :

$$\mathbf{B}(M,t) = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(M,t)}{\omega} = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}(M,t)}{c} \tag{11}$$

On peut noter les propriétés suivantes :

- les champs $\mathbf{E}(M,t)$ et $\mathbf{B}(M,t)$ sont transverses : $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(M,t) = 0$ et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(M,t) = 0$;
- les champs $\mathbf{E}(M,t)$ et $\mathbf{B}(M,t)$ sont perpendiculaires entre eux, et le trièdre $(\mathbf{k}, \mathbf{E}(M,t), \mathbf{B}(M,t))$ est direct ;
- les champs $\mathbf{E}(M,t)$ et $\mathbf{B}(M,t)$ sont en phase ;
- les modules des champs $\mathbf{E}(M,t)$ et $\mathbf{B}(M,t)$ vérifient :

$$\|\mathbf{B}(M,t)\| = \frac{\|\mathbf{E}(M,t)\|}{c} \tag{12}$$

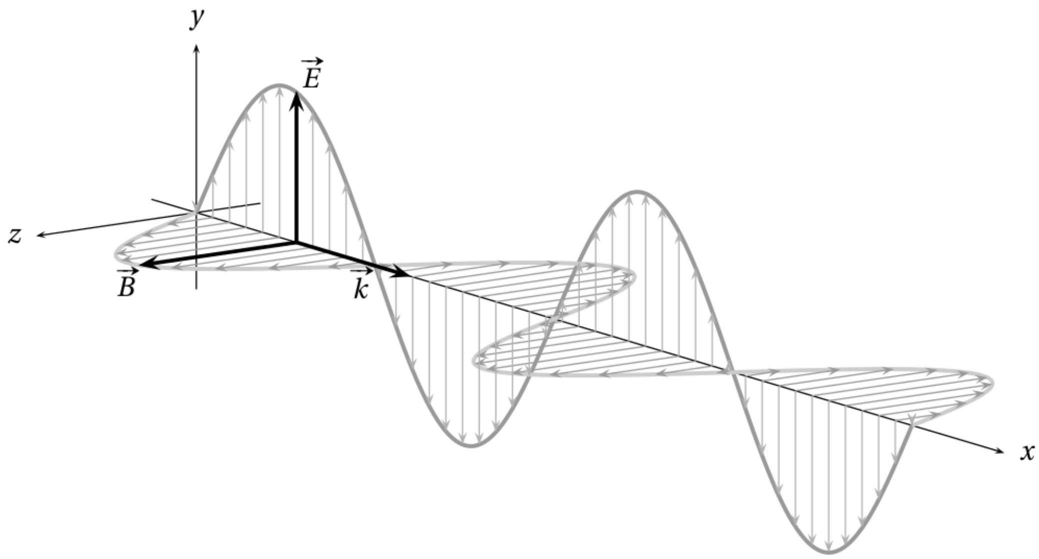


Figure 2

1.4 Aspect énergétique

1.4.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Exprimons les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique d'une OEMPPH :

▷

Equirépartition de l'énergie électromagnétique :

La densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OEMPPH est équitablement répartie entre les formes électrique et magnétique :

$$u_{EM} = \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}$$

1.4.2 Vecteur de Poynting

En utilisant la formule du double produit vectoriel $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$, exprimons le vecteur de Poynting en fonction de c, u_{EM} et $\mathbf{u}$:

▷

1.4.3 Vitesse de propagation de l'énergie

Le vecteur de Poynting est fondamental pour décrire l'énergie transportée par une onde et très utile pour définir une vitesse de propagation de l'énergie. Dans le cas d'une onde se propageant dans une direction $\mathbf{u}$ donnée et choisissant une surface plane S quelconque orthogonale à cette direction, on peut dire que l'énergie traversant S pendant $\mathrm{d}t$ est calculable à partir du flux de $\mathbf{\Pi}$ à travers S. Cette énergie étant aussi égale à l'énergie contenue dans le volume s'appuyant sur S et de longueur $v\mathrm{d}t$, où v est la vitesse de propagation de l'énergie :

▷

Vitesse de propagation de l'énergie :

L'énergie se propage dans le sens de propagation de l'onde, à la vitesse c, égale à la célérité de l'onde.

2 Etats de polarisation d'une OEMPPH

2.1 Polarisation = direction du champ électrique

Une onde électromagnétique est une onde vectorielle transverse. La direction du champ dans le plan orthogonal à la direction de propagation peut être quelconque. Or certaines interactions des OEM avec la matière dépendent de la direction des champs : c'est donc une information intéressante.

Polarisation d'une OEMPPH :

La direction du champ électrique d'une onde plane progressive harmonique dans le plan d'onde définit la direction de polarisation de cette onde.

L'évolution de cette direction au cours du temps en un point donné définit l'état de polarisation de l'onde, caractérisé par la courbe décrite au cours du temps par l'extrémité du champ $\mathbf{E}$, le vecteur $\mathbf{k}$ étant dirigé vers l'observateur.

2.2 Les différents états de polarisation

Considérons une OPPH se propageant suivant les x croissants. Elle s'écrit de manière générale :

$$E_y = E_{y0}\cos(\omega t - kx) \tag{13}$$
$$E_z = E_{z0}\cos(\omega t - kx + \varphi) \tag{14}$$

Selon les valeurs du déphasage entre les deux composantes, on peut distinguer plusieurs états de polarisation :

- rectiligne ($\varphi = \pm\pi$) : Le champ $\mathbf{E}(M,t)$ garde une direction constante au cours du temps. Les deux composantes du champ $\mathbf{E}$ dans le plan de polarisation sont en phase ou en opposition de phase.

- elliptique : Dans le cas le plus général, une onde plane progressive monochromatique est polarisée elliptiquement : l'extrémité du champ électrique décrit une ellipse. Si l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique, la polarisation de l'onde est dite elliptique gauche (cf. figure 3). Dans le cas contraire, elle est dite elliptique droite.
- circulaire ($\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ et $E_{y0} = E_{z0}$) : La polarisation est dite circulaire gauche ou circulaire droite si l'extrémité du champ $\mathbf{E}$ décrit un cercle dans le sens trigonométrique ou dans le sens horaire.

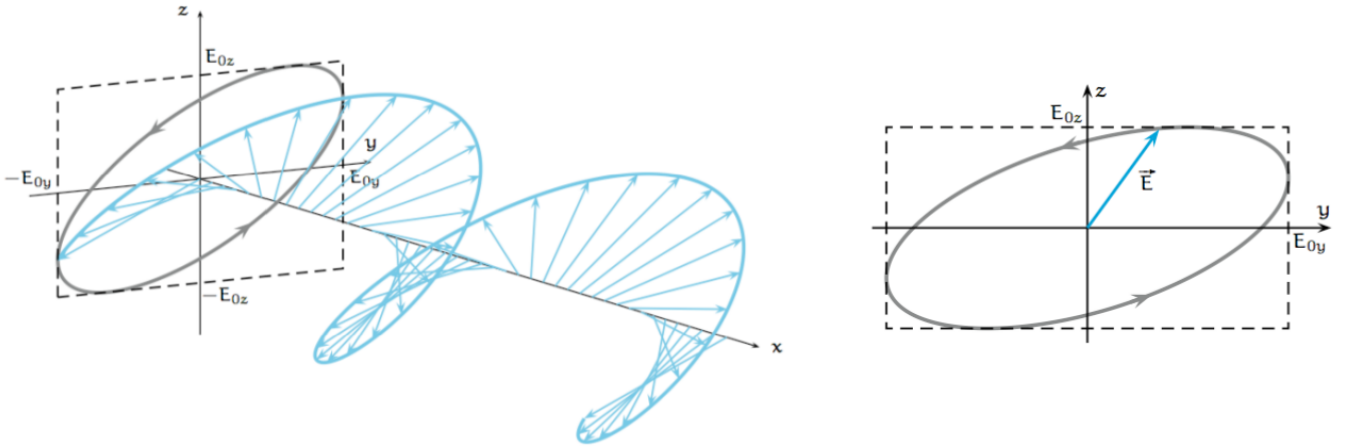
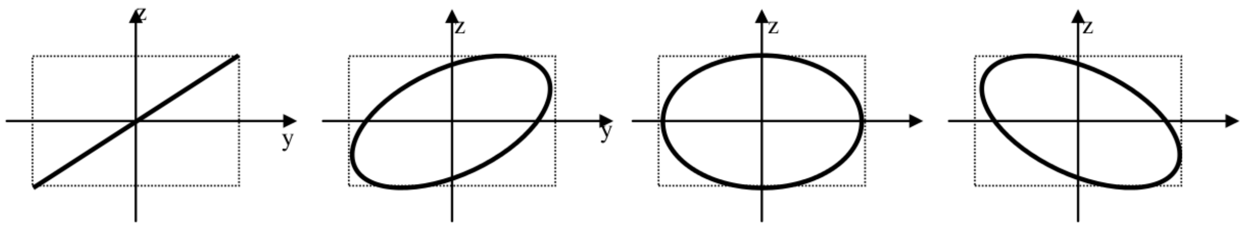
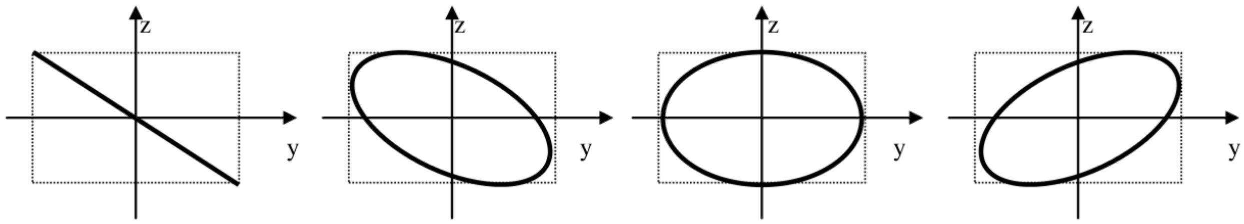


Figure 3 – Polarisation elliptique

Les figures ci-dessous représentent la figure formée par le bout de la flèche de **E** lorsque le temps s'écoule, pour différentes valeurs du déphasage :



$\varphi = 0$ $\quad 0 < \varphi < \pi/2$ $\quad \varphi = \pi/2$ $\quad \pi/2 < \varphi < \pi$



$\varphi = \pi$ $\quad \pi < \varphi < 3\pi/2$ $\quad \varphi = 3\pi/2$ $\quad 3\pi/2 < \varphi < 2\pi$

2.3 Etats de base de polarisation

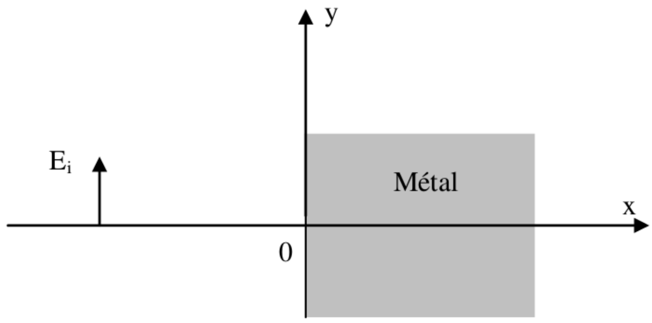
D'après 13, il est évident qu'une onde polarisée elliptiquement peut être décomposée en la somme de deux ondes polarisées rectilignement. Montrons à l'inverse que toute onde polarisée rectilignement peut être décomposée en deux ondes polarisée circulairement, l'une droite, l'autre gauche :

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\mathbf{e_y} = \underbrace{\frac{E_0}{2}\left(\cos(\omega t - kx)\mathbf{e_y} + \sin(\omega t - kx)\mathbf{e_z}\right)}_{\text{circ. droite}} + \underbrace{\frac{E_0}{2}\left(\cos(\omega t - kx)\mathbf{e_y} - \sin(\omega t - kx)\mathbf{e_z}\right)}_{\text{circ. gauche}}$$

3 Réflexion d'une OEMPPH sur un conducteur parfait

3.1 Position du problème

Nous allons dans ce paragraphe examiner le comportement d'une OEMPPH se propageant initialement dans le vide et arrivant sur un conducteur. Dans toute la suite de cette étude, nous supposerons l'espace partagé en deux demi-espaces, l'un vide ($x < 0$), l'autre formé par le conducteur ($x > 0$), supposé globalement neutre. La frontière entre ces deux demi-espaces sera elle-même plane ($x = 0$). Toujours dans un souci de simplification, nous supposerons l'OEMPPH polarisée rectilignement :



$$\mathbf{E_i} = E_0 \cos(\omega t - kx)\mathbf{e_y}$$

Le champ électrique incident va mettre en mouvement les électrons libres du métal et engendrer des courants induits qui vont à leur tour générer une onde électromagnétique à l'intérieur du conducteur - on parlera d'onde transmise, ainsi qu'une onde électromagnétique réfléchie dans la direction inverse de l'onde incidente.

3.2 Effet de peau

Nous avons déjà rencontré cet effet au chapitre précédent, lorsque nous avons étudié un conducteur sous l'action d'un champ électrique. Ici, il correspondra à l'impossibilité pour l'onde transmise de pénétrer sensiblement à l'intérieur du conducteur.

L'onde ne se propageant plus dans le vide, elle va obéir à une autre relation de dispersion que celle du vide ($k = \frac{\omega}{c}$), que l'on va donc chercher à exprimer. L'onde n'étant pas a priori progressive harmonique, nous sommes amené à envisager un nombre d'onde a priori complexe (nous verrons que ceci revient à envisager une onde pseudo progressive harmonique). A l'aide de la composante transverse du champ électrique à la frontière ($x = 0$), déterminons la forme générale du champ électrique de l'onde transmise :

▷

A partir des équations de Maxwell appliquées à un conducteur dans le cadre de l'ARQS, déterminons l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique $\underline{\mathbf{E_t}}$ à l'intérieur du matériau conducteur :

▷

Déduisons de l'équation différentielle relative à $\mathbf{E_t}$ la relation de dispersion reliant $\underline{k_t}$ et ω :

▷

ce qui permet d'exprimer le champ électrique $\underline{\mathbf{E_t}}$:

▷

Remarque : les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde complexe $\underline{k}$ présentent les significations physiques suivantes :

— la partie réelle k' est liée à la propagation de la phase à la vitesse $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$;

— la partie imaginaire k'' caractérise l'atténuation du champ lors de sa propagation sur une longueur caractéristique d'atténuation :

$$\delta = \frac{1}{k''}$$

appelée *épaisseur de peau.*

Dans le cas présent, la relation $k' = f(\omega)$ n'étant pas linéaire, la vitesse de phase dans le conducteur dépend de ω : le milieu conducteur est dispersif.

Avec le modèle du « métal parfait », pour lequel $\gamma_0 \to \infty$, l'épaisseur de peau est nulle : $\gamma = 0$. Le champ électrique transmis est donc nul à l'intérieur du conducteur. Cela signifie que l'onde ne peut pénétrer à l'intérieur du conducteur, que les champs y sont nuls et que les courants ne peuvent être que superficiels :

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

3.3 Structure de l'onde réfléchie

Après avoir précisé l'expression des champs électrique et magnétique et du vecteur d'onde de l'onde incidente, déterminer la structure de l'onde réfléchie.
Pour préciser la structure de cette onde réfléchie, réécrivons tout d'abord l'onde incidente, c'est-à-dire l'expressions de $\underline{\mathbf{E_i}}$, $\underline{\mathbf{B_i}}$ et du vecteur d'onde de l'onde incidente $\mathbf{k}$:

▷

Le champ $\mathbf{E}$ étant transverse, il est nécessairement continu à la traversée du plan de séparation, c'est-à-dire que - le champ étant nul à l'intérieur du conducteur - il doit être nul en $x = 0$. L'onde incidente seule ne satisfit pas à cette condition : il existe nécessairement une onde réfléchie telle que :

$$\mathbf{E_i}(x = 0) + \mathbf{E_r}(x = 0) = 0$$

Déterminons la structure de cette onde réfléchie :

▷

3.4 Onde stationnaire résultante

3.4.1 Structure de l'onde stationnaire résultante

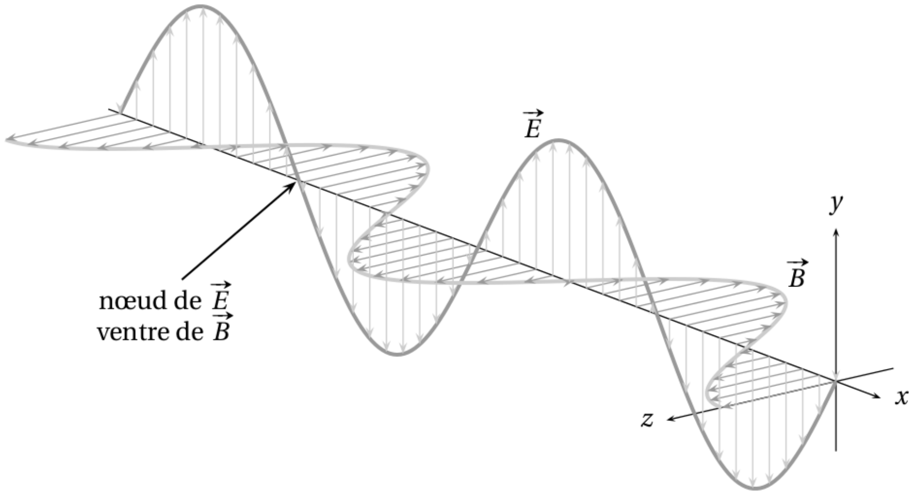
Dans le vide, on assiste à la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Donner l'expression de l'onde résultante.

▷

Onde stationnaire résultante :

La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie conduit à une onde stationnaire :

$$\mathbf{E}(M,t) = 2E_0 \sin(\omega t)\sin(kx)\mathbf{e_y} \qquad \mathbf{B}(M,t) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\mathbf{e_z}$$



- Les noeuds de $\mathbf{E}$ coïncident avec les ventres de $\mathbf{B}$ et inversement.
- Les champs électrique et magnétique sont en quadrature spatiale et temporelle.

3.4.2 Aspect énergétique de l'onde stationnaire

Exprimons la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie $u_{EM}(M,t)$ et du vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi}(M,t)$:

▷

Le vecteur de Poynting est dirigé selon Ox et s'annule aux nœuds de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{B}$ (« plans nodaux ») : à tout instant, la puissance électromagnétique qui traverse ces plans est nulle, l'énergie reste confinée entre 2 plans nodaux consécutifs.

De plus, la moyenne temporelle de $\mathbf{\Pi}$ étant nulle, on voit clairement que l'onde stationnaire ne propage pas d'énergie.

3.5 Pression de radiation (Complément)

Revenant alors au plan $x=0$, le champ magnétique total dans le vide s'écrit :

$$\underline{\mathbf{B}}(M,t) = \frac{2E_0}{c}e^{j\omega t}\mathbf{e_z}$$

Or ce champ magnétique est un champ tangent pour le plan de séparation $x=0$. Ceci implique, d'après les relations de passage sur $\mathbf{B}$, l'existence de courants superficiels sur le plan métallique, de densité $\underline{\mathbf{j_s}}$:

▷

Ces courants fournissent une interprétation physique du mécanisme de réflexion de l'onde annoncé dans la section 3.1 : le champ $\mathbf{E_i}$ met en mouvement les charges libres du plan conducteur, créant ainsi un courant superficiel colinéaire à $\mathbf{E_i}$. Ce courant crée en retour l'onde réfléchie.

Le plan conducteur, parcouru par un courant surfacique et placé dans un champ magnétique, subit alors une force de Laplace. Cette force surfacique est l'équivalent d'une pression appelée pression de radiation. L'une des application de cette pression de radiation est son utilisation pour accélérer des engins spatiaux grâce à la lumière solaire. De tels dispositifs sont appelés *voiles solaires* (fig. 4).

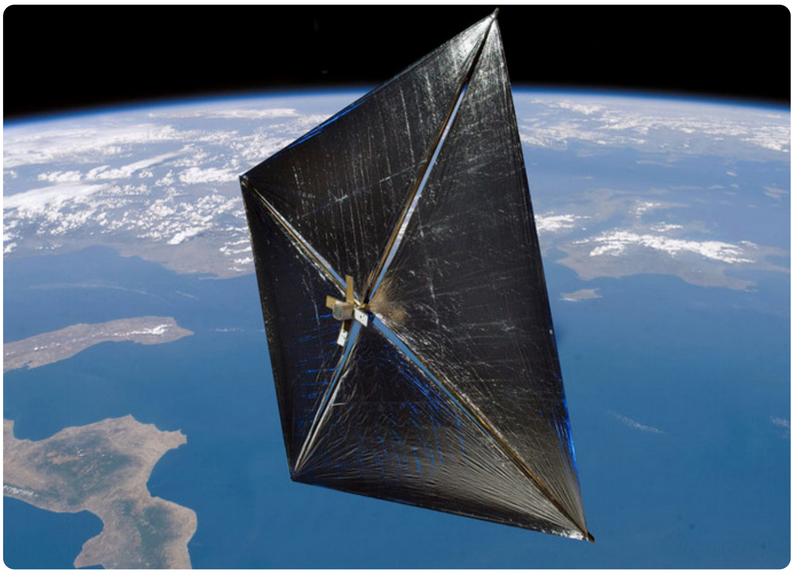


Figure 4 – Sunjammer, une voile de $1200\,\mathrm{m}^2$ qui doit être lancée prochainement par la Nasa

3.6 Grille polarisante

Imaginons à présent qu'on remplace le plan métallique par une grille métallique dont l'espacement des fils est petit devant la longueur d'onde.

Les charges libres du conducteur ne peuvent se déplacer que colinéairement aux fils de la grille et cette dernière ne se comportera comme un plan que pour des ondes dont le champ $\mathbf{E}$ incident sera lui- même colinéaire aux fils.

En revanche, une onde dont le champ $\mathbf{E}$ serait orthogonal aux fils sera entièrement transmise par la grille. Plus généralement, une onde elliptique quelconque arrivant sur la grille pourra toujours être décomposée, au niveau de $\mathbf{E}$, en une composante parallèle aux fils, entièrement réfléchie, et une composante orthogonale aux fils, entièrement transmise.

L'onde elliptique incidente est transformée après traversée de la grille en une onde rectiligne orthogonale à la direction des fils : la grille est dite polarisante.

Dans le domaine de l'optique, on peut faire traverser à des ondes lumineuses des substances transparentes se comportant de la même façon. Ces substances, appelées *polaroïds*, comportent des longues chaînes moléculaires créées par étirement et rendues conductrices, qui se comportent comme les fils de la grille métallique.

3.7 Application aux cavités à une dimension

Une cavité à une dimension est un dispositif présentant deux conducteurs parfaits plans et parallèle entre eux. Condisérons par exemple l'association d'un conducteur placé en $x = -L$ et l'autre en $x = 0$:

▷